Corrigé du Devoir surveillé de mathématiques n°5
Samedi 7 février 2026 (3h00)

Exercice 1 : Géométrie

Les parties 1 et 2 de cet exercice sont entièrement indépendantes.

1 Géométrie dans le plan

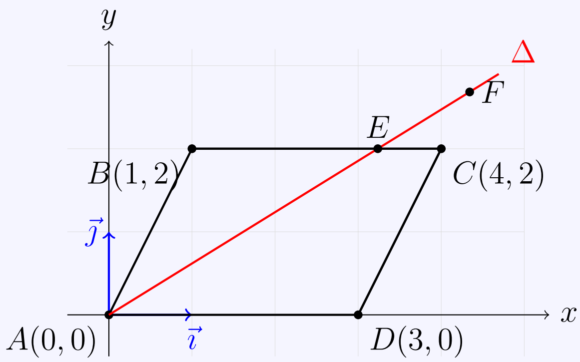
Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère les points

$$A(0,0), \quad B(1,2), \quad C(4,2), \quad D(3,0).$$

La droite Δ passant par le point A et dirigée par le vecteur $\vec{u}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 1\right)$ coupe la droite (BC) en E et la droite (DC) en F. On pose $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

1. Représenter ces points et la droite Δ sur le repère en **annexe** page 7. On donne $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1{,}62$.

On place les points $A(0,0)$, $B(1,2)$, $C(4,2)$ et $D(3,0)$ dans le repère orthonormé. (On trace éventuellement le quadrilatère $ABCD$ et la droite Δ passant par A de vecteur directeur $\vec{u}(\varphi, 1)$ avec $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.)



2. Démontrer que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

On calcule :

$$\overrightarrow{AB} = (1-0,\ 2-0) = (1,2), \qquad \overrightarrow{DC} = (4-3,\ 2-0) = (1,2),$$

donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Ainsi, $ABCD$ est un parallélogramme.

3. Donner une équation cartésienne des droites (BC) et (DC).

La droite (BC) passe par $B(1,2)$ et $C(4,2)$: elle est horizontale, donc

$$(BC) : \ y = 2 \iff y - 2 = 0.$$

La droite (DC) passe par $D(3,0)$ et $C(4,2)$, donc sa pente vaut $\dfrac{2-0}{4-3} = 2$:

$$(DC) :\ y = 2(x-3) = 2x - 6 \quad \Longleftrightarrow \quad 2x - y - 6 = 0.$$

4. Donner un système d'équations paramétriques de la droite Δ.

Δ passe par $A(0,0)$ et a pour vecteur directeur $(\varphi, 1)$, donc

$$\Delta : \begin{cases} x = \varphi t, \\ y = t, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

5. Déterminer les coordonnées cartésiennes des points E et F.

Pour $E = \Delta \cap (BC)$, on impose $y = 2$ dans les équations de Δ : $t = 2$, donc

$$E(2\varphi,\, 2) = (1+\sqrt{5},\, 2).$$

Pour $F = \Delta \cap (DC)$, on impose $y = 2x - 6$. Avec $(x,y) = (\varphi t, t)$:

$$t = 2\varphi t - 6 \iff t(2\varphi - 1) = 6 \iff t = \frac{6}{\sqrt{5}}.$$

Ainsi

$$F\Big(\varphi \frac{6}{\sqrt{5}},\, \frac{6}{\sqrt{5}}\Big) = \Big(\frac{3(1+\sqrt{5})}{\sqrt{5}},\, \frac{6}{\sqrt{5}}\Big) = \Big(3 + \frac{3\sqrt{5}}{5},\, \frac{6\sqrt{5}}{5}\Big).$$

6. On définit le cercle $\mathscr{C}$ d'équation cartésienne $x^2 + y^2 - 5x - 3y + 6 = 0$.
   (a) Déterminer le centre et le rayon du cercle $\mathscr{C}$.

On complète les carrés :

$$x^2 - 5x = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}, \qquad y^2 - 3y = \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}.$$

Donc

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25+9}{4} - 6 = \frac{34}{4} - \frac{24}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}.$$

Le centre Ω et le rayon r sont donc données par :

$$\Omega\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right) \quad \text{et} \quad r = \sqrt{\frac{5}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

   (b) Montrer que le cercle $\mathscr{C}$ est le cercle circonscrit au triangle BCD.

Vérifions que les B, C, D appartiennent à $\mathscr{C}$ en substituant leurs coordonnées dans l'équation du cercle $\mathscr{C}$:

$$\begin{aligned} B(1,2) &: 1 + 4 - 5 - 6 + 6 = 0, \\ C(4,2) &: 16 + 4 - 20 - 6 + 6 = 0, \\ D(3,0) &: 9 + 0 - 15 - 0 + 6 = 0. \end{aligned}$$

Ainsi $\mathscr{C}$ passe par B, C, D : c'est bien le cercle circonscrit à BCD.

2 Géométrie dans l'espace

On munit l'espace d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère les points

$$T(0,0,0), \quad U(1,-1,-2), \quad V(1,2,1).$$

On rappelle que le volume d'un tétraèdre vaut $\dfrac{A\,h}{3}$ où A est l'aire d'une face et h la hauteur correspondante.

7. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{TU}$ et $\overrightarrow{UV}$. Les points T, U et V sont-ils alignés ?

$$\overrightarrow{TU} = (1,-1,-2), \qquad \overrightarrow{TV} = (1,2,1)$$

Ces vecteurs ne sont pas colinéaires (car $\frac{1}{1} \neq \frac{-1}{2}$), donc T, U, V ne sont pas alignés.

8. Calculer l'aire du triangle TUV.

Comme $\overrightarrow{TU} = (1,-1,-2)$, $\overrightarrow{TV} = (1,2,1)$, on a :

$$\|\overrightarrow{TU}\|^2 = 1^2 + (-1)^2 + (-2)^2 = 6, \qquad \|\overrightarrow{TV}\|^2 = 1^2 + 2^2 + 1^2 = 6$$

$$\overrightarrow{TU} \cdot \overrightarrow{TV} = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + (-2) \cdot 1 = -3.$$

Donc l'aire du triangle TUV vaut

$$\mathcal{A}_{TUV} = \frac{1}{2}\sqrt{\|\overrightarrow{TU}\|^2 \, \|\overrightarrow{TV}\|^2 - \left(\overrightarrow{TU} \cdot \overrightarrow{TV}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{6 \cdot 6 - (-3)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{27} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

9. Déterminer une équation cartésienne du plan (TUV).

Une équation du plan (TUV) est de la forme

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Comme $T(0,0,0) \in (TUV)$, on a immédiatement $d = 0$. Donc le plan s'écrit

$$ax + by + cz = 0,$$

et $\vec{n} = (a,b,c)$ est un vecteur normal au plan.
Or $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan, par exemple

$$\overrightarrow{TU} = (1,-1,-2), \qquad \overrightarrow{TV} = (1,2,1).$$

Donc

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{TU} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{n} \cdot \overrightarrow{TV} = 0,$$

ce qui donne le système

$$\begin{cases} a \cdot 1 + b \cdot (-1) + c \cdot (-2) = 0, \\ a \cdot 1 + b \cdot 2 + c \cdot 1 = 0. \end{cases}$$

Soit

$$\begin{cases} a - b - 2c = 0, \\ a + 2b + c = 0. \end{cases}$$

En soustrayant la première équation de la deuxième :

$$(a + 2b + c) - (a - b - 2c) = 0 \implies 3b + 3c = 0 \implies b = -c.$$

Puis, dans $a - b - 2c = 0$:

$$a - (-c) - 2c = 0 \implies a - c = 0 \implies a = c.$$

On peut choisir $c = 1$, d'où

$$(a, b, c) = (1, -1, 1).$$

Ainsi une équation cartésienne du plan (TUV) est

$$\boxed{x - y + z = 0.}$$

10. On considère l'ensemble noté L des points $M(x, y, z)$ de l'espace vérifiant $\overrightarrow{TM} \cdot \overrightarrow{UV} = 0$. Identifier l'ensemble L et donner une équation cartésienne.

On a $\overrightarrow{TM} = (x, y, z)$ (car T est l'origine) et $\overrightarrow{UV} = (0, 3, 3)$. La condition $\overrightarrow{TM} \cdot \overrightarrow{UV} = 0$ devient

$$0 \cdot x + 3y + 3z = 0 \quad \iff \quad y + z = 0.$$

Ainsi, L est un plan passant par T (donc par l'origine), de vecteur normal $\overrightarrow{UV}$:

$$L : \ y + z = 0.$$

11. On note désormais $W(-1, -2, 2)$.

(a) Justifier que les points T, U, V et W ne sont pas coplanaires.

Les points T, U, V définissent le plan (TUV) d'équation $x - y + z = 0$. On calcule pour $W(-1, -2, 2)$:

$$-1 - (-2) + 2 = 3 \neq 0,$$

donc $W \notin (TUV)$. Ainsi T, U, V, W ne sont pas coplanaires.

(b) Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H du point W sur le plan (TUV).

Le plan (TUV) a pour équation $x - y + z = 0$ et pour vecteur normal $\vec{n} = (1, -1, 1)$. La droite passant par W et dirigée par $\vec{n}$ est perpendiculaire au plan :

$$\mathcal{D} : \quad (x, y, z) = (-1, -2, 2) + t(1, -1, 1) \quad t \in \mathbb{R}$$

soit

$$x = -1 + t, \qquad y = -2 - t, \qquad z = 2 + t.$$

Le point $H = \mathcal{D} \cap (TUV)$ vérifie l'équation du plan :

$$x - y + z = 0 \implies (-1 + t) - (-2 - t) + (2 + t) = 0.$$

On obtient

$$-1 + t + 2 + t + 2 + t = 0 \implies 3 + 3t = 0 \implies t = -1.$$

Donc

$$H = (-1, -2, 2) + (-1)(1, -1, 1) = (-2, -1, 1).$$

(c) Calculer la distance du point W au plan (TUV).

On a $\overrightarrow{WH} = (-2+1,\ -1+2,\ 1-2) = (-1,\ 1,\ 1)$
La distance cherchée est alors

$$d\big(W, (TUV)\big) = \|\overrightarrow{WH}\| = \|(-1, 1, -1)\| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}.$$

soit

$$\boxed{d\big(W, (TUV)\big) = \sqrt{3}.}$$

(d) En déduire le volume du tétraèdre $TUVW$.

On prend pour base le triangle TUV dans le plan (TUV).
La hauteur issue de W sur le plan (TUV) vaut $h = \sqrt{3}$. Donc le volume est

$$\boxed{\mathcal{V} = \frac{\mathcal{A}_{TUV}\, h}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{3}{2}.}$$

Exercice 2 : Étude d'une suite homographique

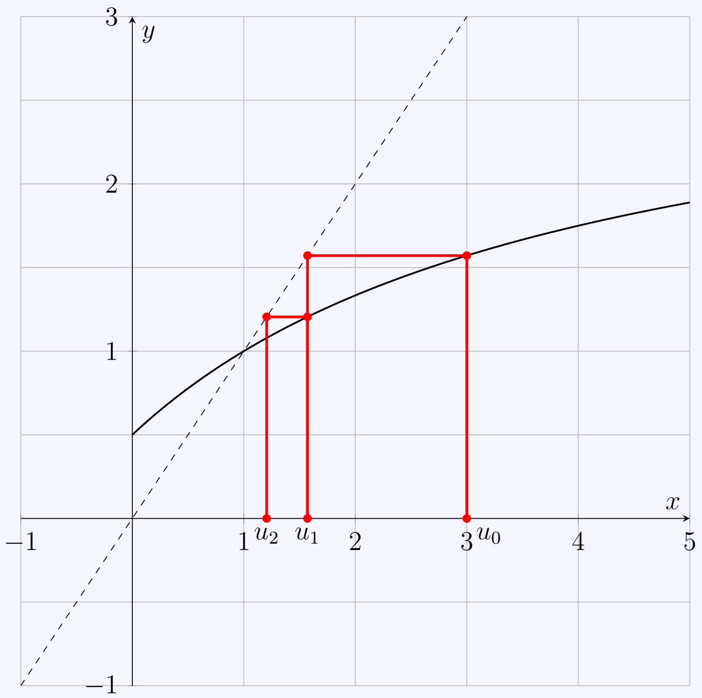
Les parties A et B de cet exercice sont entièrement indépendantes. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I = [0\ ;\ 4]$ par

$$f(x) = \frac{2+3x}{4+x}.$$

Partie A
On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 3 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = f\left(u_n\right).$$

1. Dans le graphique représenté en **annexe** page 7, représenter les trois premiers termes de la suite (u_n).



2. Soit v une suite réelle et ℓ un réel.
Donner la définition, avec quantificateurs, de $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - l| \leq \varepsilon$.

3. Calculer u_1 et u_2.

$u_1 = f(u_0) = \dfrac{2+9}{4+3} = \dfrac{11}{7}$ et $u_2 = f(u_1) = \dfrac{2+3\times\frac{11}{7}}{4+\frac{11}{7}} = \dfrac{\frac{47}{7}}{\frac{39}{7}} = \dfrac{47}{39}$

4. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle I. En déduire que $f(I) \subset I$ puis que la suite (u_n) est bien définie.

La fonction f est définie et dérivable sur $[0;4]$ et pour tout $x \in [0;4]$:

$$f'(x) = \frac{3(4+x)-1(2+3x)}{(4+x)^2} = \frac{12+3x-2-3x}{(4+x)^2} = \frac{10}{(4+x)^2}$$

Quotient de nombres strictement positifs, ce nombre dérivé est strictement positif quel que soit x dans l'intervalle $[0;4]$. La fonction f est donc strictement croissante sur $[0;4]$.

x	0		4
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{7}{4}$

Par continuité de f, on a $f(I) = [\frac{1}{2}; \frac{7}{4}] \subset I$.
Comme $f(I) \subset I$, une récurrence immédiate permet de montrer que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$ donc la suite (u_n) est bien définie.

5. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n,

$$1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 3.$$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n) : 1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 3$.

- Initialisation : $1 \leq u_1 \leq u_0 \leq 3$ donc la propriété P_0 est vérifiée.
- Hérédité. Supposons la propriété P_n vraie pour une valeur de n quelconque.

  (HR) : $1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 3$
  La fonction f est croissante sur $[0;4]$ donc :

  $$f(1) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \leq f(3)$$

  Or $f(1) = \dfrac{5}{3}$ et $f(3) = \dfrac{11}{7} \leq 3$.
  Il vient alors :

  $$1 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 3$$

  La propriété est donc alors vérifiée au rang $n+1$.
- Conclusion : la propriété est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang n elle est vraie au rang $n+1$: d'après la propriété de récurrence on en déduit que pour tout entier naturel n, $1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 3$.

6. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer la valeur de sa limite.

D'après la question précédente la suite (u_n) est décroissante et minorée par 1. D'après le théorème de la limite monotone, elle converge vers une limite $\ell \geq 1$ (car $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n$). De plus, ℓ est nécessairement un point fixe de f donc :

$$\begin{aligned} \ell = \frac{2+3\ell}{4+\ell} &\iff \ell(4+\ell) = 2+3\ell \\ &\iff \ell^2 + \ell - 2 = 0 \end{aligned}$$

De plus, $\Delta = 1^2 - 4 \times (-2) = 9 > 0$. Il y a donc deux solutions :
$\ell_1 = \dfrac{-1-3}{2} = -2$ et $\ell_2 = \dfrac{-1+3}{2} = 1$.
Comme $\ell \in [1;3]$, la seule solution est $\ell_2 = 1$.

7. On pose, pour tout entier $n \geq 0$, $w_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}$.

   (a) Montrer que la suite (w_n) est géométrique et déterminer son expression.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$u_{n+1} = f(u_n) = \frac{2+3u_n}{4+u_n}.$$

Alors

$$u_{n+1} - 1 = \frac{2+3u_n}{4+u_n} - 1 = \frac{2+3u_n - (4+u_n)}{4+u_n} = \frac{2(u_n-1)}{u_n+4},$$

et

$$u_{n+1} + 2 = \frac{2+3u_n}{4+u_n} + 2 = \frac{2+3u_n+2(4+u_n)}{4+u_n} = \frac{5(u_n+2)}{u_n+4}.$$

Donc

$$w_{n+1} = \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+2} = \frac{\dfrac{2(u_n-1)}{u_n+4}}{\dfrac{5(u_n+2)}{u_n+4}} = \frac{2}{5}\,\frac{u_n-1}{u_n+2} = \frac{2}{5}\,w_n.$$

La suite (w_n) est donc géométrique de raison $q = \dfrac{2}{5}$ et

$$w_0 = \frac{u_0-1}{u_0+2} = \frac{3-1}{3+2} = \frac{2}{5}.$$

Ainsi, pour tout $n \geq 0$,

$$w_n = w_0 \left(\frac{2}{5}\right)^n = \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}.$$

   (b) En déduire l'expression de la suite (u_n) et retrouver la limite obtenue à la question 5.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On part de

$$w_n = \frac{u_n-1}{u_n+2}.$$

On exprime u_n en fonction de w_n :

$$w_n(u_n+2) = u_n - 1 \iff w_n u_n + 2w_n = u_n - 1 \iff u_n(w_n - 1) = -(1+2w_n)$$

d'où

$$u_n = \frac{1+2w_n}{1-w_n}.$$

Avec $w_n = \left(\dfrac{2}{5}\right)^{n+1}$, on obtient

$$u_n = \frac{1+2\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}} \quad (n \geq 0).$$

Comme $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ car $|\frac{2}{5}| < 1$, on en déduit

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1+0}{1-0} = 1,$$

ce qui permet de retrouver la limite demandée.

Partie B

On considère la suite (v_n) définie par :

$$v_0 = 0,1 \text{ et pour tout entier naturel } \; n,\; v_{n+1} = f\left(v_n\right).$$

On admet que cette suite est bien définie.

8. Montrer que pour tout entier naturel n,

$$1 - v_{n+1} = \left(\frac{2}{4+v_n}\right)\left(1-v_n\right).$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$1 - v_{n+1} = 1 - \frac{2+3v_n}{4+v_n} = \frac{4+v_n-2-3v_n}{4+v_n} = \frac{2-2v_n}{4+v_n} = \left(\frac{2}{4+v_n}\right)\left(1-v_n\right).$$

9. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n,

$$0 \leqslant 1 - v_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

On pose pour tout entier naturel n

$$P(n) : 0 \leqslant 1 - v_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

- Initialisation : $1 - v_0 = 0,9$. On a bien $0 \leq 1 - v_0 \leq 1$ donc la propriété $P(0)$ est vérifiée.
- Hérédité. Supposons la propriété $P(n)$ vraie pour une valeur de n quelconque.

  (HR) : $0 \leqslant 1 - v_n \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

  Comme $1 - v_n \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$, on en déduit que $v_n \geqslant 1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \geqslant 0$

  D'après la question précédente, on a $1 - v_{n+1} = \left(\dfrac{2}{4+v_n}\right)(1-v_n)$ donc d'après l'hypothèse de récurrence (en multipliant par $\dfrac{2}{4+v_n} \geq 0$) :

$0 \leqslant 1 - v_{n+1} \leqslant \left(\dfrac{2}{4+v_n}\right)\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

Comme $0 \leqslant v_n$, il vient $\dfrac{2}{4+v_n} \leqslant \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$. D'où

$$0 \leqslant 1 - v_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

soit

$$0 \leqslant 1 - v_{n+1} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

La propriété est donc alors vérifiée au rang $n+1$.

- Conclusion : la propriété est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang n elle est vraie au rang $n+1$: d'après la propriété de récurrence on en déduit que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant 1 - v_n \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

10. La suite (v_n) converge-t-elle ? Si oui, préciser sa limite en justifiant votre réponse.

On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$ (car $-1 < \dfrac{1}{2} < 1$).

On en déduit d'après le théorème des gendarmes que $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - v_n = 0$.

Ainsi $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1.}$

Exercice 3 : Étude de matrices

Les matrices introduites dans le préambule sont utilisées dans les parties 2 et 3.

1 Préambule

On considère les matrices

$$M = \begin{pmatrix} -6 & 7 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ -6 & 6 & 4 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On pose également

$$\mathrm{Id}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer MX_1.

$$MX_1 = \begin{pmatrix} -6 & 7 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ -6 & 6 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6+7 \\ -1+2 \\ -6+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = X_1.$$

2. Montrer que P est inversible et calculer son inverse.

Méthode 1 : inversion du système

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad PX = A, \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

$$PX = A \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x + y + z = a \\ y = b \\ x + 2z = c \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{cases} x + z = a - b \\ x + 2z = c \\ y = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = a - b \\ (x + 2z) - (x + z) = c - (a - b) \\ y = b \end{cases}$$

Ainsi,

$$\begin{cases} x + z = a - b \\ z = b + c - a \\ y = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a - b - (b + c - a) = 2a - 2b - c \\ y = b \\ z = b + c - a \end{cases}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a - 2b - c \\ b \\ b + c - a \end{pmatrix}}$$

$$X = P^{-1}A \implies P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Méthode 2 : algorithme de Gauss-Jordan

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_3}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Ainsi :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Montrer que la matrice M s'écrit
$$M = PTP^{-1}.$$

On calcule d'abord PT :

$$PT = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$PTP^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 7 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ -6 & 6 & 4 \end{pmatrix} = M.$$

4. Montrer que la matrice T définie précédemment est inversible et calculer son inverse.

On résout le système $TX = A$ où

$$T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

$$TX = A \iff \begin{cases} -2x = a \\ y + z = b \\ z = c \end{cases} \iff \begin{cases} -2x = a \\ y + z = b \\ z = c \end{cases} \underset{z=c}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -2x = a \\ y + c = b \\ z = c \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x = a \\ y + c = b \\ z = c \end{cases} \underset{y=b-c}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -2x = a \\ y = b - c \\ z = c \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x = a \\ y = b - c \\ z = c \end{cases} \underset{x=-\frac{a}{2}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x = -\frac{a}{2} \\ y = b - c \\ z = c \end{cases}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{a}{2} \\ b - c \\ c \end{pmatrix}} \qquad \text{donc T est inversible et} \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Résoudre les équations suivantes d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$:
   (a) $MX = X_1$;

Méthode 1 :
Comme M est inversible, cette équation a une unique solution (on a un système de Cramer) et on a prouvé dans la question 1 que X_1 était une solution de cette équation donc $X = X_1$ est l'unique solution.
Méthode 2 :
Comme M est inversible, la solution est unique et on a :

$$MX = X_1 \iff X = M^{-1}X_1 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = X_1$$

Ainsi $X = X_1$ est l'unique solution et l'ensemble solution est

$$\boxed{S = \{X_1\}.}$$

(b) $(T - I_3)X = 0$.

$$(T-I_3)X = 0 \iff T = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc $(T-I_3)X = 0 \iff \begin{cases} -3x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

L'ensemble solution de cette équation est donc

$$\boxed{S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R} \right\}}$$

2 Etude d'un système différentiel

Soient $x : t \mapsto x(t)$, $y : t \mapsto y(t)$, $z : t \mapsto z(t)$ trois fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, qui représentent les coordonnées d'un point mobile au cours du temps.

On pose $X = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ et on admet que X suit l'équation différentielle (E) : $X' = TX$.

6. Écrire l'équation différentielle (E) sous la forme d'un système différentiel.

On calcule

$$TX = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x \\ y+z \\ z \end{pmatrix}.$$

Ainsi (E) équivaut au système

$$\boxed{\begin{cases} x'(t) = -2x(t), \\ y'(t) = y(t) + z(t), \\ z'(t) = z(t). \end{cases}}$$

7. Résoudre ce système différentiel.

Résolution du système.

- De $x'(t) = -2x(t)$, on obtient

$$\boxed{x(t) = \lambda e^{-2t}}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

- De $z'(t) = z(t)$, on obtient

$$\boxed{z(t) = \gamma e^{t}}, \qquad \gamma \in \mathbb{R}.$$

- Puis $y'(t) = y(t) + z(t)$ devient

$$y'(t) - y(t) = \gamma e^t.$$

La solution de l'équation homogène $y' - y = 0$ est $y_h(t) = \mu e^t$. On cherche alors une solution particulière sous la forme

$$y(t) = u(t)e^t \quad \text{(méthode de variation de la constante).}$$

Alors $y'(t) = u'(t)e^t + u(t)e^t$, et en substituant dans $y' - y = \gamma e^t$, on obtient

$$u'(t)e^t = \gamma e^t \quad \Longrightarrow \quad u'(t) = \gamma \quad \Longrightarrow \quad u(t) = \gamma t + \mu.$$

Donc

$$\boxed{y(t) = (\mu + \gamma t)e^t}, \qquad \mu \in \mathbb{R}.$$

Finalement, la solution générale du système est

$$\boxed{X(t) = \begin{pmatrix} \lambda e^{-2t} \\ (\mu + \gamma t)e^t \\ \gamma e^t \end{pmatrix} \qquad (\lambda, \mu, \gamma \in \mathbb{R}).}$$

3 Etude de suites de matrices

8. Montrer que, pour tout entier naturel n,

$$M^n = PT^nP^{-1}.$$

Pour $n = 0$, $M^0 = I_3$ et $PT^0P^{-1} = PI_3P^{-1} = PP^{-1} = I_3$ donc $M^0 = PT^0P^{-1}$.
Pour $n \geq 1$, on écrit la puissance comme un produit de n facteurs :

$$M^n = \underbrace{M\,M \cdots M}_{n \text{ facteurs}} = \underbrace{(PTP^{-1})(PTP^{-1}) \cdots (PTP^{-1})}_{n \text{ facteurs}}.$$

En développant ce produit et en utilisant l'associativité du produit matriciel, on obtient

$$(PTP^{-1})(PTP^{-1}) \cdots (PTP^{-1}) = P\,T\,(P^{-1}P)\,T\,(P^{-1}P) \cdots T\,P^{-1} = P\,T^n\,P^{-1},$$

car $P^{-1}P = I_3$.
Ainsi

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = PT^nP^{-1}.}$$

Une récurrence aurait également très bien fonctionnée.

9. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geq 0$

$$T^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On décompose T sous la forme

$$T = D + N \quad \text{avec} \quad D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On vérifie :

$$N^2 = 0 \quad \text{et} \quad DN = ND = N \qquad (\text{donc } D \text{ et } N \text{ commutent}).$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme D et N commutent, on peut appliquer le binôme de Newton :

$$T^n = (D + N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

Or $N^2 = 0$, donc seuls les termes $k = 0$ et $k = 1$ subsistent :

$$T^n = D^n + nD^{n-1}N.$$

On a

$$D^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D^{n-1}N = N,$$

d'où

$$T^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$

Une récurrence aurait très bien fonctionnée.

10. On définit les suites de matrices $(A_n)_{n\geq 0}$ et $(B_n)_{n\geq 0}$ par

$$A_n = \left(-\frac{M}{2}\right)^n \quad \text{et} \quad B_n = \left(-\frac{T}{2}\right)^n \quad \text{pour tout } n \geq 0.$$

(a) Montrer que la suite $(B_n)_{n\geq 0}$ admet une limite B que l'on déterminera.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a d'après la question précédente :

$$\left(-\frac{T}{2}\right)^n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n T^n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$B_n = \left(-\frac{T}{2}\right)^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n & n\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 0 & 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}.$$

Comme $\left(-\frac{1}{2}\right)^n \to 0$ (car $|-\frac{1}{2}| < 1$) et $n\left(-\frac{1}{2}\right)^n \to 0$ (par croissance comparée), on obtient

$$B_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Montrer que, pour tout entier naturel $n \geq 0$, la matrice B_n est inversible et en déduire son rang.

La matrice T est inversible donc la matrice T^n est aussi inversible (car toute puissance d'une matrice inversible est inversible), donc $B_n = \left(-\frac{T}{2}\right)^n$ est inversible pour tout n (toute matrice inversible multipliée par un nombre non nul est inversible). Ainsi

$$\text{rg}(B_n) = 3 \quad \text{pour tout } n.$$

(c) On note $\text{rg}\, B$ le rang de la matrice B. A-t-on $\text{rg}\, B = \lim\limits_{n\to+\infty} \text{rg}\, B_n$?

On a $\text{rg}(B_n) = 3$ pour tout n, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \text{rg}(B_n) = 3$. Or

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \text{rg}(B) = 1.$$

On a donc :

$$\mathrm{rg}(B) \neq \lim_{n\to\infty} \mathrm{rg}(B_n).$$

La limite du rang d'une suite de matrices n'est pas égale au rang de la limite de la suite de matrices.

(d) Montrer que $A_n = PB_nP^{-1}$ pour tout entier $n \geq 0$.

Comme $M = PTP^{-1}$, on a

$$-\frac{M}{2} = P\left(-\frac{T}{2}\right)P^{-1}.$$

En élevant à la puissance n :

$$A_n = \left(-\frac{M}{2}\right)^n = \left(P\left(-\frac{T}{2}\right)P^{-1}\right)^n = P\left(-\frac{T}{2}\right)^n P^{-1} = PB_nP^{-1}.$$

(e) En déduire la limite de la suite $(A_n)_{n\geq 0}$.

Comme $B_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} B$ et $A_n = PB_nP^{-1}$, on obtient par continuité :

$$A_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} A = PBP^{-1}.$$

Comme $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, un calcul direct donne

$$A = PBP^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 : Étude d'une suite

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + u_n^2, \\ u_0 = a, \qquad a \in \mathbb{R}_+^*. \end{cases}$$

1 Convergence de (u_n)

1. Montrer que cette suite est strictement positive et monotone.

- **Positivité.** Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n > 0$.
  Initialisation : $u_0 = a > 0$.
  Hérédité : supposons $u_n > 0$. Alors $1 + u_n > 1 > 0$ et

  $$u_{n+1} = u_n + u_n^2 = u_n(1 + u_n) > 0.$$

  Ainsi, par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$.
- **Monotonie.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

  $$u_{n+1} - u_n = (u_n + u_n^2) - u_n = u_n^2.$$

Or, comme $u_n > 0$, on a $u_n^2 > 0$, donc $u_{n+1} - u_n > 0$ pour tout n. Ainsi, la suite (u_n) est strictement croissante (et donc monotone).

2. Montrer que cette suite diverge vers l'infini.

Par l'absurde, si (u_n) était majorée, elle convergerait vers une limite $\ell \geq 0$. En passant à la limite dans $u_{n+1} = u_n + u_n^2$, on obtient $\ell = \ell + \ell^2$, donc $\ell^2 = 0$ et $\ell = 0$. Mais $u_n \geq u_0 = a > 0$, on obtient donc une contradiction. Donc (u_n) n'est pas majorée.
Ainsi, la suite (u_n) est strictement croissante et n'est pas majorée, (u_n) diverge donc vers $+\infty$ en $+\infty$, d'où $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.}$

2 Comportement asymptotique

On définit

$$v_n = \frac{1}{2^n} \ln u_n.$$

3. Prouver que pour tout entier n :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2^{n+1}} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right).$$

En déduire que quels que soient les entiers naturels p et n :

$$0 < v_{n+p+1} - v_{n+p} \leq \frac{1}{2^{n+p+1}} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right).$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $u_{n+1} = u_n + u_n^2 = u_n^2\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)$, donc, en appliquant la fonction ln ($u_n > 0$) :

$$\ln u_{n+1} = 2 \ln u_n + \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right).$$

En divisant par 2^{n+1}, on obtient :

$$v_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}} \ln u_{n+1} = \frac{1}{2^n} \ln u_n + \frac{1}{2^{n+1}} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) = v_n + \frac{1}{2^{n+1}} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right).$$

Donc

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2^{n+1}} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) > 0.$$

Par ailleurs, (u_n) est croissante, donc pour tout entier naturel p, $u_{n+p} \geq u_n$ et ainsi $\ln\left(1 + \frac{1}{u_{n+p}}\right) \leq \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)$. On en déduit

$$0 < v_{n+p+1} - v_{n+p} = \frac{1}{2^{n+p+1}} \ln\left(1 + \frac{1}{u_{n+p}}\right) \leq \frac{1}{2^{n+p+1}} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right).$$

soit

$$\boxed{0 < v_{n+p+1} - v_{n+p} \leq \frac{1}{2^{n+p+1}} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right).}$$

4. En considérant la somme $\displaystyle\sum_{p=0}^{k} v_{n+p+1} - v_{n+p}$, montrer que quels que soient les entiers naturels k et n :
$$0 < v_{n+k+1} - v_n \leq \frac{1}{2^n} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right). \tag{$*$}$$

Soient k et n des entiers naturels. Par télescopage :
$$v_{n+k+1} - v_n = \sum_{p=0}^{k} \big(v_{n+p+1} - v_{n+p}\big).$$
En utilisant l'inégalité de la question précédente :
$$0 < v_{n+k+1} - v_n \leq \sum_{p=0}^{k} \frac{1}{2^{n+p+1}} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) \sum_{p=0}^{k} \frac{1}{2^{n+p+1}}.$$
Or $\displaystyle\sum_{p=0}^{k} \frac{1}{2^{n+p+1}} = \frac{1}{2^n}\left(1 - \frac{1}{2^{k+1}}\right) \leq \frac{1}{2^n}$, d'où $\boxed{0 < v_{n+k+1} - v_n \leq \frac{1}{2^n} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right).}$

5. Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, puis qu'elle converge vers une limite notée α.

On sait que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2^{n+1}} \ln\big(1 + \frac{1}{u_n}\big) > 0$, donc (v_n) est croissante. On applique la relation $(*)$ avec $n = 0$:
$$0 < v_{k+1} - v_0 \leq \ln\left(1 + \frac{1}{u_0}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{a}\right).$$
Donc $v_{k+1} \leq v_0 + \ln\big(1 + \frac{1}{a}\big) = \ln(1 + a)$: donc la suite (v_n) est majorée.
Ainsi, (v_n) est une suite croissante et majorée donc elle converge en vertu du théorème de la limite monotone. On note α sa limite.

6. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq \exp(\alpha 2^n).$$
En passant à la limite pour n fixé dans l'encadrement $(*)$, montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exp(\alpha 2^n) \leq u_n + 1.$$
En déduire, lorsque n tend vers l'infini, l'équivalent suivant :
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \exp(\alpha 2^n).$$

Soit n un entier naturel. Comme (v_n) est croissante et $v_n \to \alpha$, on a $v_n \leq \alpha$ et donc
$$\ln u_n = 2^n v_n \leq 2^n \alpha \quad \Rightarrow \quad u_n \leq e^{\alpha 2^n}.$$
Fixons n et faisons tendre $k \to +\infty$ dans la relation $(*)$:
$$0 < \alpha - v_n \leq \frac{1}{2^n} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right).$$
On multiplie par 2^n :
$$2^n\alpha - \ln u_n \leq \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) = \ln(u_n + 1) - \ln u_n,$$

donc $2^n\alpha \leq \ln(u_n+1)$, soit
$$e^{\alpha 2^n} \leq u_n + 1.$$
On a donc, pour tout n,
$$u_n \leq e^{\alpha 2^n} \leq u_n + 1.$$
En divisant par $e^{\alpha 2^n}$ et en utilisant $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, on obtient
$$\frac{u_n}{e^{\alpha 2^n}} \leq 1 \leq \frac{u_n+1}{e^{\alpha 2^n}} = \frac{u_n}{e^{\alpha 2^n}}\left(1+\frac{1}{u_n}\right),$$
donc $\dfrac{u_n}{e^{\alpha 2^n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ d'après le théorème des gendarmes. Ainsi
$$\boxed{u_n \sim e^{\alpha 2^n}.}$$
Cela implique en particulier que $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{\alpha 2^n} = +\infty$ et donc $\alpha > 0$.

7. On pose :
$$\beta_n = \exp(\alpha 2^n) - u_n.$$
Montrer que la suite $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et qu'elle vérifie :
$$2\beta_n - 1 = \left(\beta_{n+1} + \beta_n^2 - \beta_n\right)\exp(-\alpha 2^n).$$

Soit n un entier naturel.
De l'inégalité $u_n \leq e^{\alpha 2^n} \leq u_n + 1$, on déduit $0 \leq \beta_n \leq 1$, donc la suite (β_n) est bornée.
Posons $E_n = e^{\alpha 2^n}$. Alors $E_{n+1} = E_n^2$ et $u_n = E_n - \beta_n$. La relation $u_{n+1} = u_n + u_n^2$ devient :
$$E_{n+1} - \beta_{n+1} = (E_n - \beta_n) + (E_n - \beta_n)^2 = (E_n - \beta_n) + E_n^2 - 2E_n\beta_n + \beta_n^2.$$
Or $E_{n+1} = E_n^2$, donc après simplification :
$$-\beta_{n+1} = E_n - \beta_n - 2E_n\beta_n + \beta_n^2,$$
soit
$$(2\beta_n - 1)E_n = \beta_{n+1} + \beta_n^2 - \beta_n.$$
En divisant par $E_n = e^{\alpha 2^n}$, on obtient bien
$$\boxed{2\beta_n - 1 = \left(\beta_{n+1} + \beta_n^2 - \beta_n\right)e^{-\alpha 2^n}.}$$

8. Prouver enfin que $\beta_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{2}$.

Comme la suite (β_n) est bornée (pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \beta_n \leq 1$), la suite $(\beta_{n+1} + \beta_n^2 - \beta_n)$ est également bornée (pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $|\beta_{n+1} + \beta_n^2 - \beta_n| \leq |\beta_{n+1}| + |\beta_n|^2 + |\beta_n| \leq 3$).
Donc, pour tout entier naturel n, $|(\beta_{n+1} + \beta_n^2 - \beta_n)e^{-\alpha 2^n}| \leq 3e^{-\alpha 2^n}$.
Comme $e^{-\alpha 2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on en déduit que $(\beta_{n+1} + \beta_n^2 - \beta_n)e^{-\alpha 2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Donc $2\beta_n - 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et finalement
$$\boxed{\beta_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}.}$$