Liste d'exercices n°17 Probabilités

Exercice 1. Soit Ω un ensemble fini. Soient A, B et C trois parties de Ω. Soit $\mathbb{P}$ une probabilité sur Ω. Montrer que

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C).$$

Exercice 2. Soit $E := \{1, 2, 7, 42\}$.

1. Ecrire l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E.
2. Est-ce que 2 est un élément de $\mathcal{P}(E)$? L'ensemble vide appartient-il à $\mathcal{P}(E)$?
3. Soit $A := \{\{1, 2\}, \{42\}\}$. A-t-on $A \subseteq \mathcal{P}(E)$?
   Même question avec $B = \{\{1\}, \{42\}, \emptyset\}$.

Exercice 3. Soient A, B, C trois événements d'un espace probabilisé. Exprimer les événements suivants :

1. Aucun des événements A, B, C n'est réalisé.
2. Un seul des trois événements est réalisé.
3. Au moins deux des trois événements sont réalisés.
4. Au plus deux des trois événements sont réalisés.

Exercice 4. Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12. On en tire une au hasard. Les événements « tirer un nombre pair » et « tirer un multiple de 3 » sont-ils indépendants ? La réponse change t-elle s'il y a 13 boules ?

Exercice 5. Alice propose à Bob le jeu suivant : il tire 5 cartes au hasard dans un jeu de 52 cartes. Si l'as de pique figure parmi les cartes, il a gagné.

1. Quelle est la probabilité que Bob gagne ?
2. Alice essaie de tricher en retirant 10 cartes au hasard du jeu. Quelle est maintenant la probabilité que Bob gagne ?

Exercice 6. Alice et Bob, qui sont colocataires, jouent chaque jour à pile ou face pour décider qui fait la vaisselle. Alice sait que Bob triche 30% du temps en utilisant une pièce truquée qui lui permet de gagner avec 75% de chances.

1. Quelle est la probabilité que Bob gagne un jour donné ?
2. Il gagne 7 jours d'affilée. Quelle est la probabilité qu'il ait triché au moins une fois ?

Exercice 7. Soit n un entier naturel non nul. On dispose de n boîtes numérotées de 1 à n telles que pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, la boîte numéro k contienne k boules numérotées de 1 à k.
On choisit une boîte au hasard et on tire une boule de cette boîte.
Calculer la probabilité que la boule tirée porte le numéro de la boîte dont on l'a extraite.

Exercice 8. À l'instant 0, une urne contient une boule rouge et une boule verte et on effectue une succession de tirages définis par la règle suivante : on tire une boule de l'urne au hasard et on la remet dans l'urne en ajoutant une boule de la même couleur (on dispose en réserve d'une infinité de boules rouges et vertes). On note S_n le nombre de boules rouges au temps $n \geq 0$. Prouver que pour tout $n \geq 0$ et tout $k \in \{1, \ldots, n+1\}$ on a

$$P(S_n = k) = \frac{1}{n+1}.$$

Exercice 9. La classe de BCPST1 du Lycée Fénelon comporte 47 élèves.
Quelle est la probabilité qu'au moins deux élèves partagent le même jour d'anniversaire ?

Exercice 10. Vous jouez à pile ou face avec un autre joueur. Il parie sur pile, lance la pièce, et obtient pile. On note x la proportion de tricheurs dans la population. Quelle est la probabilité pour qu'il soit un tricheur ?

Exercice 11. Un joueur débute un jeu vidéo et effectue plusieurs parties successives. On admet que :

- la probabilité qu'il gagne la première partie est de 0,2 ;
- s'il gagne une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à 0,9 ;
- s'il perd une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à 0,7.

On note, pour tout entier naturel n non nul :

- G_n l'évènement « le joueur gagne la n-ième partie » ;
- p_n la probabilité de l'évènement G_n.

On a donc $p_1 = 0,2$.

1. Calculer p_2.
2. Le joueur a gagné la deuxième partie. Calculer la probabilité qu'il ait perdu la première.
3. Calculer la probabilité que le joueur gagne au moins une partie sur les trois premières parties.
4. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = \dfrac{1}{5}p_n + \dfrac{7}{10}$.
5. En déduire, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, l'expression de p_n.
6. Déterminer la limite de la suite (p_n) quand n tend vers $+\infty$.
7. Pour quelles valeurs de l'entier naturel n a-t-on : $\dfrac{7}{8} - p_n < 10^{-9}$?

Exercice 12. Le gérant d'un magasin de matériel informatique a acheté un stock de boîtes de CDs ; il constate que 5% des boîtes sont abîmées. Le gérant estime que :

— 60% des boîtes abîmées contiennent au moins un CD défectueux ;
— 98% des boîtes en bon état ne contiennent aucun CD défectueux ;
— les états des diverses boîtes sont indépendants les uns des autres.

Un client achète une des boîtes du lot. On désigne par A l'événement : "la boîte achetée est abîmée" et par D l'événement : "la boîte achetée contient au moins un CD défectueux".

1. Donner les probabilités $\mathcal{P}(A)$, $\mathcal{P}(\overline{A})$, $\mathcal{P}(D \mid A)$, $\mathcal{P}(\overline{D} \mid A)$, $\mathcal{P}(D \mid \overline{A})$ et $\mathcal{P}(\overline{D} \mid \overline{A})$. Calculer la probabilité de l'événement D.
2. Le client constate qu'un des CDs est défectueux. Quelle est la probabilité qu'il ait acheté une boîte abîmée ?

Exercice 13. Pour se rendre au lycée, un élève a le choix entre quatre itinéraires : A, B, C, D. Il choisit d'emprunter l'itinéraire A (resp. B, C) avec une probabilité égale à $\frac{1}{3}$ (resp. $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{12}$). La probabilité d'arriver en retard en empruntant A (resp. B, C) est $\frac{1}{20}$ (resp. $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{5}$). En empruntant D, il n'est jamais en retard.

1. Quelle est la probabilité que l'élève choisisse l'itinéraire D ?
2. L'élève arrive en retard. Quelle est la probabilité qu'il ait emprunté l'itinéraire C ?

Exercice 14. $\frac{1}{4}$ d'une population a été vaccinée. Parmi les vaccinés, on compte $\frac{1}{12}$ de malades. Parmi les malades, il y a 4 non-vaccinés pour un vacciné. Quelle est la probabilité pour un non-vacciné de tomber malade ?

Exercice 15. On obtient "face" avec une pièce A avec une probabilité $\frac{1}{2}$. Une pièce B donne "face" avec une probabilité $\frac{2}{3}$. On choisit une des deux pièces au hasard. On la lance. Si on obtient "face", on conserve la pièce que l'on vient de lancer, sinon on change de pièce. On effectue ainsi une suite de lancers. Quelle est la probabilité d'obtenir "face" au n^{e} lancer ?

Exercice 16. Une loterie se déroule une fois par semaine. Sur 100 billets, k sont gagnants. On suppose $k \leq 90$. Chaque billet coûte 1 euro. On dispose de 10 euros. Deux stratégies sont possibles :
- **A** : on achète 10 billets en une seule fois ;
- **B** : on achète 1 billet à la fois pendant 10 semaines.

Quelle est selon vous la meilleure stratégie pour obtenir un billet gagnant ? (Indication : pour choisir la bonne stratégie, calculer la probabilité d'avoir au moins un billet gagnant dans les deux cas. Il est plus simple de calculer la probabilité de l'événement contraire.)

Exercice 17. On considère un mobile qui se déplace sur les sommets d'un triangle A_1, A_2, A_3. On suppose qu'initialement le mobile se trouve en A_1. Ensuite les déplacements s'effectuent de la manière suivante : si le mobile est en A_i,
- il passe en A_j ($j \neq i$) avec la probabilité $\frac{2}{5}$ (dans les deux cas) ;
- il reste en A_i avec la probabilité $\frac{1}{5}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on introduit les événements : $U_n =$ "après n déplacements le mobile se trouve en A_1" ; $V_n =$ "après n déplacements le mobile se trouve en A_2" ; $W_n =$ "après n déplacements le mobile se trouve en A_3". On pose $u_n = P(U_n)$, $v_n = P(V_n)$ et $w_n = P(W_n)$.

1. Déterminer u_0, v_0, w_0.
2. En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}.$$
3. Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer J^n pour $n \in \mathbb{N}$.
   (b) En déduire A^n pour $n \in \mathbb{N}$, où $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
4. En déduire l'expression de u_n, v_n, w_n en fonction de n, pour tout entier n.
5. Quelles sont les limites des suites (u_n), (v_n) et (w_n) ?