Liste d'exercices n°18 — Variables aléatoires

Exercice 1. Dans chacun des cas suivants, déterminer la loi de X.

1. Une urne contient 26 jetons sur lesquels figurent les 26 lettres de l'alphabet. On choisit 5 jetons et on note X le nombre de voyelles obtenues.
2. On forme un jury de 6 personnes en les choisissant au hasard dans un groupe de 5 hommes et 4 femmes. On note X le nombre de femmes du jury.
3. On range aléatoirement 20 paires de chaussettes dans 3 tiroirs et on note X le nombre de paires de chaussettes rangées dans le premier tiroir.
4. Un cirque contient 15 lamas, 15 dromadaires et 15 chameaux. On choisit un animal au hasard et on note X son nombre de bosses.
5. On suppose qu'en cas de naissance, la probabilité d'obtenir un garçon est identique à celle d'obtenir une fille. On note X le nombre de filles dans une famille de 3 enfants.

Exercice 2. Soit n un entier naturel non nul. Un archer dispose de n flèches dans son carquois. À chaque tir, il atteint sa cible avec une probabilité $p \in]0,1[$. Il arrête de tirer dès qu'il a atteint sa cible ou qu'il n'a plus de flèche. On note X la variable aléatoire égale au nombre de flèches utilisées.

1. Déterminer la loi de X ainsi que son espérance.
2. Calculer la probabilité que l'archer tire $k \in [\![1,n]\!]$ flèches sachant qu'il a atteint sa cible.
3. L'archer tire maintenant ses n flèches et gagne $n-k+1$ euros lorsqu'il atteint la cible au k-ème tir. On note Y le gain du joueur. Déterminer $\mathbb{E}(Y)$.

Exercice 3. Une urne contient $n-2$ boules blanches et 2 noires ($n \geq 2$). On les tire une à une sans remise et on désigne par X le rang d'apparition de la première boule noire. Déterminer la loi de X.

Exercice 4. Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $X(\Omega) = [\![1,n]\!]$.

1. Rappeler l'expression de l'espérance de X.
2. Montrer que la variance de X a pour expression
$$\mathbb{V}(X) = \frac{n^2-1}{12}.$$
3. Calculer l'espérance et la variance de variable aléatoire X avec $n = 7$.
4. Existe-il une valeur de n pour laquelle $\mathbb{V}(X) = 24$?

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Soient X et Y des variables aléatoires indépendantes prenant toutes les valeurs entières entre 1 et n, avec pour tout $k \in [\![1,n]\!]$,
$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(Y = k) = \frac{1}{n}.$$

1. Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$.
2. Calculer $\mathbb{P}(X \geq Y)$.
3. Déterminer la loi de $X - Y$.

Exercice 6. Soit $n \geqslant 2$.
Soient $(X_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ des variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$.
Pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, on considère l'événement $A_k = (X_k \neq X_{k+1})$.

1. Calculer $\mathbb{P}(A_k \cap A_{k+1})$ pour tout $k \in [\![1, n-2]\!]$.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que les événements $(A_k)_{1 \leqslant k \leqslant n-1}$ soient deux à deux indépendants.

Exercice 7. Soient n un entier naturel non nul et p un élément de $[0,1]$.
Soit X une variable aléatoire telle que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ et soit $Y = \dfrac{1}{1+X}$.
Déterminer la loi de Y et calculer son espérance.

Exercice 8. Soit X une variable aléatoire de loi binomiale de paramètres n et p. On définit la variable aléatoire
$$Y = n - X.$$

1. Déterminer la loi de Y.
2. En déduire l'espérance et la variance de la variable aléatoire Y.

Exercice 9. Lors d'un TIPE sur le comportement des animaux, des élèves font l'expérience suivante : un rat est placé dans une boîte ayant quatre portes de sortie d'apparence identique. L'une d'elles est dite bonne et les trois autres mauvaises. Chaque fois que le rat choisit une mauvaise porte, il reçoit une décharge électrique désagréable et est ramené à son point de départ, et cela jusqu'à ce qu'il choisisse la bonne porte. Il est alors récompensé.
Le groupe de TIPE fait l'hypothèse suivante : le rat a une excellente mémoire. A chaque nouvel essai, il évite les mauvaises portes choisies précédemment et choisit de façon équiprobable une de celles qu'il n'a pas encore essayées.

1. Déterminer la loi du nombre d'essais T effectués par le rat avec cette hypothèse.
2. Au bout de combien d'essais le rat peut-il espérer sortir ?

Exercice 10. Soit n un entier naturel non nul. On considère n cartes numérotées de 1 à n. On permute au hasard les cartes de ce jeu et on note Y la variable aléatoire égale au nombre de cartes qui occupent leur place naturelle.
Pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, on dit que la carte numéro k est à sa place naturelle si c'est la k-ième en partant du haut du paquet.
Pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, on appelle X_k la variable aléatoire qui vaut 1 si la k-ième carte est à sa place et 0 sinon.

1. Donner un lien entre Y et les X_k.
2. Montrer que $\mathbb{E}(Y) = 1$.

Exercice 11. Soit n un entier naturel non nul. On effectue deux tirages successifs avec remise dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On note M le plus grand numéro obtenu. Déterminer la loi de la variable aléatoire M puis calculer son espérance.

Exercice 12. Soit un entier $b \geqslant 2$. Deux urnes A et B contiennent au total b boules à l'instant 0.
A chaque instant $n \in \mathbb{N}$, on sélectionne une boule au hasard et on la change d'urne.
On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules contenues dans l'urne A à l'instant n (après le tirage).

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que $\mathbb{E}(X_{n+1} - X_n) = 1 - \dfrac{2}{b}\mathbb{E}(X_n)$.
2. Expliciter $\mathbb{E}(X_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ puis déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{E}(X_n)$.

Exercice 13. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose avoir choisi $2n$ lapins au hasard et un par un dans un enclos. Chaque animal possède indépendamment des autres une probabilité égale à $\frac{1}{2}$ d'être un mâle.
Soit C la variable aléatoire égale au nombre de couples mâle-femelle qu'on puisse former arbitrairement avec les $2n$ lapins (attention : C n'est pas le nombre de façons de faire des couples ; par exemple : avec 3 mâles et 5 femelles, on peut faire 3 couples).

1. Si M désigne le nombre de mâles, donner la loi de M puis exprimer C en fonction de M.
2. En déduire la loi de C.
3. Déterminer une expression simple de l'espérance de C via la formule de transfert.

Exercice 14. Soit $n \geqslant 1$.
Soient $(X_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ des variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$.

Posons pour tout entier naturel $k \in [\![1, n-1]\!]$, $Y_k = X_k X_{k+1}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ et $V_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} Y_k$.

1. Calculer $\mathbb{E}(S_n)$ et $\mathbb{E}(V_n)$.
2. Calculer $V(S_n)$ et $V(V_n)$.

Exercice 15. Un garagiste dispose de deux voitures de location. Il loue les voitures avec une marge brute de 50 euros par jour et par voiture. On note X la variable aléatoire égale au nombre de clients se présentant chaque jour pour louer une voiture. On suppose que

$$X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}, \qquad \mathbb{P}(X = 0) = 0{,}1,\ \mathbb{P}(X = 1) = 0{,}3,\ \mathbb{P}(X = 2) = 0{,}4,\ \mathbb{P}(X = 3) = 0{,}2.$$

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire Y : “nombre de clients satisfaits par jour” (un client étant “satisfait” lorsqu'il a pu obtenir un véhicule de location).
2. Calculer la marge brute moyenne par jour.
3. Mêmes questions lorsque chaque jour, chaque voiture est envoyée à l'atelier pour révision avec probabilité 1/5, indépendamment l'une de l'autre et indépendamment de l'affluence des clients : on pourra considérer que le nombre de voitures disponibles chaque jour suit une loi usuelle que l'on déterminera.

Exercice 16. Les vaches laitières sont atteintes par une maladie non contagieuse M avec la probabilité $p = 0{,}15$. Pour dépister la maladie M dans une étable de n vaches laitières, on fait une analyse de lait. On peut procéder de deux manières différentes :

— **1re méthode :** on effectue une analyse sur un échantillon de lait de chaque vache ;

— **2e méthode :** on effectue une analyse sur un échantillon du mélange des laits des n vaches et, si le résultat est positif, on effectue une analyse pour chaque vache.

Soit X_n le nombre d'analyses réalisées dans la deuxième méthode. On pose $Y_n = \dfrac{X_n}{n}$.

1. Déterminer la loi de Y_n, puis l'espérance mathématique de cette variable, en fonction de n.
2. On voudrait connaître la méthode la plus économique pour le fermier, en fonction du nombre n d'animaux.
   (a) Étudier la fonction $f : x \mapsto ax + \ln x$ où a est un réel strictement négatif. Montrer que, dans le cas où $a = \ln(0{,}85)$, f admet un maximum positif.
   (b) Trouver, dans ce cas, la plus grande valeur entière n_0 pour laquelle $f(n_0) > 0$.
   (c) Montrer que $f(n) > 0 \iff \mathbb{E}(Y_n) < 1$ et en déduire, suivant les valeurs de n, la méthode que l'on a intérêt à adopter.

Exercice 17. On considère n urnes numérotées de 1 à n. La première urne contient des boules blanches et des boules noires ; la proportion des boules blanches est p_1. Les urnes suivantes contiennent chacune a boules blanches et a boules noires.
On effectue n tirages de la manière suivante : on tire une boule de la première urne que l'on place dans la deuxième urne, puis on tire une boule de la deuxième urne que l'on place dans la troisième urne, et ainsi de suite jusqu'au tirage dans la dernière urne.
Pour $1 \leq k \leq n$, on désigne par X_k la variable aléatoire égale à 1 si la boule tirée de la k-ième urne est blanche, et égale à 0 si la boule tirée de la k-ième urne est noire.

1. Déterminer les lois de probabilité de X_1 et X_2, puis leurs espérances mathématiques et leurs variances en fonction de p_1 et de a.
2. Démontrer qu'il existe une valeur de p_1 pour laquelle X_1 et X_2 suivent la même loi de probabilité.
3. Pour cette valeur de p_1, étudier l'indépendance de X_1 et X_2.

Pour $1 \leq k \leq n$, on pose $p_k = \mathbb{P}(X_k = 1)$ et $q_k = \mathbb{P}(X_k = 0)$.

4. Démontrer qu'il existe une matrice M dépendant de a telle que, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, on ait
$$\begin{pmatrix} p_{k+1} \\ q_{k+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} p_k \\ q_k \end{pmatrix}.$$
5. (a) Calculer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (b) En déduire la loi de probabilité de X_n et déterminer $\lim_{n\to+\infty} p_n$ et $\lim_{n\to+\infty} q_n$.

Exercice 18. Une secrétaire effectue n appels téléphoniques vers n correspondants tirés au sort aléatoirement parmi la population (n est un entier et $n \geq 2$).
On admet que les n appels constituent n expériences indépendantes et que, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est p (avec $p \in (0,1)$) et la probabilité de ne pas l'obtenir est q, avec $q = 1 - p$. On note X la variable aléatoire égale au nombre de correspondants obtenus.

1. Calculer l'espérance $\mathbb{E}(X)$ et la variance $\mathbb{V}(X)$.
2. Après ses n recherches, la secrétaire demande une deuxième fois, et dans les mêmes conditions, chacun des $n - X$ correspondants qu'elle n'a pas obtenus la première fois. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de correspondants obtenus dans la deuxième série d'appels, et soit $Z = X + Y$ le nombre total de correspondants obtenus.
   (a) Quelles sont les valeurs prises par Z ?
   (b) Calculer la probabilité $\mathbb{P}(Z = 0)$ et montrer que $\mathbb{P}(Z = 1) = n\,p\,q^{2n-2}(1+q)$.
   (c) Calculer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(Y = j \mid X = i)$, pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ et pour tout $j \in \{0, 1, \ldots, n-i\}$.
   (d) Démontrer que, pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$,
$$\mathbb{P}(Z = k) = \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}\big((X = i) \cap (Y = k - i)\big).$$
   (e) Calculer $\mathbb{P}(Z = k)$ et montrer que Z suit la loi binomiale $\mathcal{B}\big(n, \, p(1+q)\big)$ (vérifier pour cela l'égalité : $\binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i} = \binom{n}{k}\binom{k}{i}$).