Devoir maison n°9
A rendre pour le mercredi 4 février 2026

Intégrales de Wallis

Pour tout entier $n \geq 0$, on pose

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. A l'aide du changement de variable $t = \dfrac{\pi}{2} - x$, montrer que, pour tout $n \geq 0$, on a

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x)\,\mathrm{d}x.$$

On effectue le changement de variable

$$t = \frac{\pi}{2} - x, \qquad dx = -\,\mathrm{d}t.$$

Lorsque x varie de 0 à $\dfrac{\pi}{2}$, t varie de $\dfrac{\pi}{2}$ à 0. Ainsi

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{\pi/2}^{0} \cos^n\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t.$$

2. Calculer W_0 et W_1.

On a

$$W_0 = \int_0^{\pi/2} dt = \frac{\pi}{2}, \qquad W_1 = \int_0^{\pi/2} \sin t\,\mathrm{d}t = \big[-\cos t\big]_0^{\pi/2} = 1.$$

3. Montrer que la suite (W_n) est décroissante et en déduire qu'elle converge.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$W_{n+1} - W_n = \int_0^{\pi/2} \left(\sin^{n+1} t - \sin^n t\right)\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \sin^n t\,(\sin t - 1)\,\mathrm{d}t.$$

Or, pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $0 \leq \sin t \leq 1$, donc

$$\sin^n t(\sin t - 1) \leq 0,$$

d'où $W_{n+1} - W_n \leq 0$. La suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante.
De plus, pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $0 \leq \sin t$, donc $0 \leq \sin^n t$. Par positivité de l'intégrale, on obtient $W_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante et minorée, elle converge par le théorème de la limite monotone.

4. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}\,W_n.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant l'expression

$$W_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \sin^{n+2} t \,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \sin t \, \sin^{n+1} t \,\mathrm{d}t,$$

on intègre par parties avec

$$u(t) = \sin^{n+1} t, \quad dv = \sin t \,\mathrm{d}t, \quad \mathrm{d}u = (n+1)\sin^n t \cos t \,\mathrm{d}t, \quad v(t) = -\cos t.$$

On obtient

$$W_{n+2} = \Big[-\cos t \, \sin^{n+1} t\Big]_0^{\pi/2} + (n+1)\int_0^{\pi/2} \sin^n t \cos^2 t \,\mathrm{d}t.$$

Comme $\sin(0) = 0$ et $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$, le terme de bord est nul, d'où

$$W_{n+2} = (n+1)\int_0^{\pi/2} \sin^n t \cos^2 t \,\mathrm{d}t.$$

En écrivant $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$, on a

$$W_{n+2} = (n+1)\int_0^{\pi/2} \sin^n t \big(1 - \sin^2 t\big) \,\mathrm{d}t = (n+1)\big(W_n - W_{n+2}\big).$$

On en déduit

$$(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n \qquad \Longrightarrow \qquad W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}\, W_n.$$

5. Montrer que la suite $\big((n+1)W_{n+1}W_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et calculer la valeur de cette constante.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note

$$J_n = (n+1)\, W_n W_{n+1}.$$

Alors

$$\begin{aligned} J_{n+1} - J_n &= (n+2)W_{n+1}W_{n+2} - (n+1)W_nW_{n+1} \\ &= (n+2)W_{n+1}\left(\frac{n+1}{n+2}W_n\right) - (n+1)W_nW_{n+1} \\ &= (n+1)W_nW_{n+1} - (n+1)W_nW_{n+1} = 0. \end{aligned}$$

Donc la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. En particulier

$$J_0 = (0+1)W_0W_1 = W_0W_1 = \frac{\pi}{2} \cdot 1 = \frac{\pi}{2},$$

donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(n+1)W_nW_{n+1} = \frac{\pi}{2}.$$

6. En utilisant la monotonie de la suite (W_n), prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1.$$

En déduire que $W_{n+1} \sim W_n$.

La suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $W_n > 0$ pour tout n. Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$W_{n+2} \leq W_{n+1} \leq W_n.$$

Comme $W_n > 0$, on peut diviser par W_n et utiliser la relation de récurrence

$$\frac{W_{n+2}}{W_n} = \frac{n+1}{n+2}.$$

On obtient

$$\frac{n+1}{n+2} = \frac{W_{n+2}}{W_n} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1.$$

Par le théorème de convergence par encadrement, on a

$$\frac{W_{n+1}}{W_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1,$$

ce qui se note aussi $W_{n+1} \sim W_n$.

7. Déduire des questions précédentes que

$$W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

En déduire

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\, W_n.$$

On sait d'après la question précédente que $W_{n+1} \sim W_n$, et l'on a

$$J_n = (n+1)W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2}$$

pour tout n. Ainsi,

$$(n+1)W_n^2 \sim (n+1)W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2},$$

donc

$$nW_n^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

8. Montrer que, pour tout entier $p \geq 0$, on a

$$\begin{cases} W_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\,\dfrac{\pi}{2}, \\ W_{2p+1} = \dfrac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}. \end{cases}$$

À partir de la relation de récurrence de la question 5, on obtient, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$W_{2p} = \frac{2p-1}{2p} W_{2p-2} = \frac{2p-1}{2p} \cdot \frac{2p-3}{2p-2}\, W_{2p-4} = \cdots = \frac{(2p-1)(2p-3)\cdots 1}{(2p)(2p-2)\cdots 2}\, W_0.$$

En termes de factorielles,

$$\frac{(2p-1)(2p-3)\cdots 1}{(2p)(2p-2)\cdots 2} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2},$$

d'où, en utilisant $W_0 = \dfrac{\pi}{2}$,

$$W_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\, \frac{\pi}{2}.$$

De même,

$$W_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1} W_{2p-1} = \frac{2p}{2p+1} \cdot \frac{2p-2}{2p-1} W_{2p-3} = \cdots = \frac{2p\,(2p-2)\cdots 2}{(2p+1)(2p-1)\cdots 3}\, W_1.$$

Comme $W_1 = 1$ et

$$\frac{2p\,(2p-2)\cdots 2}{(2p+1)(2p-1)\cdots 3} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!},$$

on obtient

$$W_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}.$$