Corrigé de la liste d'exercices n°17 — Probabilités

Exercice 1. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A\cup B\cup C) &= \mathbb{P}((A\cup B)\cup C)\\ &= \mathbb{P}(A\cup B)+\mathbb{P}(C)-\mathbb{P}((A\cup B)\cap C)\\ &= \mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B)+\mathbb{P}(C)-\mathbb{P}((A\cap C)\cup(B\cap C))\\ &= \mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B)+\mathbb{P}(C)-\mathbb{P}(A\cap C)-\mathbb{P}(B\cap C)+\mathbb{P}(A\cap B\cap C).\end{aligned}$$

Exercice 2.

1. $$\mathcal{P}(E)=\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{7\},\{42\},\{1,2\},\{1,7\},\{1,42\},\{2,7\},\{2,42\},\{7,42\},\{1,2,7\},\{1,2,42\},\{1,7,42\},\{2,7,42\},E\}.$$
2. 2 n'est pas un élément de $\mathcal{P}(E)$ mais $\{2\}$ l'est. En revanche, on a bien $\emptyset\in\mathcal{P}(E)$.
3. Tous les éléments de A appartiennent à $\mathcal{P}(E)$ donc a bien $A\subset\mathcal{P}(E)$. Idem pour B.

Exercice 3.

1. $\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}$.
2. $(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\cup(\overline{A}\cap B\cap\overline{C})\cup(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C)$.
3. $(A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)$.
4. $\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$.

Exercice 4. • Soit $\Omega=[\![1,12]\!]$ muni de la probabilité uniforme. On note A l'événement « tirer un nombre pair », i.e ; $A=\{2,4,6,8,10,12\}$ et B l'événement « tirer un multiple de 3 », i.e. $B=\{3,6,9,12\}$.
On a d'une part $\mathbb{P}(A)=\dfrac{6}{12}=\dfrac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(B)=\dfrac{4}{12}=\dfrac{1}{3}$.
D'autre part $A\cap B$ est l'événement « tirer un multiple de 6 », i.e. $A\cap B=\{6,12\}$ donc $\mathbb{P}(A\cap B)=\dfrac{2}{12}=\dfrac{1}{6}=\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ donc les événements A et B sont indépendants.
• Si $\Omega=[\![1,13]\!]$, les événements A et B sont inchangés donc $\mathbb{P}(A)=\dfrac{6}{13},\mathbb{P}(B)=\dfrac{4}{13}$ et $\mathbb{P}(A\cap B)=\dfrac{2}{13}\neq\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ donc les événements A et B ne sont plus indépendants.

Exercice 5.

1. On est dans une situation d'équiprobabilité donc la probabilité que Bob gagne vaut le quotient $\dfrac{\text{nombre de mains gagnantes}}{\text{nombre de mains possibles}}$.
   Le nombre de mains possibles vaut $\dbinom{52}{5}$. Dénombrons maintenant le nombre de mains gagnantes, c'est à dire le nombre de mains de 5 cartes comportant l'as de pique. Si l'as de pique fait partie des 5 cartes, il reste à choisir 4 cartes parmi 51 pour compléter la main donc le nombre de mains gagnantes vaut $\dbinom{51}{4}$. La probabilité que Bob gagne vaut donc
   $$\frac{\binom{51}{4}}{\binom{52}{5}}=\frac{51!}{47!4!}\times\frac{47!5!}{52!}=\frac{5}{52}.$$

2. Notons B l'événement « Bob gagne » et A l'événement « Alice a retiré l'as de pique ». D'après la formule des probabilités totales dans le système complet d'événements $(A, \overline{A})$, on a
$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}(\overline{A})\mathbb{P}_{\overline{A}}(B).$$
Si Alice a retiré l'as de pique, Bob ne peut pas gagner donc $\mathbb{P}_A(B) = 0$.
L'événement $\overline{A}$ est réalisé si Alice n'a pas retiré l'as de pique, c'est à dire si elle a tiré 10 cartes parmi les 51 cartes qui ne sont pas l'as de pique donc
$$\mathbb{P}(\overline{A}) = \frac{\binom{51}{10}}{\binom{52}{10}} = \frac{51!}{10!41!}\frac{10!42!}{52!} = \frac{42}{52} = \frac{21}{26}.$$
Si Alice n'a pas retiré l'as de pique, Bob choisit donc 5 cartes parmi 42 qui contiennent l'as de pique donc
$$\mathbb{P}_{\overline{A}}(B) = \frac{\binom{41}{4}}{\binom{42}{5}} = \frac{41!}{4!47!}\frac{5!47!}{42!} = \frac{5}{42}$$
donc $\mathbb{P}(B) = \dfrac{21}{26}\dfrac{5}{42} = \dfrac{5}{52}$. La probabilité n'a donc pas changé !

Exercice 6.

1. Notons B l'événement « Bob gagne » et T l'événement « Bob triche ».
D'après la formule des probabilités totales dans le système complet d'événements $(T, \overline{T})$, on a
$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(T)\mathbb{P}_T(B) + \mathbb{P}(\overline{T})\mathbb{P}_{\overline{T}}(B) = \frac{3}{10} \times \frac{3}{4} + \frac{7}{10} \times \frac{1}{2} = \frac{23}{40}.$$
2. Notons G l'événement « Bob gagne 7 jours d'affilée » et A l'événement « Bob a triché au moins une fois ». Il s'agit de calculer $\mathbb{P}_G(A)$.
Puisque P_G est une probabilité, on a $P_G(A) = 1 - \mathbb{P}_G(\overline{A})$. Or, on a
$$\mathbb{P}_G(\overline{A}) = \frac{\mathbb{P}(\overline{A} \cap G)}{\mathbb{P}(G)} = \frac{\mathbb{P}(\overline{A})\mathbb{P}_{\overline{A}}(G)}{\mathbb{P}(G)}.$$
On a $\mathbb{P}(G) = \mathbb{P}(B)^7 = \left(\dfrac{23}{40}\right)^7$.
Par ailleurs, $\overline{A}$ est l'événement « Bob n'a jamais triché » donc
$$\mathbb{P}(\overline{A}) = (1 - \mathbb{P}(T))^7 = \left(\frac{7}{10}\right)^7$$
et $\mathbb{P}_{\overline{A}}(G) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^7$ donc $\mathbb{P}_G(\overline{A}) = \dfrac{\left(\frac{7}{10}\right)^7\left(\frac{1}{2}\right)^7}{\left(\frac{23}{40}\right)^7} = \left(\dfrac{14}{23}\right)^7$ d'où finalement
$$\mathbb{P}_G(A) = 1 - \left(\frac{14}{23}\right)^7 \simeq 0,97.$$

Exercice 7. Notons A_n l'événement « la boule tirée porte le numéro de la boîte dont on l'a extraite ».
On note également pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ l'événement B_k :« la boîte choisie est la boîte numéro k ».

Les événements $(B_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ forment un système complet d'événements donc on obtient d'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(A_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B_k)\mathbb{P}_{B_k}(A) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \times \frac{1}{k} = \frac{1}{n} \times \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

On peut montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$ donc quand le nombre de boîtes n tend vers l'infini, on a $\mathbb{P}(A_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{n}$, donc cette probabilité tend vers 0 si le nombre de boîtes n tend vers $+\infty$.

Exercice 8. On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'urne est constituée au temps n de $n+2$ boules parmi lesquelles le nombre de boules rouges est compris entre 1 et $n+1$ (et idem pour les boules vertes).
Montrons le résultat souhaité par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
• **Initialisation :** Pour $n = 0, S_0 = 1$ d'après l'énoncé donc $\mathbb{P}(S_0) = 1$, i.e. pour tout $k \in [\![1, n+1]\!] = \{1\}, \mathbb{P}(S_n = k) = \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{0+1} = 1$, donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.
•**Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que la propriété est vraie au rang n, i.e. pour tout $k \in [\![1, n+1]\!], \mathbb{P}(S_n = k) = \dfrac{1}{n+1}$ et montrons la propriété au rang $n+1$, i.e. pour tout $k \in [\![1, n+2]\!], \mathbb{P}(S_{n+1} = k) = \dfrac{1}{n+2}$.
Soit $k \in [\![1, n+2]\!]$. D'après la formule des probabilités totales dans le système complet d'événements $(S_n = i)_{1\leqslant i\leqslant n+1}$, on a

$$\mathbb{P}(S_{n+1} = k) = \sum_{i=1}^{n+1} \mathbb{P}(S_n = i)\mathbb{P}_{(S_n=i)}(S_{n+1} = k) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} \mathbb{P}_{(S_n=i)}(S_{n+1} = k),$$

où on a utilisé l'hypothèse de récurrence.
Or, d'après l'énoncé, s'il y a k boules rouges au temps $n+1$, il ne pouvait y avoir que k ou $k-1$ boules rouges au temps n donc $\mathbb{P}_{(S_n=i)}(S_{n+1} = k) = 0$ si $i \notin \{k, k-1\}$. Ainsi, il ne reste que

$$\mathbb{P}(S_{n+1} = k) = \frac{1}{n+1}(\mathbb{P}_{(S_n=k-1)}(S_{n+1} = k) + \mathbb{P}_{(S_n=k)}(S_{n+1} = k)).$$

On a alors trois cas :
- Si $k = 1$, alors l'événement $(S_n = k-1) = (S_n = 0)$ est impossible et $\mathbb{P}_{(S_n=1)}(S_{n+1} = 1)$ représente la probabilité de tirer une boule verte dans une urne contenant $n+2$ boules dont $n+1$ vertes donc

$$\mathbb{P}(S_{n+1} = 1) = \frac{\mathbb{P}_{(S_n=1)}(S_{n+1} = 1)}{n+1} = \frac{1}{n+1} \times \frac{n+1}{n+2} = \frac{1}{n+2}.$$

- Si $k = n+2$, alors l'événement $(S_n = k) = (S_n = n+2)$ est impossible et $\mathbb{P}_{(S_n=n+1)}(S_{n+1} = n+2)$ représente la probabilité de tirer une boule rouge dans une urne contenant $n+2$ boules dont $n+1$ rouges donc

$$\mathbb{P}(S_{n+1} = n+2) = \frac{\mathbb{P}_{(S_n=n+1)}(S_{n+1} = n+2)}{n+1} = \frac{1}{n+1} \times \frac{n+1}{n+2} = \frac{1}{n+2}.$$

- Si $k \in [\![2, n+1]\!]$, alors $\mathbb{P}_{(S_n=k-1)}(S_{n+1} = k)$ représente la probabilité de tirer une boule rouge dans urne contenant $n+2$ boules dont $k-1$ rouges et $\mathbb{P}_{(S_n=k)}(S_{n+1} = k)$ représente la probabilité de tirer une boule verte dans une urne contenant $n+2$ boules dont $n+2-k$ vertes donc

$$\mathbb{P}(S_{n+1}=k)=\frac{1}{n+1}\left(\frac{k-1}{n+2}+\frac{n+2-k}{n+2}\right)=\frac{1}{n+1}\times\frac{n+1}{n+2}=\frac{1}{n+2}.$$

Finalement, pour tout $k\in[\![1,n+2]\!]$, $\mathbb{P}(S_{n+1}=k)=\dfrac{1}{n+2}$, ce qui prouve la propriété au rang $n+1$ et achève la récurrence.
On dit que pour tout $n\in\mathbb{N}$, la variable aléatoire S_n suit une loi uniforme sur $[\![1,n+1]\!]$.

Exercice 9. Chaque élève a 365 anniversaires possibles donc $\Omega=[\![1,365]\!]^{47}$, d'où $\mathrm{Card}(\Omega)=365^{47}$.
Notons A l'événement« Au moins deux élèves partagent le même anniversaire ». On a alors $\overline{A}$:« aucun élève ne partage le même anniversaire ».
Calculons $\mathbb{P}(\overline{A})$. Calculons le nombre de 47-uplets de dates d'anniversaire qui conviennent. On commence par choisir 47 dates d'anniversaire différents (cela peut se faire de $\binom{365}{47}$) façons différentes puis on les attribue à chacun des élèves (cela peut se faire de 47! façons possibles). On a donc

$$\mathbb{P}(\overline{A})=\frac{47!\binom{365}{47}}{365^{47}}=\frac{365!}{318!\times 365^{47}}=\frac{365}{365}\times\frac{364}{365}\times\cdots\times\frac{319}{365}\simeq 0,05$$

donc $\mathbb{P}(A)=1-\mathbb{P}(\overline{A})\simeq 0,95$.

Exercice 10.
On suppose que :
- un joueur honnête obtient pile avec probabilité $\frac{1}{2}$;
- un tricheur peut imposer le résultat voulu, donc s'il parie sur pile, il obtient pile avec probabilité 1.

On note T l'événement « il est tricheur » et P l'événement « il obtient pile ». On a alors :

$$\mathbb{P}(T)=x,\qquad \mathbb{P}(\overline{T})=1-x,$$
$$\mathbb{P}(P\,|\,T)=1,\qquad \mathbb{P}(P\,|\,\overline{T})=\frac{1}{2}.$$

Par la formule des probabilités totales :

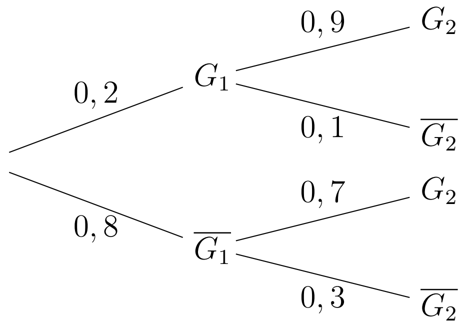
$$\mathbb{P}(P)=\mathbb{P}(P\,|\,T)\mathbb{P}(T)+\mathbb{P}(P\,|\,\overline{T})\mathbb{P}(\overline{T})=1\cdot x+\frac{1}{2}(1-x)=\frac{1+x}{2}.$$

Par la formule de Bayes :

$$\mathbb{P}(T\,|\,P)=\frac{\mathbb{P}(P\,|\,T)\mathbb{P}(T)}{\mathbb{P}(P)}=\frac{1\cdot x}{\frac{1+x}{2}}=\frac{2x}{1+x}.$$

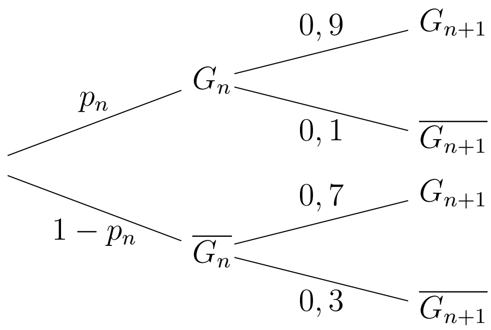
$$\boxed{\mathbb{P}(\text{tricheur}\mid\text{pile})=\frac{2x}{1+x}}$$

Exercice 11.
1. On a l'arbre pondéré suivant :



On a $p_2 = p\left(G_1 \cap G_2\right) + p\left(\overline{G_1} \cap G_2\right) = p\left(G_1\right) \times p_{G_1}\left(G_2\right) + p\left(\overline{G_1}\right) \times p_{\overline{(G_1)}}\left(G_2\right) =$ $0,2 \times 0,9 + 0,8 \times 0,7 = 0,18 + 0,56 = 0,74$.

2. Il faut trouver $p_{G_2}\left(\overline{G_1}\right) = \dfrac{p\left(\overline{G_1} \cap G_2\right)}{p\left(G_2\right)} = \dfrac{0,56}{0,74} = \dfrac{28}{37}$.
3. La probabilité que le joueur ne gagne aucune des trois parties est égale à $0,8 \times 0,3 \times 0,3 = 0,072$.
   La probabilité qu'il gagne au moins une partie est donc égale à
   $1 - 0,072 = 0,928$.
4. A la partie n, on a l'arbre suivant :



   On a donc $p_{n+1} = p\left(\mathrm{G}_n \cap \mathrm{G}_{n+1}\right) + p\left(\overline{\mathrm{G}_n} \cap \mathrm{G}_{n+1}\right)$
   $= p\left(\mathrm{G}_n\right) \times p_{\mathrm{G}_n}\left(\mathrm{G}_{n+1}\right) + p\left(\overline{\mathrm{G}_n}\right) \times p_{\overline{\mathrm{G}_n}}\left(\mathrm{G}_{n+1}\right) =$
   $p_n \times 0,9 + (1 - p_n) \times 0,7 = 0,9p_n + 0,7 - 0,7p_n = 0,2p_n + 0,7 = \dfrac{1}{5}p_n + \dfrac{7}{10}$.
5. (p_n) est arithmético-géométrique. On calcule donc son point fixe :
   $\ell = \dfrac{1}{5}\ell + \dfrac{7}{10} \iff \dfrac{4}{5}\ell = \dfrac{7}{10} \iff \ell = \dfrac{7}{8}$.
   Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} - \dfrac{7}{8} = \dfrac{1}{5}\left(p_n - \dfrac{7}{8}\right)$ donc la suite $\left(p_n - \dfrac{7}{8}\right)$ est géométrique de raison $q = \dfrac{1}{5}$ d'où $p_n - \dfrac{7}{8} = \left(p_1 - \dfrac{7}{8}\right)\left(\dfrac{1}{5}\right)^{n-1} = -\dfrac{27}{40}\left(\dfrac{1}{5}\right)^{n-1}$ d'où $p_n = \dfrac{7}{8} - \dfrac{27}{8}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n$.
   On a donc démontré que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = \dfrac{7}{8} - \dfrac{27}{8}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n$.
6. Comme $-1 < \dfrac{1}{5} < 1$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{5}\right)^n = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = \dfrac{7}{8}$.
7. On a : $\dfrac{7}{8} - p_n < 10^{-9} \iff \dfrac{7}{8} - \left(\dfrac{7}{8} - \dfrac{27}{8}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n\right) < 10^{-9} \iff \dfrac{27}{8}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n < 10^{-9} \iff$ $\left(\dfrac{1}{5}\right)^n < \dfrac{8}{27} \times 10^{-9} \iff$ (par croissance de la fonction logarithme népérien) $n \ln\left(\frac{1}{5}\right) <$ $\ln\left(\frac{8 \times 10^{-9}}{27}\right) \iff n > \dfrac{\ln\left(\frac{8 \times 10^{-9}}{27}\right)}{\ln\left(\frac{1}{5}\right)}$.
   Or $\dfrac{\ln\left(\frac{8 \times 10^{-9}}{27}\right)}{\ln\left(\frac{1}{5}\right)} \approx 13,6$. Donc u_{14} approche la limite $\dfrac{7}{8}$ à moins de 10^{-9}.

Exercice 12.

1. D'après l'énoncé :

$$\mathcal{P}(A) = 0{,}05, \qquad \mathcal{P}(D \mid A) = 0{,}6, \qquad \mathcal{P}(\overline{D} \mid \overline{A}) = 0{,}98.$$

On en déduit :

$$\mathcal{P}(\overline{A}) = 0{,}95, \quad \mathcal{P}(\overline{D} \mid A) = 0{,}4, \quad \mathcal{P}(D \mid \overline{A}) = 0{,}02.$$

Formule des probabilités totales (S.C.E. : A et $\overline{A}$) :

$$\mathcal{P}(D) = \mathcal{P}(D \mid A)\mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(D \mid \overline{A})\mathcal{P}(\overline{A}) = 0{,}6 \times 0{,}05 + 0{,}02 \times 0{,}95 = 0{,}049.$$

2. Formule de Bayes :

$$\mathcal{P}(A \mid D) = \frac{\mathcal{P}(D \mid A)\mathcal{P}(A)}{\mathcal{P}(D)} = \frac{0{,}6 \times 0{,}05}{0{,}049} = \frac{30}{49}.$$

Exercice 13. Appelons A, B, C, D les événements “l'élève emprunte l'itinéraire de même nom” et R : “l'élève arrive en retard”. D'après l'énoncé :

$$\mathcal{P}(A) = \frac{1}{3}, \quad \mathcal{P}(B) = \frac{1}{4}, \quad \mathcal{P}(C) = \frac{1}{12},$$

et

$$\mathcal{P}(R \mid A) = \frac{1}{20}, \quad \mathcal{P}(R \mid B) = \frac{1}{10}, \quad \mathcal{P}(R \mid C) = \frac{1}{5}, \quad \mathcal{P}(R \mid D) = 0.$$

1. Puisque A, B, C, D forment un S.C.E. :

$$\mathcal{P}(D) = 1 - \mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B) - \mathcal{P}(C) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{1}{3}.$$

2. On souhaite calculer $\mathcal{P}(C \mid R)$. Par Bayes :

$$\mathcal{P}(C \mid R) = \frac{\mathcal{P}(R \mid C)\mathcal{P}(C)}{\mathcal{P}(R)} = \frac{\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{12}}{\mathcal{P}(R)} = \frac{1}{60\,\mathcal{P}(R)}.$$

On calcule $\mathcal{P}(R)$ par la formule des probabilités totales :

$$\mathcal{P}(R) = \mathcal{P}(R \mid A)\mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(R \mid B)\mathcal{P}(B) + \mathcal{P}(R \mid C)\mathcal{P}(C) + \mathcal{P}(R \mid D)\mathcal{P}(D) = \frac{1}{60} + \frac{1}{40} + \frac{1}{60}.$$

Ainsi $60\,\mathcal{P}(R) = 1 + \frac{3}{2} + 1 = \frac{7}{2}$, donc :

$$\mathcal{P}(C \mid R) = \frac{2}{7}.$$

Exercice 14.
Appelons V : « la personne a été vaccinée », M : « la personne est malade ».
D'après l'énoncé :

$$\mathcal{P}(V) = \frac{1}{4}, \qquad \mathcal{P}(M \mid V) = \frac{1}{12}, \qquad \mathcal{P}(V \mid M) = \frac{1}{5}.$$

Par la formule de Bayes :

$$\mathcal{P}(M \mid \overline{V}) = \frac{\mathcal{P}(\overline{V} \mid M)\mathcal{P}(M)}{\mathcal{P}(\overline{V})} = \frac{\frac{4}{5}\mathcal{P}(M)}{\frac{3}{4}} = \frac{16}{15}\mathcal{P}(M).$$

$$\mathcal{P}(M) = \mathcal{P}(M \mid V)\mathcal{P}(V) + \mathcal{P}(M \mid \overline{V})\mathcal{P}(\overline{V}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \mathcal{P}(M \mid \overline{V}) \times \frac{3}{4} = \frac{1}{8} + \mathcal{P}(M \mid \overline{V}) \times \frac{3}{4}.$$

$$\mathcal{P}(M \mid \overline{V}) = \frac{16}{15}\left(\frac{1}{8} + \mathcal{P}(M \mid \overline{V}) \times \frac{3}{4}\right).$$

soit

$$\mathcal{P}(M \mid \overline{V}) = \frac{2}{15} + \mathcal{P}(M \mid \overline{V}) \times \frac{4}{5}.$$

$$\mathcal{P}(M \mid \overline{V}) \times \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$$

soit

$$\mathcal{P}(M \mid \overline{V}) = \frac{2}{3}$$

Exercice 15. L'obtention de pile/face au n-ième lancer dépend de la pièce utilisée lors de ce lancer. Notons :

A_n : "la pièce A est utilisée au n-ième lancer", B_n : "la pièce B est utilisée au n-ième lancer".

A_n et B_n forment un S.C.E.
D'après la formule des probabilités totales :

$$\mathcal{P}(F_n) = \mathcal{P}(F_n \mid A_n)\mathcal{P}(A_n) + \mathcal{P}(F_n \mid B_n)\mathcal{P}(B_n) = \frac{1}{2}\mathcal{P}(A_n) + \frac{2}{3}\mathcal{P}(B_n).$$

Il suffit donc de calculer $a_n = \mathcal{P}(A_n)$ (et $b_n = \mathcal{P}(B_n) = 1 - a_n$).
La pièce utilisée au $(k+1)$-ième lancer dépend de celle utilisée au lancer précédent. Avec le S.C.E. A_k, B_k :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(A_{k+1}) &= \mathcal{P}(A_{k+1} \mid A_k)\mathcal{P}(A_k) + \mathcal{P}(A_{k+1} \mid B_k)\mathcal{P}(B_k) \\ &= \mathcal{P}(F_k \mid A_k)\mathcal{P}(A_k) + \mathcal{P}(\overline{F_k} \mid B_k)\mathcal{P}(B_k) \\ &= \frac{1}{2}\mathcal{P}(A_k) + \frac{1}{3}\mathcal{P}(B_k).\end{aligned}$$

Donc :

$$a_{k+1} = \frac{1}{2}a_k + \frac{1}{3}(1 - a_k) = \frac{1}{6}a_k + \frac{1}{3}.$$

La suite (a_n) est arithmético-géométrique, de premier terme $a_1 = \frac{1}{2}$. Le point fixe x vérifie $x = \frac{1}{6}x + \frac{1}{3}$, soit $x = \frac{2}{5}$. Ainsi $a_n - \frac{2}{5}$ est géométrique de raison $\frac{1}{6}$ et de premier terme $\frac{1}{2} - \frac{2}{5} = \frac{1}{10}$, donc :

$$a_n = \frac{2}{5} + \frac{1}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}.$$

Alors :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(F_n) &= \frac{1}{2}a_n + \frac{2}{3}(1 - a_n) = -\frac{1}{6}a_n + \frac{2}{3} \\ &= -\frac{1}{6}\left(\frac{2}{5} + \frac{1}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}\right) + \frac{2}{3} = \frac{3}{5} - \frac{1}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{n}.\end{aligned}$$

Exercice 16. On note G l'événement "obtenir (au moins) un billet gagnant".

Stratégie A. On prend comme univers l'ensemble des combinaisons de 10 billets parmi 100 muni de la probabilité uniforme. Il est plus simple de calculer la probabilité de l'événement contraire $\overline{G}$:

$$\mathcal{P}(\overline{G}) = \frac{\binom{100-k}{10}}{\binom{100}{10}} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathcal{P}(G) = 1 - \frac{\binom{100-k}{10}}{\binom{100}{10}}. \tag{a}$$

Stratégie B. Soit G_i l'événement "obtenir un billet gagnant la i-ième semaine". On calcule encore l'événement contraire :

$$\mathcal{P}(\overline{G}) = \mathcal{P}\left(\bigcap_{i=1}^{10}\overline{G_i}\right) = \prod_{i=1}^{10}\mathcal{P}(\overline{G_i}) = \left(\frac{100-k}{100}\right)^{10}$$

(dix loteries indépendantes), donc :

$$\mathcal{P}(G) = 1 - \left(\frac{100-k}{100}\right)^{10}. \tag{b}$$

En comparant (a) et (b), on obtient que la stratégie A est meilleure (dans le document source, une preuve par comparaison terme à terme est donnée).

Exercice 17.

1. Initialement le mobile est en A_1, donc
$$u_0 = 1, \qquad v_0 = 0, \qquad w_0 = 0.$$

2. Par la formule des probabilités totales, par exemple
$$u_{n+1} = P(U_{n+1}) = P(U_{n+1} \mid U_n)u_n + P(U_{n+1} \mid V_n)v_n + P(U_{n+1} \mid W_n)w_n = \frac{1}{5}u_n + \frac{2}{5}v_n + \frac{2}{5}w_n.$$
On procède de même pour v_{n+1} et w_{n+1}, ce qui donne bien
$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}.$$

3. Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Chaque coefficient de J^2 vaut 3, donc $J^2 = 3J$. Par récurrence,
$$J^n = \begin{cases} I_3, & n = 0, \\ 3^{n-1}J, & n \geq 1. \end{cases}$$

   (b) Posons
$$A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$
On remarque que la matrice entre parenthèses s'écrit
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 2J - I_3,$$
donc
$$A = \frac{1}{5}(2J - I_3).$$
Comme I_3 et J commutent, on peut utiliser le binôme de Newton :
$$A^n = \frac{1}{5^n}(2J - I_3)^n = \frac{1}{5^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(2J)^k(-I_3)^{n-k} = \frac{1}{5^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k(-1)^{n-k}J^k.$$
On sépare le terme $k = 0$ et on utilise $J^0 = I_3$ et $J^k = 3^{k-1}J$ pour $k \geq 1$:
$$(2J-I_3)^n = (-1)^n I_3 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}2^k(-1)^{n-k}3^{k-1}J = (-1)^n I_3 + \frac{1}{3}\Big(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}6^k(-1)^{n-k}\Big)J.$$
Or
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}6^k(-1)^{n-k} = (6-1)^n = 5^n,$$
donc
$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}6^k(-1)^{n-k} = 5^n - (-1)^n.$$
Ainsi,
$$(2J - I_3)^n = (-1)^n I_3 + \frac{5^n - (-1)^n}{3}J \quad\Longrightarrow\quad A^n = \left(-\frac{1}{5}\right)^n I_3 + \frac{1}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{5}\right)^n\right)J.$$

4. Comme le mobile part de A_1, on a

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = P^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Or $J \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \left(-\frac{1}{5}\right)^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{5}\right)^n\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{5}\right)^n, \qquad v_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{5}\right)^n, \qquad w_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{5}\right)^n.$$

5. Comme $\left(-\frac{1}{5}\right)^n \to 0$, on obtient

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} w_n = \frac{1}{3}.$$