Lycée Fénelon — BCPST1

Année 2025–2026 — A. Wassfi

Devoir surveillé de mathématiques n°5

Samedi 7 février 2026 (3h00)

L'énoncé est constitué de quatre exercices et comporte 7 pages. **La page 7 est une annexe à rendre avec la copie.**

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, la précision et la concision de la rédaction. Le soin de la copie ainsi que l'orthographe entreront également pour une part importante dans l'appréciation du travail rendu.

Les résultats doivent être encadrés.

Si un candidat repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Lorsqu'un raisonnement utilise le résultat d'une question précédente, il est demandé au candidat d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.

Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1 : Géométrie

Les parties 1 et 2 de cet exercice sont entièrement indépendantes.

1 Géométrie dans le plan

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère les points $A(0,0)$, $B(1,2)$, $C(4,2)$, $D(3,0)$. La droite Δ passant par le point A et dirigée par le vecteur $\vec{u}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 1\right)$ coupe la droite (BC) en E et la droite (DC) en F. On pourra noter $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

1. Représenter ces points et la droite Δ sur le repère en **annexe** page 7. On donne $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1{,}62$.
2. Démontrer que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.
3. Donner une équation cartésienne des droites (BC) et (DC).
4. Donner un système d'équations paramétriques de la droite Δ.
5. Déterminer les coordonnées cartésiennes des points E et F.
6. On définit le cercle $\mathscr{C}$ d'équation cartésienne $x^2 + y^2 - 5x - 3y + 6 = 0$.
   (a) Déterminer le centre et le rayon du cercle $\mathscr{C}$.
   (b) Montrer que le cercle $\mathscr{C}$ est le cercle circonscrit au triangle BCD (c'est-à-dire le cercle qui passe par les points B, C et D).

2 Géométrie dans l'espace

On rappelle qu'un tétraèdre est un polyèdre de la famille des pyramides composé de quatre faces triangulaires. Un tétraèdre est défini par quatre points non coplanaires formant ses sommets. On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par la formule $\dfrac{Ah}{3}$ où A est l'aire d'une des faces du tétraèdre et h la distance entre cette même face et le sommet opposé à cette face.
On admet que l'aire d'un triangle ABC est donnée par la formule

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{\|\overrightarrow{AB}\|^2\,\|\overrightarrow{AC}\|^2 - \left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)^2}.$$

On munit l'espace d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère les points

$$T(0,0,0), \quad U(1,-1,-2), \quad V(1,2,1).$$

7. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{TU}$ et $\overrightarrow{TV}$. Les points T, U et V sont-ils alignés ?
8. Calculer l'aire du triangle TUV.
9. Déterminer une équation cartésienne du plan (TUV).
10. On considère l'ensemble noté L des points $M(x,y,z)$ de l'espace vérifiant $\overrightarrow{TM}\cdot\overrightarrow{UV} = 0$. Identifier l'ensemble L et donner une équation cartésienne.
11. On note désormais $W(-1,-2,2)$.
    (a) Justifier que les points T, U, V et W ne sont pas coplanaires.
    (b) Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H du point W sur le plan (TUV).
    (c) Calculer la distance du point W au plan (TUV).
    (d) En déduire le volume du tétraèdre $TUVW$.

Exercice 2 : Étude d'une suite homographique

Les parties A et B de cet exercice sont entièrement indépendantes. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I = [0\ ;\ 4]$ par

$$f(x) = \frac{2+3x}{4+x}.$$

Partie A

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 3 \text{ et pour tout entier naturel } \ n,\ u_{n+1} = f(u_n).$$

1. Dans le graphique représenté en **annexe** page 7, où est tracée la courbe représentative de la fonction f, construire les trois premiers termes de la suite (u_n).
2. Soit v une suite réelle et ℓ un réel.
   Donner la définition, avec quantificateurs, de $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$.
3. Calculer u_1 et u_2.
4. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle I.
   En déduire que $f(I) \subset I$ puis que la suite (u_n) est bien définie.
5. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n,
   $$1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 3.$$
6. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer la valeur de sa limite.
7. On pose, pour tout entier $n \geq 0$, $w_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}$.
   (a) Montrer que la suite (w_n) est géométrique et déterminer son expression.
   (b) En déduire l'expression de la suite (u_n) et retrouver la limite obtenue à la question 5.

Partie B

On considère la suite (v_n) définie par :

$$v_0 = 0,1 \text{ et pour tout entier naturel } \ n,\ v_{n+1} = f(v_n).$$

On admet que cette suite est bien définie.

8. Montrer que pour tout entier naturel n,
   $$1 - v_{n+1} = \left(\frac{2}{4+v_n}\right)(1 - v_n).$$
9. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n,
   $$0 \leqslant 1 - v_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$
10. La suite (v_n) converge-t-elle ? Si oui, préciser sa limite en justifiant votre réponse.

Exercice 3 : Étude de matrices

Les matrices introduites dans le préambule sont utilisées dans les parties 2 et 3.

1 Préambule

On considère les matrices

$$M = \begin{pmatrix} -6 & 7 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ -6 & 6 & 4 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On pose également

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer MX_1.
2. Montrer que P est inversible et calculer son inverse.
3. Montrer que la matrice M vérifie l'égalité

$$M = PTP^{-1}$$

4. Montrer que la matrice T définie précédemment est inversible et calculer son inverse.
5. Résoudre les équations suivantes d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$:
   (a) $MX = X_1$;
   (b) $(T - I_3)X = 0$.

2 Etude d'un système différentiel

Soients $x : t \mapsto x(t),\ y : t \mapsto y(t),\ z : t \mapsto z(t)$ trois fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, qui représentent les coordonnées d'un point mobile au cours du temps.

On pose $X = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ et on admet que X suit l'équation différentielle $(E) : X' = TX$.

6. Écrire l'équation différentielle (E) sous la forme d'un système différentiel.
7. Résoudre ce système différentiel.

3 Etude de suites de matrices

8. Montrer que, pour tout entier naturel n,

$$M^n = PT^nP^{-1}.$$

9. Montrer que, pour tout entier naturel n,

$$T^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

10. On définit les suites de matrices $(A_n)_{n\geq 0}$ et $(B_n)_{n\geq 0}$ par

$$A_n = \left(-\frac{M}{2}\right)^n \quad \text{et} \quad B_n = \left(-\frac{T}{2}\right)^n \quad \text{pour tout } n \geq 0.$$

(a) Montrer que la suite $(B_n)_{n\geq 0}$ admet une limite B que l'on déterminera.
(b) Montrer que, pour tout entier $n \geq 0$, la matrice B_n est inversible et en déduire son rang.
(c) On note $\operatorname{rg} B$ le rang de la matrice B. A-t-on $\operatorname{rg} B = \lim_{n\to\infty} \operatorname{rg} B_n$?
(d) Montrer que $A_n = PB_nP^{-1}$ pour tout entier $n \geq 0$.
(e) En déduire la limite de la suite $(A_n)_{n\geq 0}$.

Exercice 4 : Étude asymptotique d'une suite

On considère la suite de nombres réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + u_n^2, \\ u_0 = a, \qquad a \in \mathbb{R}_+^*. \end{cases}$$

1 Convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

1. Montrer que cette suite est strictement positive et monotone.
2. Montrer que cette suite diverge vers l'infini.

2 Comportement asymptotique de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$v_n = \frac{1}{2^n}\ln u_n.$$

3. Prouver que pour tout entier n de $\mathbb{N}$:

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2^{n+1}}\ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right).$$

En déduire que quels que soient les entiers naturels p et n :

$$0 < v_{n+p+1} - v_{n+p} \leq \frac{1}{2^{n+p+1}}\ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right).$$

4. En considérant la somme $\displaystyle\sum_{p=0}^{k} v_{n+p+1} - v_{n+p}$, montrer que quels que soient les entiers naturels k et n :

$$0 < v_{n+k+1} - v_n \leq \frac{1}{2^n}\ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) \qquad (*)$$

5. Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, puis qu'elle converge vers une limite notée α.
6. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq \exp(\alpha 2^n).$$

En passant à la limite pour n fixé dans l'encadrement $(*)$, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exp(\alpha 2^n) \leq u_n + 1.$$

En déduire, lorsque n tend vers l'infini, l'équivalent suivant :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \exp(\alpha 2^n).$$

7. On pose :

$$\beta_n = \exp(\alpha 2^n) - u_n.$$

Montrer que la suite $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et qu'elle vérifie la relation suivante :

$$2\beta_n - 1 = \left(\beta_{n+1} + \beta_n^2 - \beta_n\right)\exp(-\alpha 2^n).$$

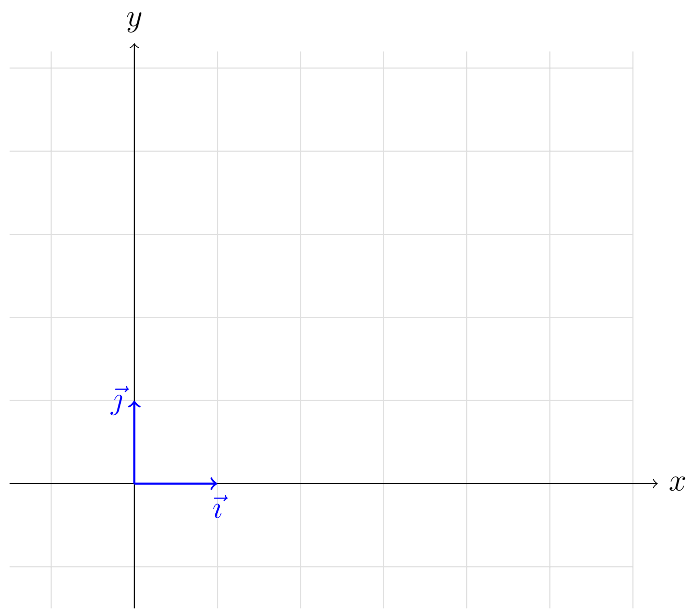
8. Prouver enfin que

$$\beta_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}.$$

Nom et Prénom : ....

Annexe : à rendre avec la copie

Exercice 1 : question 1



Exercice 2 : question 1