Lycée Fénelon
Année 2025-2026

BCPST1
A. Wassfi

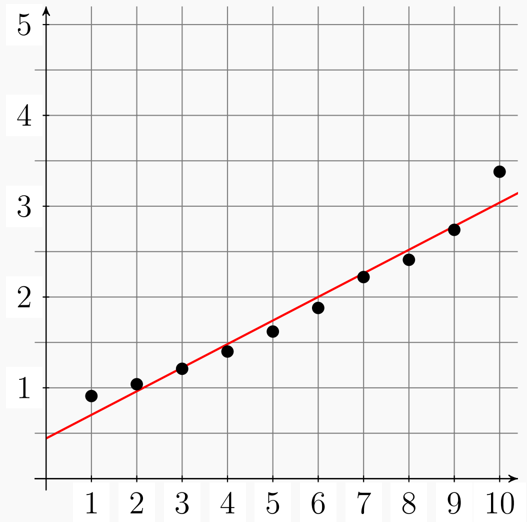
Corrigé du devoir surveillé de mathématiques n°4
Samedi 17 janvier 2025 (3h)

Exercice 1 : étude d'une série statistique à deux variables

Une entreprise utilise de l'acier comme matière première. Afin d'optimiser ses coûts et d'optimiser l'influence de trop fortes variations des cours de l'acier, elle décide de passer des commandes à ses fournisseurs à long terme. Le tableau suivant récapitule les consommations y_i, exprimées en milliers de tonnes, pour 10 années (x_i est compris entre 1 et 10).

Année i	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
Rang x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Consommation y_i	0,9	1,03	1,20	1,39	1,61	1,87	2,21	2,40	2,73	3,37

1. Représenter, sur le graphique situé en **annexe** page 7 (qui est à rendre avec la copie), le nuage de points associés à la série statistique (x_i ; y_i).



2. On donne $\sum y_i = 0,9 + 1,03 + \cdots + 3,37 = 18,7$.
Déterminer les coordonnées du point moyen G du nuage associé à la série statistique (x_i ; y_i).

$$x_i = \frac{1+2+\cdots+10}{10} = \frac{10\times 11}{2} = 5,5$$
$$y_i = \frac{0,9+1,03+\cdots+3,37}{10} \simeq 1,87$$
G a pour coordonnées $(5,5; 1,87)$.

3. On admet que le coefficient de corrélation linéaire de cette série est $r \approx 0,98$ (à 10^{-2} près). Interpréter ce résultat.

Ce coefficient de corrélation linéaire $r \approx 0{,}98$ est très proche de 1 : il traduit donc une **forte corrélation linéaire positive** entre les deux variables. Autrement dit, lorsque x

augmente, y a tendance à augmenter et le nuage de points est **presque aligné** selon une droite croissante.
Ainsi, un ajustement par une droite (régression linéaire par la méthode des moindres carrés) semble **pertinent**.

4. On donne l'équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés :

$$y = 0,26x + 0,44.$$

Représenter cette droite sur le graphique situé en **annexe** page 7.

Voir graphique ci-dessus.

5. En utilisant cet ajustement affine, quelle consommation, exprimée en milliers de tonnes, peut-on prévoir en 2028 ?

En 2028, $x = 20$ donc $y = 0,26 \times 20 + 0,44 = 5,2 + 0,44 = 5,64$. En 2028, on peut prévoir une consommation de 5,64 milliers de tonnes.

Exercice 2 : une suite récurrente d'ordre 2

Soit (u_n) la suite définie par, pour tout entier naturel n :

$$u_n = \int_0^\pi \frac{\cos(nx)}{\frac{5}{4} - \cos x}\, dx.$$

1. Justifier l'existence de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ (on ne cherchera pas à le calculer).

La fonction $x \mapsto \dfrac{\cos(nx)}{5 - 4\cos x}$ est continue sur $[0, \pi]$ car le dénominateur $\frac{5}{4} - \cos x$ est strictement positif : en effet, $\cos x \in [-1, 1]$, donc

$$\frac{5}{4} - \cos x \geqslant \frac{1}{4} > 0.$$

Ainsi, l'intégrale définissant u_n existe.

2. On admet que $u_0 = \dfrac{4\pi}{3}$. Démontrer que $u_1 = \dfrac{2\pi}{3}$. *On pourra utiliser* $\cos x = \frac{5}{4} - \left(\frac{5}{4} - \cos x\right)$.

Calcul de u_1 :

$$u_1 = \int_0^\pi \frac{\cos x}{\frac{5}{4} - \cos x}\, dx.$$

On écrit

$$\cos x = \frac{5}{4} - \left(\tfrac{5}{4} - \cos x\right),$$

donc

$$\frac{\cos x}{\frac{5}{4} - \cos x} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{5}{4} - \cos x} - 1.$$

En intégrant sur $[0, \pi]$:

$$u_1 = \frac{5}{4} u_0 - \int_0^\pi 1\, dx = \frac{5}{4} \cdot \frac{4\pi}{3} - \pi = \frac{5\pi}{3} - \pi = \frac{2\pi}{3}.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$.

(a) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que $\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$.

D'après le cours, pour tous réels p et q :

$$\cos(p+q) + \cos(p-q) = 2\cos(p)\cos(q).$$

Donc, en posant $p = \frac{a+b}{2}$ et $q = \frac{a-b}{2}$ (et donc $a = p+q$ et $b = p-q$), on obtient :

$$\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right).$$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$. En déduire une expression de $\cos((n+2)x) + \cos(nx)$ en un produit de cosinus.

On en déduit la formule suivante :

$$\cos((n+2)x) + \cos(nx) = 2\cos((n+1)x)\cos x.$$

(c) Utiliser le résultat précédent pour démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+2} + u_n = \frac{5}{2}u_{n+1}$$

En intégrant :

$$u_{n+2} + u_n = \int_0^\pi \frac{\cos((n+2)x) + \cos(nx)}{\frac{5}{4} - \cos x}\,dx = 2\int_0^\pi \frac{\cos((n+1)x)\cos x}{\frac{5}{4} - \cos x}\,dx.$$

On réécrit $\cos x = \frac{5}{4} - \left(\frac{5}{4} - \cos x\right)$. D'où

$$\frac{\cos x}{\frac{5}{4} - \cos x} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{5}{4} - \cos x} - 1.$$

Ainsi

$$u_{n+2} + u_n = 2\left(\frac{5}{4}\int_0^\pi \frac{\cos((n+1)x)}{\frac{5}{4} - \cos x}\,dx - \int_0^\pi \cos((n+1)x)\,dx\right).$$

Or, pour tout entier $k \geq 1$,

$$\int_0^\pi \cos(kx)\,dx = 0.$$

Donc la seconde intégrale s'annule et il reste

$$u_{n+2} + u_n = 2 \cdot \frac{5}{4}\,u_{n+1} = \frac{5}{2}\,u_{n+1},$$

ce qui est la relation annoncée.

(d) Démontrer enfin que

$$u_n = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Résolution de l'équation récurrente d'ordre 2 : $u_{n+2} - \frac{5}{2}u_{n+1} + u_n = 0$.
L'équation caractéristique est

$$r^2 - \frac{5}{2}r + 1 = 0,$$

dont les racines sont

$$r = \frac{\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 4}}{2} = \frac{5/2 \pm 3/2}{2} \quad \Longrightarrow \quad r_1 = 2,\ r_2 = \tfrac{1}{2}.$$

La solution générale est donc $u_n = A \cdot 2^n + B \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
Donc $u_0 = \dfrac{4\pi}{3} = A + B$ et $u_1 = \dfrac{2\pi}{3} = 2A + \dfrac{B}{2}$.
On a alors $2u_1 - u_0 = 0 = 3A$ donc $A = 0$ et donc $B = \dfrac{4\pi}{3}$.
Ainsi

$$\boxed{u_n = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.}$$

4. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

   (a) Calculer S_n en fonction de n.

Pour tout $n \geq 0$,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{4\pi}{3} \sum_{k=0}^{n} \left(\tfrac{1}{2}\right)^k = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{8\pi}{3}\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right).$$

   (b) En déduire $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} S_n$.

On a $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{8\pi}{3}$.

Exercice 3 : un calcul d'intégrales

On considère les intégrales

$$I = \int_1^{16} \frac{1}{1 + \sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad J = \int_1^{16} \frac{\sqrt{t}}{1 + \sqrt{t}}\,\mathrm{d}t.$$

1. Trouver deux réels a et b tels que, pour tout $t \in [1; 16]$:

$$\frac{2t}{1+t} = a + \frac{b}{1+t}.$$

On cherche a et b tels que, pour tout réel t de l'intervalle $[1; 16]$,

$$\frac{2t}{1+t} = a + \frac{b}{1+t}.$$

On met tout sur le même dénominateur :

$$a + \frac{b}{1+t} = \frac{a(1+t) + b}{1+t}.$$

On doit donc avoir, pour tout t,

$$\frac{2t}{1+t} = \frac{a(1+t)+b}{1+t} \quad \Longrightarrow \quad 2t = a(1+t)+b = at+a+b.$$

On identifie alors les coefficients :

$$\begin{cases} 2 = a, \\ 0 = a+b. \end{cases}$$

D'où

$$a = 2 \quad \text{et} \quad b = -a = -2.$$

Ainsi,

$$\forall t \in [1;16], \quad \boxed{\frac{2t}{1+t} = 2 - \frac{2}{1+t}}.$$

2. À l'aide du changement de variable $x = \sqrt{t}$, montrer que

$$I = 6 + 2\ln\frac{2}{5}.$$

On pose le changement de variable

$$x = \sqrt{t} \quad \Longrightarrow \quad t = x^2 \quad \text{et} \quad \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x.$$

Lorsque t varie de 1 à 16, les bornes de x sont :

$$t = 1 \Rightarrow x = \sqrt{1} = 1, \quad t = 16 \Rightarrow x = \sqrt{16} = 4.$$

L'intégrale I devient alors :

$$I = \int_1^{16} \frac{1}{1+\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \int_1^4 \frac{1}{1+x}\cdot 2x\,\mathrm{d}x = \int_1^4 \frac{2x}{1+x}\,\mathrm{d}x.$$

D'après la question précédente (avec t remplacé par x), on sait que

$$\frac{2x}{1+x} = 2 - \frac{2}{1+x}.$$

Donc

$$I = \int_1^4 \left(2 - \frac{2}{1+x}\right)\mathrm{d}x = \int_1^4 2\,\mathrm{d}x - 2\int_1^4 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x.$$

On calcule chaque intégrale :

$$\int_1^4 2\,\mathrm{d}x = 2[x]_1^4 = 2(4-1) = 6,$$

$$\int_1^4 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x = [\ln|1+x|]_1^4 = \ln(5) - \ln(2) = \ln\left(\frac{5}{2}\right).$$

Ainsi,

$$\boxed{I = 6 - 2\ln\left(\frac{5}{2}\right) = 6 + 2\ln\left(\frac{2}{5}\right)}.$$

3. En déduire la valeur de l'intégrale J.

On remarque d'abord que, pour tout $t \geq 0$,

$$\frac{\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}} = \frac{(1+\sqrt{t})-1}{1+\sqrt{t}} = 1 - \frac{1}{1+\sqrt{t}}.$$

Ainsi,

$$J = \int_1^{16} \frac{\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \int_1^{16} \left(1 - \frac{1}{1+\sqrt{t}}\right) \mathrm{d}t = \int_1^{16} 1\,\mathrm{d}t - \int_1^{16} \frac{1}{1+\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t.$$

On reconnaît l'intégrale I :

$$\int_1^{16} 1\,\mathrm{d}t = [t]_1^{16} = 16 - 1 = 15,$$

donc

$$\boxed{J = 15 - I = 15 - \left(6 + 2\ln\left(\frac{2}{5}\right)\right) = 9 - 2\ln\left(\frac{2}{5}\right) = 9 + 2\ln\left(\frac{5}{2}\right)}.$$

Exercice 4 : une puissance de matrices

On définit les matrices réelles suivantes de taille 3×3 :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -3 \\ -3 & 2 & -3 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On rappelle que, par convention,

$$M^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3.$$

1. (a) Calculer J^2 et exprimer le résultat en fonction J.

$$J^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3J$$

   (b) Déterminer le rang de la matrice J.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. On doit compter le nombre de pivots du système linéaire :

$$JX = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & z & = & 0 \end{array} \right. \overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\Leftrightarrow} \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 0 \end{array} \right.$$

Le rang de la matrice est donc égal à 1.

2. (a) Calculer M^2.

$$M^2 = \begin{pmatrix} 22 & -3 & -3 \\ -3 & 22 & -3 \\ -3 & -3 & 22 \end{pmatrix}$$

(b) Exprimer M et M^2 en fonction de I_3 et de J.

On a $M = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -3 \\ -3 & 2 & -3 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 & -3 \\ -3 & -3 & -3 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 5I_3 - 3J.$

De même, $M^2 = \begin{pmatrix} 22 & -3 & -3 \\ -3 & 22 & -3 \\ -3 & -3 & 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 & -3 \\ -3 & -3 & -3 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix} + 25 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 25I_3 - 3J.$

(c) Déterminer une expression de M^2 en fonction de M et de I_3.

On en déduit que $-3J = M - 5I_3$, donc $M^2 = 25I_3 + (M - 5I_3) = M + 20I_3$

(d) En déduire que M est inversible et expliciter les coefficients de la matrice M^{-1}.

On a $M^2 = M + 20I_3 \Longleftrightarrow\Longleftrightarrow M^2 - M = 20I_3 \Longleftrightarrow M \times \frac{1}{20}(M - I_3) = I_3 = \frac{1}{20}(M - I_3) \times M$
Ainsi, M est inversible et on a :

$$\boxed{M^{-1} = \frac{1}{20}(M - I_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{20} & -\frac{3}{20} & -\frac{3}{20} \\ -\frac{3}{20} & \frac{1}{20} & -\frac{3}{20} \\ -\frac{3}{20} & -\frac{3}{20} & \frac{1}{20} \end{pmatrix}}.$$

3. (a) Prouver, par récurrence sur n, que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un couple de réels

(a_n, b_n) tels que

$$M^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n \end{pmatrix}.$$

En déduire les relations définissant a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

Soit $P(n)$ la proposition : « il existe deux réels a_n et b_n tels que $M^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n \end{pmatrix}$ ».

Initialisation. Pour $n = 0$, $M^0 = I_3$ est bien de la forme annoncée avec $a_0 = 1$, $b_0 = 0$.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons

$$M^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n \end{pmatrix}.$$

Alors

$$M^{n+1} = M^n M = \begin{pmatrix} a_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & -3 \\ -3 & 2 & -3 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Un produit matriciel donne, pour la première ligne :

$$a_{n+1} = 2a_n - 6b_n,$$
$$b_{n+1} = -3a_n - b_n,$$

et, par symétrie, M^{n+1} a la même structure. La propriété est vraie pour tout n par récurrence.

(b) À partir de ces relations, vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$b_{n+2} - b_{n+1} - 20\, b_n = 0.$$

Du système

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n - 6b_n, \\ b_{n+1} = -3a_n - b_n, \end{cases}$$

on tire $a_n = -\dfrac{1}{3}(b_{n+1} + b_n)$. Alors

$$a_{n+1} = 2\big(-\tfrac{1}{3}(b_{n+1} + b_n)\big) - 6b_n = -\tfrac{2}{3}b_{n+1} - \tfrac{20}{3}b_n.$$

En reportant dans $b_{n+2} = -3a_{n+1} - b_{n+1}$, on obtient

$$b_{n+2} = -3\big(-\tfrac{2}{3}b_{n+1} - \tfrac{20}{3}b_n\big) - b_{n+1} = b_{n+1} + 20b_n,$$

d'où

$$\boxed{b_{n+2} - b_{n+1} - 20\, b_n = 0.}$$

(c) En déduire la valeur de b_n puis celle de a_n en fonction de n.

L'équation caractéristique $r^2 - r - 20 = 0$ a pour racines $r_1 = 5$ et $r_2 = -4$. Donc

$$b_n = A \cdot 5^n + B \cdot (-4)^n.$$

Avec $b_0 = 0$ et $b_1 = -3a_0 - b_0 = -3$, on résout

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ 5A - 4B = -3, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad A = -\frac{1}{3},\ B = \frac{1}{3}.$$

Ainsi

$$\boxed{b_n = \frac{1}{3}\big((-4)^n - 5^n\big).}$$

Pour a_n, on repart de $b_{n+1} = -3a_n - b_n$, soit $a_n = -\dfrac{b_{n+1} + b_n}{3}$:

$$a_n = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}\Big[(-4)^{n+1} - 5^{n+1} + (-4)^n - 5^n\Big] = \frac{1}{3}\Big(2 \cdot 5^n + (-4)^n\Big).$$

Donc

$$\boxed{a_n = \frac{1}{3}\big(2 \cdot 5^n + (-4)^n\big), \qquad b_n = \frac{1}{3}\big((-4)^n - 5^n\big).}$$

4. Retrouver l'expression de M^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$, à l'aide de la formule du binôme de Newton, après avoir justifié qu'elle est applicable dans ce cas.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme I et J commutent, on peut appliquer le binôme de Newton :

$$M^n = (5I - 3J)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 5^{\,n-k}(-3)^k J^k.$$

Or $J^2 = 3J$, donc pour tout $k \geq 1$,

$$J^k = 3^{k-1} J.$$

On obtient alors

$$M^n = 5^n I + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 5^{\,n-k}(-3)^k\, 3^{k-1} J = 5^n I + \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 5^{\,n-k}(-9)^k J.$$

Mais

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 5^{\,n-k}(-9)^k = (5-9)^n = (-4)^n,$$

d'où

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 5^{\,n-k}(-9)^k = (-4)^n - 5^n.$$

Finalement,

$$\boxed{M^n = 5^n I + \frac{(-4)^n - 5^n}{3}\, J}.$$

En écriture explicite, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{M^n = \begin{pmatrix} \frac{2\cdot 5^n+(-4)^n}{3} & \frac{(-4)^n-5^n}{3} & \frac{(-4)^n-5^n}{3} \\ \frac{(-4)^n-5^n}{3} & \frac{2\cdot 5^n+(-4)^n}{3} & \frac{(-4)^n-5^n}{3} \\ \frac{(-4)^n-5^n}{3} & \frac{(-4)^n-5^n}{3} & \frac{2\cdot 5^n+(-4)^n}{3} \end{pmatrix}}$$

(diagonale $\frac{2\cdot 5^n+(-4)^n}{3}$, hors-diagonale $\frac{(-4)^n-5^n}{3}$).

Exercice 5 : encore des matrices

Préambule

On considère les matrices :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad A = \begin{pmatrix} -3 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.

On utilise l'algorithme du pivot de Gauss pour trouver P^{-1}.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Étape 1 : On annule les coefficients sous le pivot de la première colonne.

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1, \quad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1.$$

On obtient :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Étape 2 : On élimine le coefficient en colonne 3 de la ligne 2 à l'aide de la ligne 3 : $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Étape 3 : On met le pivot de la seconde ligne à 1 : $L_2 \leftarrow -\frac{1}{2}L_2$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Étape 4 : On annule le coefficient en colonne 2 de la ligne 1. $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

On a donc transformé $(P \mid I_3)$ en $(I_3 \mid P^{-1})$. Ainsi P est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & -1 \\ -1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Montrer que :

$$P^{-1}AP = T.$$

On calcule d'abord le produit AP :

$$AP = \begin{pmatrix} -3 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & -6 \\ -4 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Puis on calcule :

$$P^{-1}(AP) = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & -1 \\ -1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & -6 \\ -4 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = T.$$

Donc on a bien $P^{-1}AP = T$.

1 Système différentiel

Soient $x : t \mapsto x(t)$, $y : t \mapsto y(t)$, $z : t \mapsto z(t)$ trois fonctions continûment dérivables sur $\mathbb{R}$, qui représentent les coordonnées d'un point mobile au cours du temps.
Ces fonctions satisfont le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = -3x(t) - \frac{1}{2}y(t) + z(t) \\ y'(t) = 2x(t) - 3y(t) \\ z'(t) = -y(t) - z(t) \end{cases} \quad , \forall t \in \mathbb{R}.$$

On pose

$$X = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \quad X' = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}.$$

Le système différentiel s'écrit naturellement :

$$X' = AX,$$

où A est la matrice donnée en préambule.

3. Soit

$$Y = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix} \quad \text{tel que} \quad X = PY.$$

Montrer que le système différentiel (S) s'écrit :

$$Y' = TY.$$

On a par hypothèse $X = PY$. En dérivant par rapport au temps t,

$$X' = (PY)' = PY',$$

car P est constante.
Or le système initial s'écrit $X' = AX$. En remplaçant X par PY, on obtient :

$$PY' = AX = A(PY) = APY.$$

On multiplie à gauche par P^{-1} (cela est possible car P est inversible) :

$$Y' = P^{-1}AP\,Y.$$

D'après le préambule, on a montré que $P^{-1}AP = T$. Ainsi,

$$Y' = TY.$$

4. En déduire que :

$$\begin{cases} u'(t) = -2u(t) + v(t) \\ v'(t) = -2v(t) \\ w'(t) = -3w(t) \end{cases} \quad , \forall t \in \mathbb{R}.$$

On a $Y' = TY$ avec

$$T = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}.$$

Le produit TY vaut

$$TY = \begin{pmatrix} -2u + v \\ -2v \\ -3w \end{pmatrix}.$$

Comme $Y' = (u', v', w')^T$, on obtient le système :

$$\begin{cases} u'(t) = -2u(t) + v(t), \\ v'(t) = -2v(t), \\ w'(t) = -3w(t). \end{cases}$$

5. Résoudre ce système différentiel en commençant par le bas et en remontant.

On considère :

$$\begin{cases} u'(t) = -2u(t) + v(t), \\ v'(t) = -2v(t), \\ w'(t) = -3w(t). \end{cases}$$

1) Résolution pour w.

$$w'(t) = -3w(t) \quad \Rightarrow \quad w(t) = w_0 e^{-3t},$$

où $w_0 = w(0)$ est une constante réelle.
2) Résolution pour v.

$$v'(t) = -2v(t) \quad \Rightarrow \quad v(t) = v_0 e^{-2t},$$

avec $v_0 = v(0)$.
3) Résolution pour u.
On a

$$u'(t) + 2u(t) = v(t) = v_0 e^{-2t}.$$

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre. Le facteur intégrant est e^{2t}. On obtient :

$$\left(u(t)e^{2t}\right)' = v_0.$$

En intégrant :

$$u(t)e^{2t} = v_0 t + u_0,$$

où $u_0 = u(0)$. Donc

$$u(t) = (u_0 + v_0 t)\, e^{-2t}.$$

Au final, pour des constantes réelles u_0, v_0, w_0,

$$\begin{cases} u(t) = (u_0 + v_0 t)\, e^{-2t}, \\ v(t) = v_0 e^{-2t}, \\ w(t) = w_0 e^{-3t}. \end{cases}$$

6. En utilisant les questions 1 et 3, en déduire les solutions du système différentiel $X' = AX$.

On a $X = PY$ et $Y' = TY$, dont les solutions générales sont

$$\begin{cases} u(t) = (u_0 + v_0 t)\, e^{-2t}, \\ v(t) = v_0 e^{-2t}, \\ w(t) = w_0 e^{-3t}, \end{cases}$$

avec

$$Y(0) = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} = P^{-1}X(0).$$

Pour tout t, on a

$$X(t) = PY(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(t) + v(t) \\ 2u(t) + 2w(t) \\ 2u(t) + 2v(t) + w(t) \end{pmatrix}.$$

On a ainsi :

$$\boxed{X(t) = \begin{pmatrix} (u_0 + v_0(t+1))e^{-2t} \\ 2(u_0 + v_0 t)e^{-2t} + 2w_0 e^{-3t} \\ (2u_0 + 2v_0(t+1))e^{-2t} + w_0 e^{-3t} \end{pmatrix}.}$$

2 Suite récurrente

On considère les trois suites réelles définies par :

$$\begin{cases} x_{n+1} = -3x_n - \frac{1}{2}y_n + z_n \\ y_{n+1} = 2x_n - 3y_n \\ z_{n+1} = -y_n - z_n \\ x_0 = 10,\ y_0 = -20,\ z_0 = 40 \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Soit

$$X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}.$$

Le problème se traduit sous forme matricielle par la relation :

$$X_{n+1} = AX_n,$$

où A est la matrice donnée en préambule.

7. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = A^n X_0.$$

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$X_{n+1} = AX_n.$$

Par récurrence, on montre que

$$X_n = A^n X_0.$$

Initialisation : pour $n = 0$,

$$X_0 = A^0 X_0 = I_3 X_0.$$

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $X_n = A^n X_0$. Alors

$$X_{n+1} = AX_n = A(A^n X_0) = A^{n+1} X_0.$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.

8. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = PT^nP^{-1}.$$

Par récurrence, on montre que

$$A^n = PT^nP^{-1}$$

Initialisation : pour $n = 0$,

$$A^0 = I_3 = PI_3P^{-1} = PT^0P^{-1}$$

Hérédité : supposons que $A^n = PT^nP^{-1}$. Alors

$$A^{n+1} = AA^n = (PTP^{-1})(PT^nP^{-1}) = PTT^nP^{-1} = PT^{n+1}P^{-1}.$$

Ainsi, on a bien pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PT^nP^{-1}$.

9. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a :

$$T^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & n(-2)^{n-1} & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^n \end{pmatrix}$$

On écrit

$$T = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

D et N commutent car $DN = ND = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc d'après la formule du binôme de Newton :

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k}N^k.$$

Or, pour tout $k \geq 2$, $N^k = 0$ donc :

$$T^n = (D+N)^n = D^n + \binom{n}{1} D^{n-1}N = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & n(-2)^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$T^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & n(-2)^{n-1} & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^n \end{pmatrix}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

10. En déduire l'expression de X_n.

On a

$$X_n = A^n X_0 = PT^nP^{-1}X_0.$$

On commence par calculer

$$Y_0 = P^{-1}X_0, \quad X_0 = \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ 40 \end{pmatrix}.$$

Avec $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & -1 \\ -1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on obtient $Y_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} = P^{-1}X_0 = \begin{pmatrix} -30 \\ 40 \\ 20 \end{pmatrix}$.

Pour tout n,

$$Y_n = T^nY_0.$$

Avec

$$T^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & n(-2)^{n-1} & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^n \end{pmatrix},$$

on obtient

$$Y_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2)^n u_0 + n(-2)^{n-1}v_0 \\ (-2)^n v_0 \\ (-3)^n w_0 \end{pmatrix}.$$

En remplaçant $u_0 = -30,\ v_0 = 40,\ w_0 = 20$,

$$\begin{cases} u_n = (-2)^n(-30) + n(-2)^{n-1} \cdot 40 = (-2)^{n+1}(10n+15), \\ v_n = 40(-2)^n, \\ w_n = 20(-3)^n. \end{cases}$$

Puis

$$X_n = PY_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_n + v_n \\ 2u_n + 2w_n \\ 2u_n + 2v_n + w_n \end{pmatrix}.$$

En simplifiant, on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{\begin{aligned} & x_n = u_n + v_n = 5(-2)^{n+1}(2n-1), \\ & y_n = 2u_n + 2w_n = -20(-2)^n(2n+3) + 40(-3)^n, \\ & z_n = 2u_n + 2v_n + w_n = 20(-2)^n(1-2n) + 20(-3)^n. \end{aligned}}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5(-2)^{n+1}(2n-1) \\ -20(-2)^n(2n+3) + 40(-3)^n \\ 20(-2)^n(1-2n) + 20(-3)^n \end{pmatrix}.$$

Problème

Si l'on considère qu'un organisme est une population de cellules, le développement doit tenir compte de l'interaction mutuelle des cellules - ce que les spécialistes nomment les *relations d'allométrie*. Nous envisageons ci-dessous deux modèles d'évolution du poids P de cet organisme.

3 Le modèle de von Bertalanffy (1938)

On note $T(t)$, $S(t)$, $P(t)$ la taille, la surface et le poids à l'instant t. On admet qu'il existe un réel $a > 0$ tel que $S = aT^2$ et $P = aT^3$.

Le modèle suppose que l'accroissement du poids P est proportionnel à la surface S et qu'il y a un freinage proportionnel au poids :

$$P' = bS - cP, \text{ avec } b > 0 \text{ et } c > 0.$$

1. Montrer que T est solution de l'équation différentielle suivante notée (E) :

$$y' + \frac{c}{3}y = \frac{b}{3} \tag{E}$$

Dérivons la relation $P = aT^3$:

$$P' = 3aT'T^2 = 3ST'$$

donc

$$bS - cP = 3ST'$$

soit, en divisant par $3S(t) > 0$ et en remarquant que $\dfrac{P}{S} = T$,

$$T' = \frac{b}{3} - \frac{c}{3}T \Longleftrightarrow T' + \frac{c}{3}T = \frac{b}{3}.$$

Ainsi, y est bien solution de l'équation $y' + \dfrac{c}{3}y = \dfrac{b}{3}$.

2. Exprimer alors $T(t)$ en fonction de t, b et c.

Résolvons cette précédente équation différentielle :
Ainsi, $y(t) = Ke^{-\frac{c}{3}t} + \dfrac{b}{c}$ où $K \in \mathbb{R}$.
Donc, $T(t) = Ke^{-\frac{c}{3}t} + \dfrac{b}{c}$ pour un certain $K \in \mathbb{R}$.

3. En déduire que le poids évolue vers un poids maximum P_m (à préciser), et que l'on a :

$$P' = cP\left[\left(\frac{P_m}{P}\right)^{\frac{1}{3}} - 1\right].$$

Comme $c > 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} T(t) = \dfrac{b}{c}$.
Donc $\lim\limits_{t\to+\infty} P(t) = a\left(\dfrac{b}{c}\right)^3 = P_m$.

On a alors :

$$\begin{aligned}
P' &= bS - cP & (1)\\
&= cP\left(\frac{bS}{cP} - 1\right) & (2)\\
&= cP\left(\frac{b}{cT} - 1\right) & (3)\\
&= cP\left(\frac{b}{c(\frac{P}{a})^{\frac{1}{3}}} - 1\right) & (4)\\
&= cP\left(\frac{(b^3 a)^{\frac{1}{3}}}{(c^3 P)^{\frac{1}{3}}} - 1\right) & (5)\\
&= cP\left[\left(\frac{P_m}{P}\right)^{\frac{1}{3}} - 1\right] & (6)
\end{aligned}$$

4. Montrer que la surface poids évolue vers un maximum S_m (à préciser) et que l'on a :

$$S' = \frac{2}{3}cS\left[\left(\frac{S_m}{S}\right)^{\frac{1}{2}} - 1\right].$$

De même, on a $\lim\limits_{t\to+\infty} S(t) = a\left(\frac{b}{c}\right)^2 = S_m$.
On a alors :

$$\begin{aligned}
S' &= 2aT'T & (7)\\
&= 2a\left(-\frac{c}{3}T + \frac{b}{3}\right)T & (8)\\
&= \frac{2}{3}caT^2\left(\frac{b}{cT} - 1\right) & (9)\\
&= \frac{2}{3}caT^2\left(\frac{b}{c\left(\frac{S}{a}\right)^{\frac{1}{2}}} - 1\right) & (10)\\
&= \frac{2}{3}cS\left[\left(\frac{S_m}{S}\right)^{\frac{1}{2}} - 1\right] & (11)
\end{aligned}$$

4 Le modèle de F.J. Richard (1959)

Si $y(t)$ est une grandeur liée à la croissance d'un organisme (taille, poids ...), un modèle général est donnée par l'équation différentielle :

$$y' = \frac{c}{3}\frac{y}{1-\alpha}\left[\left(\frac{A}{y}\right)^{1-\alpha} - 1\right].$$

où c et A sont des constantes ($A > 0$), et α un paramètre réel ($\alpha \neq 1$).

5. Vérifier qu'il existe trois valeurs particulières de α pour lesquelles on retrouve le modèle de von Bertalanffy pour la taille, le poids et la surface.

On retrouve le modèle de von Bertalanffy pour la taille en prenant $\alpha = 0$, pour le poids en prenant $\alpha = \frac{2}{3}$ et pour la surface $\alpha = \frac{1}{2}$.

6. Dans cette question, on suppose que $\alpha = 2$.

(a) En supposant que $A = 1$, démontrer que l'on obtient l'équation différentielle suivante :

$$y' = \lambda y(1 - y)$$

où λ est une constante à déterminer en fonction de c.

$$y' = \frac{c}{3}\frac{y}{1-2}\left[\left(\frac{1}{y}\right)^{1-2} - 1\right] = -\frac{c}{3}y\,(y-1) = \lambda y(1-y).$$

où $\lambda = \frac{c}{3}$.

(b) En posant $z = \frac{1}{y}$, montrer que z vérifie l'équation différentielle suivante :

$$z' = -\lambda(z - 1).$$

On a : $z' = -\frac{y'}{y^2} = -\frac{\lambda y(1-y)}{y^2} = -\lambda\left(\frac{1}{y} - 1\right) = -\lambda(z-1)$.

(c) Résoudre cette équation différentielle et en déduire l'expression de $y(t)$.

On obtient, pour tout $t > 0$, $z(t) = Ke^{-\lambda t} + 1$.
On en déduit que pour tout $t > 0$, $y(t) = \frac{1}{Ke^{-\lambda t} + 1}$.

(d) En admettant que $y(0) = 0,001$ et que $\lambda > 0$, déterminer l'expression de $y(t)$ et déterminer sa limite en $+\infty$.

On a : $y(0) = \frac{1}{K+1} = 0,001$ donc $K + 1 = 1000$ soit $K = 999$.
On en déduit que pour tout $t > 0$, $y(t) = \frac{1}{999e^{-\lambda t} + 1}$.
$\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = 1$.