Corrigé de la liste d'exercices n°18 — Variables aléatoires

Exercice 1.

1. Remarquons tout d'abord qu'il y a équiprobabilité des tirages et que le cardinal de l'univers de l'expérience est $\mathrm{card}(\Omega) = \binom{26}{5}$. Remarquons ensuite que $X(\Omega) = [\![0,5]\!]$.
   Soit $k \in [\![0,5]\!]$. Choisir cinq jetons dont k voyelles revient à choisir k voyelles parmi les 6 (il y a $\binom{6}{k}$ choix) et $5-k$ consonnes parmi les 20 disponibles (il y a $\binom{20}{5-k}$ choix). Ainsi
   $$\mathrm{card}([X=k]) = \binom{6}{k}\binom{20}{5-k}.$$
   La loi de X est donc donnée par :
   $$\forall k \in [\![0,5]\!], \qquad \mathbb{P}(X=k) = \frac{\mathrm{card}([X=k])}{\mathrm{card}(\Omega)} = \frac{\binom{6}{k}\binom{20}{5-k}}{\binom{26}{5}}.$$
2. Remarquons tout d'abord qu'il y a équiprobabilité des choix des individus et que le cardinal de l'univers de l'expérience est $\mathrm{card}(\Omega) = \binom{9}{6}$. Remarquons ensuite que $X(\Omega) = [\![1,4]\!]$.
   Soit $k \in [\![1,4]\!]$. Choisir 6 personnes dont k femmes revient à choisir k femmes parmi les 4 (il y a $\binom{4}{k}$ choix) et $6-k$ hommes parmi les 5 disponibles (il y a $\binom{5}{6-k}$ choix). Ainsi
   $$\mathrm{card}([X=k]) = \binom{4}{k}\binom{5}{6-k}.$$
   La loi de X est donc donnée par :
   $$\forall k \in [\![1,4]\!], \qquad \mathbb{P}(X=k) = \frac{\binom{4}{k}\binom{5}{6-k}}{\binom{9}{6}}.$$
3. La variable aléatoire X est égale au nombre de succès ("on range une paire dans le premier tiroir") lors de la répétition de 20 expériences de Bernoulli indépendantes de paramètre de succès $p = \frac{1}{3}$. Ainsi X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\big(20, \frac{1}{3}\big)$.
4. Il y a équiprobabilité dans le choix des animaux, donc X suit la loi uniforme sur $[\![0,2]\!]$.
5. La variable aléatoire X est égale au nombre de succès ("obtenir une fille") lors de la répétition de 3 expériences de Bernoulli indépendantes de paramètre de succès $p = \frac{1}{2}$. Ainsi X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\big(3, \frac{1}{2}\big)$.

Exercice 2. On pose $q = 1-p$.

1. Il vient immédiatement que $X(\Omega) = [\![1,n]\!]$. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on note C_k l'événement "l'archer atteint sa cible au k-ème tir".
   Pour tout $k \in [\![1,n-1]\!]$, on a par indépendance des lancers :
   $$\mathbb{P}(X=k) = \mathbb{P}(\overline{C_1} \cap \cdots \cap \overline{C_{k-1}} \cap C_k) = p\,q^{k-1}.$$
   De plus,
   $$\mathbb{P}(X=n) = q^{n-1}.$$
   On a enfin,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=1}^{n-1} kp\, q^{k-1} + q^{n-1} = p\sum_{k=0}^{n-2} k\, q^k + q^{n-1}.$$

Or d'après le DM 7 on a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-2} kq^k = \frac{q-(n-1)q^{n-1}+(n-2)q^n}{(1-q)^2}$

Après calculs, on obtient :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1-q^n}{p}.$$

2. Notons C l'événement "l'archer a atteint sa cible". Alors $\mathbb{P}(C) = 1 - \mathbb{P}(\text{aucun succès en } n \text{ tirs}) = 1-q^n$. Pour $k \in [\![1,n]\!]$,

$$\mathbb{P}(X=k \mid C) = \frac{\mathbb{P}(C \cap [X=k])}{\mathbb{P}(C)} = \frac{p\, q^{k-1}}{1-q^n}.$$

3. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on note Y_k le gain du joueur au k-ème tir. Il vient immédiatement que $Y = \sum_{k=1}^{n} Y_k$ et $Y_k(\Omega) = \{0, n-k+1\}$ avec $[Y_k = n-k+1] = C_k$. La variable Y_k étant finie, elle admet une espérance :

$$\mathbb{E}(Y_k) = (n-k+1)\mathbb{P}(C_k) = (n-k+1)p.$$

Par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(Y_k) = p\sum_{k=1}^{n}(n-k+1) = p\,\frac{n(n+1)}{2}.$$

Exercice 3. Remarquons que $X(\Omega) = [\![1, n-1]\!]$. Pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, on note B_k l'événement "on tire une boule blanche au k-ème tirage". Alors :

$$[X=k] = \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} B_i\right) \cap \overline{B_k}.$$

En appliquant la formule des probabilités composées, on trouve :

$$\forall k \in [\![1, n-1]\!], \qquad \mathbb{P}(X=k) = \frac{n-2}{n} \times \cdots \times \frac{n-(k-2)-2}{n-(k-2)} \times \frac{2}{n-(k-1)} = \frac{2(n-k)}{n(n-1)}.$$

Exercice 4. Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $X(\Omega) = [\![1,n]\!]$, c'est-à-dire

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \qquad \mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{n}.$$

1. On a

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}}.$$

2. On a $V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$.
Or, d'après le théorème du transfert,

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=1}^{n} k^2 \mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Ainsi,

$$V(X) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{(n+1)(4n+2-3n-3)}{12} = \frac{n^2-1}{12}.$$

3. **Cas $n = 7$.**

$$\mathbb{E}(X) = \frac{7+1}{2} = 4, \qquad \mathrm{Var}(X) = \frac{7^2-1}{12} = \frac{49-1}{12} = \frac{48}{12} = 4.$$

   Ainsi,

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = 4 \quad \text{et} \quad \mathrm{V}(X) = 4}.$$

4. On résout :

$$\frac{n^2-1}{12} = 24 \iff n^2 - 1 = 288 \iff n^2 = 289.$$

   Or $289 = 17^2$, donc $n = 17$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$).

$$\boxed{\text{Oui, pour } n = 17, \quad \text{on a bien } \mathrm{V}(X) = 24.}$$

Exercice 5.

1. On a $(X = Y) = \displaystyle\bigsqcup_{k=1}^{n} ((X = k) \cap (Y = k))$ donc

$$\mathbb{P}(X = Y) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}((X = k) \cap (Y = k)) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y = k)$$

   par indépendance des variables alétoires X et Y.

   Or, pour tout $k \in [\![1, n]\!], \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(Y = k) = \dfrac{1}{n}$ donc

$$\mathbb{P}(X = Y) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2} = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

2. On a $(X \geqslant Y) = \displaystyle\bigsqcup_{k=1}^{n} ((X = k) \cap (Y \leqslant k))$ donc

$$\mathbb{P}(X \geqslant Y) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}((X = k) \cap (Y \leqslant k)) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y \leqslant k)$$

   par indépendance de X et Y d'où $\mathbb{P}(X \geqslant Y) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{n+1}{2n}$.

3. La variable aléatoire $X - Y$ prend ses valeurs dans $[\![1 - n, n - 1]\!]$ et on a pour tout $k \in [\![1 - n, n - 1]\!]$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X - Y = k) &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}((Y = i) \cap (X = i + k)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(Y = i)\mathbb{P}(X = i + k) \quad \text{par indépendance de } X \text{ et } Y \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X = i + k) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{j=k+1}^{n+k} \mathbb{P}(X = j).
\end{aligned}$$

- Si $k \leqslant 0$, on obtient $\mathbb{P}(X - Y = k) = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{j=1}^{n+k} \mathbb{P}(X = j) = \dfrac{n+k}{n^2}$.
- Si $k \geqslant 0$, on obtient $\mathbb{P}(X - Y = k) = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{j=k+1}^{n} \mathbb{P}(X = j) = \dfrac{n-k}{n^2}$.

Finalement, pour tout $k \in [\![1-n, n-1]\!], \mathbb{P}(X - Y = k) = \dfrac{n - |k|}{n^2}$.

Exercice 6.

1. Soit $k \in [\![1, n-2]\!]$.
On a $A_k \cap A_{k+1} = (X_k = 0, X_{k+1} = 1, X_{k+2} = 0) \cup (X_k = 1, X_{k+1} = 0, X_{k+2} = 1)$.
Ces deux événements étant incompatibles, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_k \cap A_{k+1}) &= \mathbb{P}(X_k = 0, X_{k+1} = 1, X_{k+2} = 0) + \mathbb{P}(X_k = 1, X_{k+1} = 0, X_{k+2} = 1) \\
&= \mathbb{P}(X_k = 0)\mathbb{P}(X_{k+1} = 1)\mathbb{P}(X_{k+2} = 0) + \mathbb{P}(X_k = 1)\mathbb{P}(X_{k+1} = 0)\mathbb{P}(X_{k+2} = 1) \text{ (indépend} \\
&= p(1-p)^2 + p^2(1-p) \\
&= p(1-p).
\end{aligned}$$

2. Si les événements $(A_k)_{1 \leqslant k \leqslant n-1}$ sont deux à deux indépendants, alors nécessairement, pour tout $k \in [\![1, n-2]\!]$, on a $\mathbb{P}(A_k \cap A_{k+1}) = \mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}(A_{k+1})$.
Pour tout $k \in [\![1, n-1]\!], \mathbb{P}(A_k) = \mathbb{P}(X_k = 0, X_{k+1} = 1) + \mathbb{P}(X_k = 1, X_{k+1} = 0) = 2p(1-p)$.
On a donc $\mathbb{P}(A_k \cap A_{k+1}) = \mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}(A_{k+1}) \Leftrightarrow p(1-p) = 4p^2(1-p)^2$.
Puisque $p(1-p) \neq 0$, ceci équivaut à $4p(1-p) = 1$ d'où $p = \dfrac{1}{2}$.
De plus, si $|i - j| > 1$, les événements $A_i = (X_i \neq X_{i+1})$ et $A_j = (X_j \neq X_{j+1})$ sont indépendants d'après le lemme des coalitions quelle que soit la valeur de p puisque les variables aléatoires $(X_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ sont indépendantes
Ainsi, les événements $(A_k)_{1 \leqslant k \leqslant n-1}$ sont deux à deux indépendants si et seulement si $p = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 7. On a $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$ donc $Y(\Omega) = \left\{ \dfrac{1}{1+k}, k \in [\![0, n]\!] \right\}$ et pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on a

$$\mathbb{P}\left(Y = \frac{1}{1+k}\right) = \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1+k} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} p^{k-1} (1-p)^{n-k+1}
\end{aligned}$$

- Si $p = 0$, on a $\mathbb{E}(Y) = 1$.

• Si $p \neq 0$, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) &= \frac{1}{p(n+1)} \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} p^k (1-p)^{n+1-k} \\
&= \frac{1}{p(n+1)} \left(\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} p^k (1-p)^{n+1-k} - (1-p)^{n+1} \right) \\
&= \frac{(p+1-p)^{n+1} - (1-p)^{n+1}}{p(n+1)} \\
&= \frac{1-(1-p)^{n+1}}{p(n+1)}.
\end{aligned}$$

Exercice 8.

1. **Loi de Y.**
   Pour $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$,
   $$\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(n - X = k) = \mathbb{P}(X = n - k).$$
   Or, comme $X \sim \mathcal{B}(n, p)$,
   $$\mathbb{P}(X = n-k) = \binom{n}{n-k} p^{n-k} (1-p)^k.$$
   En utilisant la symétrie des coefficients binomiaux $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$, on obtient
   $$\mathbb{P}(Y = k) = \binom{n}{k} (1-p)^k p^{n-k}.$$
   C'est exactement la loi binomiale de paramètres n et $1-p$. Ainsi,
   $$\boxed{Y \sim \mathcal{B}(n, 1-p)}.$$

2. **Espérance et variance.**
   Puisque $Y \sim \mathcal{B}(n, 1-p)$,
   $$\boxed{\mathbb{E}[Y] = n(1-p)}, \qquad \boxed{\mathrm{Var}(Y) = n(1-p)\,p = np(1-p)}.$$
   On peut aussi retrouver $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[n - X] = n - \mathbb{E}[X] = n - np = n(1-p)$, et $\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(n - X) = \mathrm{Var}(X) = np(1-p)$.

Exercice 9.

1. On a $T(\Omega) = [\![1, 4]\!]$. Pour tout $k \in [\![1, 4]\!]$, notons A_k l'événement :« Le rat choisit la bonne porte au k-ème essai ».
   On a $\mathbb{P}(T = 1) = \mathbb{P}(A_1) = \dfrac{1}{4}$.
   Ensuite, $\mathbb{P}(T = 2) = \mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_2 \cap \overline{A_1}) = \mathbb{P}(\overline{A_1})\mathbb{P}_{\overline{A_1}}(A_2) = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{4}$.
   De même, $\mathbb{P}(T = 3) = \mathbb{P}(A_3) = \mathbb{P}(A_3 \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_1})$ et d'après la formule des probabilités composées, on obtient
   $$\mathbb{P}(T = 3) = \mathbb{P}(\overline{A_1})\mathbb{P}_{\overline{A_1}}(\overline{A_2})\mathbb{P}_{\overline{A_1} \cap \overline{A_2}}(A_3) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$
   Enfin, puisque $\mathbb{P}(T = 1) + \mathbb{P}(T = 2) + \mathbb{P}(T = 3) + \mathbb{P}(T = 4) = 1$, on en déduit que $\mathbb{P}(T = 4) = \dfrac{1}{4}$.
   Ainsi, T suit une loi uniforme sur $[\![1, 4]\!]$.
2. On a $\mathbb{E}(T) = \dfrac{4+1}{2} = \dfrac{5}{2} = 2,5$. Ainsi, le rat peut espérer sortir au bout de trois essais.

Exercice 10.

1. Puisque Y compte le nombre de cartes bien placées, on a $Y = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

2. Par linéarité de l'espérance, on a $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k)$.

   Par définition de l'espérance, on a pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,

$$\mathbb{E}(X_k) = 1 \times \mathbb{P}(X_k = 1) + 0 \times \mathbb{P}(X_k = 0) = \mathbb{P}(X_k = 1).$$

   Par définition, $\mathbb{P}(X_k = 1)$ est la probabilité que la k-ème carte soit bien placée.

   Dénombrons les permutations qui laissent fixes la k-ème carte. Puisque la position de la k-ème carte est imposée, il reste à permuter les $n-1$ autres cartes, ce qui donne $(n-1)!$ permutations qui laissent fixes la k-ème carte.

   Puisqu'il y a $n!$ permutations de l'ensemble des n cartes, la probabilité cherchée est $\mathbb{P}(X_k = 1) = \dfrac{(n-1)!}{n!} = \dfrac{1}{n}$ donc

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = n \times \frac{1}{n} = 1.$$

Exercice 11. Soit $\Omega = [\![1, n]\!]$.

Notons T_1 et T_2 les variables aléatoires égales aux numéros obtenus aux premier et deuxième tirage respectivement.

Les variables aléatoires T_1 et T_2 suivent une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$ et on a $M = \max(T_1, T_2)$.

La variable aléatoire M est définie sur Ω^2 et on a $M(\Omega^2) = \Omega$.

Soit $k \in [\![1, n]\!]$. On a

$$(M = k) = ((T_1 = k) \cap (T_2 \leqslant k-1)) \cup ((T_1 \leqslant k-1) \cap (T_2 = k)) \cup ((T_1 = k) \cap (T_2 = k)).$$

Puisque c'est une union d'événements deux à deux incompatibles, on obtient

$$\mathbb{P}(M = k) = \mathbb{P}((T_1 = k) \cap (T_2 \leqslant k-1)) + \mathbb{P}((T_1 \leqslant k-1) \cap (T_2 = k)) + \mathbb{P}((T_1 = k) \cap (T_2 = k)).$$

Les tirages étant indépendants, les variables aléatoires T_1 et T_2 le sont également et on trouve :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(M = k) &= \mathbb{P}(T_1 = k)\mathbb{P}(T_2 \leqslant k-1) + \mathbb{P}(T_1 \leqslant k-1)\mathbb{P}(T_2 = k) + \mathbb{P}(T_1 = k)\mathbb{P}(T_2 = k) \\
&= \frac{1}{n} \times \frac{k-1}{n} + \frac{k-1}{n} \times \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \\
&= \frac{2k-1}{n^2}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathbb{E}(M) = \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(M = k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k^2 - k}{n^2} = \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k^2 - \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{6n^2} - \frac{n(n+1)}{2n^2}$$

d'où

$$\mathbb{E}(M) = \frac{4n^3 + 6n^2 + 2n - 3n^2 - 3n}{6n^2} = \frac{4n^2 + 3n - 1}{6n} = \frac{(n+1)(4n-1)}{6n}.$$

Exercice 12.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $X_n(\Omega) = [\![0, b]\!]$ et $(X_{n+1} - X_n)(\Omega) = \{-1, 1\}$.
En utilisant la formule des probabilités totales dans le système complet d'événements $(X_n = k)_{0 \leqslant k \leqslant b}$, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{n+1} - X_n = 1) &= \sum_{k=0}^{b} \mathbb{P}_{(X_n=k)}(X_{n+1} - X_n = 1)\mathbb{P}(X_n = k) \\
&= \sum_{k=0}^{b} \frac{b-k}{b}\mathbb{P}(X_n = k) \\
&= \sum_{k=0}^{b} \mathbb{P}(X_n = k) - \frac{1}{b}\sum_{k=0}^{b} k\mathbb{P}(X_n = k) \\
&= 1 - \frac{\mathbb{E}(X_n)}{b}.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathbb{P}(X_{n+1} - X_n = -1) = 1 - \mathbb{P}(X_{n+1} - X_n = 1) = \dfrac{\mathbb{E}(X_n)}{b}$ et on obtient

$$\mathbb{E}(X_{n+1} - X_n) = \mathbb{P}(X_{n+1} - X_n = 1) - \mathbb{P}(X_{n+1} - X_n = -1) = 1 - \frac{2}{b}\mathbb{E}(X_n).$$

2. Par linéarité de l'espérance, on obtient $\mathbb{E}(X_{n+1} - X_n) = \mathbb{E}(X_{n+1}) - \mathbb{E}(X_n)$ d'où

$$\mathbb{E}(X_{n+1}) = 1 + \left(1 - \frac{2}{b}\right)\mathbb{E}(X_n).$$

La suite $(\mathbb{E}(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique de point fixe $\dfrac{b}{2}$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}, \mathbb{E}(X_n) = \left(1 - \dfrac{2}{b}\right)^n \left(\mathbb{E}(X_0) - \dfrac{b}{2}\right) + \dfrac{b}{2}$.
Puisque $b \geqslant 2$, on a $\left|1 - \dfrac{2}{b}\right| < 1$ donc $\lim \left(1 - \dfrac{2}{b}\right)^n = 0$ d'où $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n) = \frac{b}{2}$.

Exercice 13.

1. Le choix des lapins consiste en $2n$ expériences de Bernoulli indépendantes de paramètre $\frac{1}{2}$ donc M suit une loi binomiale de paramètres $(2n, \frac{1}{2})$.
Par ailleurs, s'il y a M mâles, il y a $2n - M$ femelles et le nombre de couples qu'on peut former est le minimum entre le nombre de mâles et de femelles donc $C = \min(M, 2n - M)$.
2. La variable aléatoire C est à valeurs dans $[\![0, n]\!]$.
Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on a

$$\mathbb{P}(C = k) = \mathbb{P}((M = k) \cup (2n - M = k)) = \mathbb{P}((M = k) \cup (M = 2n - k)).$$

- Si $k \neq n$, alors les événements $(M = k)$ et $(M = 2n - k)$ sont incompatibles donc

$$\mathbb{P}(C = k) = \mathbb{P}(M = k) + \mathbb{P}(M = 2n-k) = \binom{2n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k} + \binom{2n}{2n-k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{\binom{2n}{k}}{2^{2n-1}}.$$

- Si $k = n$, on obtient

$$\mathbb{P}(C = n) = \mathbb{P}(M = n) = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}.$$

3. D'après la formule de transfert, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(C) &= \sum_{k=0}^{2n} \min(k, 2n-k)\mathbb{P}(M=k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} k\binom{2n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k} + \sum_{k=n+1}^{2n}(2n-k)\binom{2n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k} \\
&= \frac{1}{2^{2n}}\left(2n\sum_{k=0}^{n}\binom{2n-1}{k-1} + \sum_{k=n+1}^{2n}(2n-k)\binom{2n}{2n-k}\right) \\
&= \frac{1}{2^{2n}}\left(2n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n-1}{k} + \sum_{k=n+1}^{2n}2n\binom{2n-1}{2n-k-1}\right) \\
&= \frac{n}{2^{2n-1}}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n-1}{k} + \sum_{k=n+1}^{2n}\binom{2n-1}{k}\right) \\
&= \frac{n}{2^{2n-1}}\left(\sum_{k=0}^{2n-1}\binom{2n-1}{k} - \binom{2n-1}{n}\right) \\
&= \frac{n(2^{2n-1} - \binom{2n-1}{n})}{2^{2n-1}}.
\end{aligned}$$

Exercice 14.

1. Tout d'abord, on remarque que S_n suit une loi binomiale de paramètres (n, p) puisque c'est une somme de n variables aléatoires indépendantes suivant chacune une loi de Bernoulli de paramètre p donc $\mathbb{E}(S_n) = np$.

   Par ailleurs, par linéarité de l'espérance, on a $\mathbb{E}(V_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\mathbb{E}(Y_k) = \sum_{k=1}^{n-1}\mathbb{E}(X_kX_{k+1})$. Or, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, les variables aléatoires X_k et X_{k+1} sont indépendantes donc $\mathbb{E}(X_kX_{k+1}) = \mathbb{E}(X_k)\mathbb{E}(X_{k+1}) = p^2$. Finalement, on a $\mathbb{E}(V_n) = (n-1)p^2$.

2. Puisque $S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$, on a $V(S_n) = np(1-p)$.

   Calculons $V(V_n)$ en utilisant la formule de König-Huygens, c'est à dire

$$V(V_n) = \mathbb{E}(V_n^2) - \mathbb{E}(V_n)^2.$$

   On a $V_n^2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} Y_k^2 + 2\sum_{\substack{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2 \\ i<j}} Y_iY_j$.

   Par linéarité de l'espérance, il vient $\mathbb{E}(V_n^2) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\mathbb{E}(Y_k^2) + 2\sum_{\substack{(i,j)\in[\![1,n-1]\!]^2 \\ i<j}}\mathbb{E}(Y_iY_j)$.

   Pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, on a $\mathbb{E}(Y_k^2) = \mathbb{E}(X_k^2X_{k+1}^2) = \mathbb{E}(X_kX_{k+1}) = \mathbb{E}(X_k)\mathbb{E}(X_{k+1}) = p^2$. Par ailleurs, si $j > i+1$, on a $Y_iY_j = X_iX_{i+1}X_jX_{j+1}$ avec les variables aléatoires $X_i, X_{i+1}, X_j, X_{j+1}$ qui sont mutuellement indépendantes donc

$$\mathbb{E}(Y_iY_j) = \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_{i+1})\mathbb{E}(X_j)\mathbb{E}(X_{j+1}) = p^4.$$

   Enfin, si $j = i+1$, on a

$$\mathbb{E}(Y_iY_j) = \mathbb{E}(Y_iY_{i+1}) = \mathbb{E}(X_iX_{i+1}^2X_{i+2}) = \mathbb{E}(X_iX_{i+1}X_{i+2}) = \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_{i+1})\mathbb{E}(X_{i+2}) = p^3.$$

Il y a $\binom{n-1}{2} = \dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$ couples $(i,j) \in [\![1, n-1]\!]^2$ tels que $i < j$ et $n-2$ tels que $j = i+1$ donc $\dfrac{(n-1)(n-2)}{2} - (n-2) = \dfrac{n^2-3n+2-2n+4}{2} = \dfrac{n^2-5n+6}{2} = \dfrac{(n-2)(n-3)}{2}$ tels que $j > i+1$.
On trouve donc

$$\mathbb{E}(V_n^2) = (n-1)p^2 + 2(n-2)p^3 + (n-2)(n-3)p^4 = p^2((n-1) + 2(n-2)p + (n-2)(n-3)p^2)$$

d'où finalement

$$V(V_n) = p^2((n-1)+2(n-2)p+(n-2)(n-3)p^2) - (n-1)^2p^4 = p^2((n-1)+2(n-2)p+(5-3n)p^2).$$

Exercice 15.

1. **Loi de Y (nombre de clients satisfaits).**
Un client est satisfait s'il obtient une voiture. Comme il n'y a que 2 voitures,

$$Y = \min(X, 2).$$

Ainsi $Y(\Omega) = \{0, 1, 2\}$ et :

$$\mathbb{P}(Y=0) = \mathbb{P}(X=0) = 0{,}1,$$

$$\mathbb{P}(Y=1) = \mathbb{P}(X=1) = 0{,}3,$$

$$\mathbb{P}(Y=2) = \mathbb{P}(X \geq 2) = \mathbb{P}(X=2) + \mathbb{P}(X=3) = 0{,}4 + 0{,}2 = 0{,}6.$$

Donc la loi de Y est :

y	0	1	2
$\mathbb{P}(Y=y)$	0,1	0,3	0,6

2. **Marge brute moyenne par jour.**
La marge brute journalière vaut

$$M = 50\,Y.$$

Donc

$$\mathbb{E}(M) = 50\,\mathbb{E}(Y).$$

Or

$$\mathbb{E}(Y) = 0 \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}6 = 0{,}3 + 1{,}2 = 1{,}5.$$

Ainsi

$$\boxed{\mathbb{E}(M) = 50 \times 1{,}5 = 75 \text{ euros}}.$$

3. **Même questions avec passages à l'atelier.**
Chaque voiture part en révision avec probabilité $1/5$, indépendamment de l'autre et indépendamment de X. Donc une voiture est disponible avec probabilité $4/5$.

Loi de V, nombre de voitures disponibles.
On a alors

$$V \sim \mathcal{B}(2, \tfrac{4}{5}),$$

et donc $V(\Omega) = \{0, 1, 2\}$ avec

$$\mathbb{P}(V=0) = \left(\tfrac{1}{5}\right)^2 = \tfrac{1}{25}, \qquad \mathbb{P}(V=1) = 2 \cdot \tfrac{4}{5} \cdot \tfrac{1}{5} = \tfrac{8}{25}, \qquad \mathbb{P}(V=2) = \left(\tfrac{4}{5}\right)^2 = \tfrac{16}{25}.$$

Loi de Y dans ce nouveau contexte.
Cette fois, le nombre de clients satisfaits est

$$Y = \min(X, V),$$

avec X et V indépendantes.
On calcule à l'aide des cas $V = 0, 1, 2$:

Probabilité de $Y = 0$.

$$\mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(V = 0) + \mathbb{P}(X = 0, V = 1) + \mathbb{P}(X = 0, V = 2).$$

Par indépendance :

$$\mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(V = 0) + \mathbb{P}(X = 0)\mathbb{P}(V = 1) + \mathbb{P}(X = 0)\mathbb{P}(V = 2).$$

Donc

$$\mathbb{P}(Y = 0) = \tfrac{1}{25} + 0{,}1\left(\tfrac{8}{25} + \tfrac{16}{25}\right) = \tfrac{1}{25} + 0{,}1 \cdot \tfrac{24}{25} = \tfrac{17}{125} = 0{,}136.$$

Probabilité de $Y = 1$.

$$\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(V = 1, X \geq 1) + \mathbb{P}(V = 2, X = 1).$$

Par indépendance :

$$\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(V = 1)\mathbb{P}(X \geq 1) + \mathbb{P}(V = 2)\mathbb{P}(X = 1).$$

Or $\mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) = 0{,}9$, donc

$$\mathbb{P}(Y = 1) = \tfrac{8}{25} \cdot 0{,}9 + \tfrac{16}{25} \cdot 0{,}3 = \tfrac{36}{125} + \tfrac{24}{125} = \tfrac{12}{25} = 0{,}48.$$

Probabilité de $Y = 2$.

$$\mathbb{P}(Y = 2) = \mathbb{P}(V = 2, X \geq 2) = \mathbb{P}(V = 2)\mathbb{P}(X \geq 2) = \tfrac{16}{25} \cdot (0{,}4 + 0{,}2) = \tfrac{48}{125} = 0{,}384.$$

Ainsi, la loi de Y est :

$$\begin{array}{c|ccc} y & 0 & 1 & 2 \\ \hline \mathbb{P}(Y = y) & \frac{17}{125} & \frac{12}{25} & \frac{48}{125} \end{array} \qquad (\text{soit } 0{,}136;\ 0{,}48;\ 0{,}384)\,.$$

Marge brute moyenne par jour.
Toujours $M = 50Y$, donc $\mathbb{E}(M) = 50\mathbb{E}(Y)$ avec

$$\mathbb{E}(Y) = 1 \cdot \mathbb{P}(Y = 1) + 2 \cdot \mathbb{P}(Y = 2) = \tfrac{12}{25} + 2 \cdot \tfrac{48}{125} = \tfrac{60}{125} + \tfrac{96}{125} = \tfrac{156}{125} = 1{,}248.$$

Donc

$$\boxed{\mathbb{E}(M) = 50 \times 1{,}248 = 62{,}4 \text{ euros}}.$$

Exercice 16.

1. La V.A.R. X_n peut prendre deux valeurs : 1 et $1+n$. Ainsi $Y_n = \dfrac{X_n}{n}$ peut aussi prendre deux valeurs $\dfrac{1}{n}$ et $1+\dfrac{1}{n}$;
$$Y_n(\Omega) = \left\{\frac{1}{n},\ 1+\frac{1}{n}\right\}.$$
Ainsi la V.A.R. $Y_n - \dfrac{1}{n}$ prend pour valeurs 0 et 1 avec probabilités non nulles : c'est donc une variable de Bernoulli.
Calculons son paramètre : l'évènement
$$\left(Y_n - \frac{1}{n} = 1\right)$$
est l'évènement : "le mélange de lait des n vaches est contaminé", soit "au moins une vache contaminée". Il est plus simple de calculer l'évènement contraire : "aucune vache contaminée", de probabilité $0{,}85^n$ (on suppose la contamination des vaches indépendantes, avec $p = 0{,}15$ pour chaque vache).
Ainsi :
$$\mathbb{P}\left(Y_n - \frac{1}{n} = 1\right) = 1 - 0{,}85^n.$$
D'où la loi de Y_n :

y	$\frac{1}{n}$	$1+\frac{1}{n}$
$\mathbb{P}(Y_n = y)$	$0{,}85^n$	$1-0{,}85^n$

Par linéarité de l'espérance :
$$\mathbb{E}(Y_n) = \mathbb{E}\left(Y_n - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} = 1 - 0{,}85^n + \frac{1}{n}.$$

2. a) Soit $f(x) = ax + \ln x$ avec $a < 0$; f est dérivable et
$$f'(x) = a + \frac{1}{x}.$$
Ainsi :
$$f'(x) > 0 \iff a + \frac{1}{x} > 0 \iff \frac{1}{x} > -a > 0 \iff x < -\frac{1}{a}.$$
D'où le tableau de variation de f : f croît sur $\left]0, -\frac{1}{a}\right[$ puis décroît sur $\left]-\frac{1}{a}, +\infty\right[$.
En particulier f présente un maximum en $x = -\dfrac{1}{a}$ de valeur :
$$f\left(-\frac{1}{a}\right) = -1 - \ln\left(-\frac{1}{a}\right) = -1 - \ln(-a).$$
Lorsque $a = \ln 0{,}85$:
$$f\left(-\frac{1}{a}\right) \approx 0{,}817 > 0 \quad \text{(avec la calculatrice).}$$

   b)
$$f(n_0) = \ln 0{,}85 \times n_0 + \ln n_0 > 0 \iff \frac{\ln n_0}{n_0} > -\ln 0{,}85 \approx 0{,}16.$$
L'application $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ est croissante sur $\left]0, e\right]$ puis décroissante sur $\left[e, +\infty\right[$ puisque sa dérivée vaut $\dfrac{1-\ln x}{x^2}$. À la calculatrice on trouve que l'entier n_0 vaut au plus 17.

c) On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y_n) < 1 &\iff 1 + \frac{1}{n} - 0{,}85^n < 1 \\
&\iff \frac{1}{n} < 0{,}85^n \\
&\iff -\ln n < n \ln 0{,}85 \\
&\iff (\ln 0{,}85)n + \ln n > 0 \\
&\iff f(n) > 0 \quad \text{avec } a = \ln 0{,}85.
\end{aligned}$$

La deuxième méthode est plus intéressante que la première si en moyenne on effectue moins de n analyses, c'est-à-dire si $\mathbb{E}(X_n) < n \iff \mathbb{E}(Y_n) < 1$; c'est le cas lorsque $f(n) > 0$, ainsi d'après b) pour des troupeaux d'au plus 17 vaches ; au-delà la première méthode sera préférable.

Exercice 17.

1. X_1 suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p_1)$.
   $X_2(\Omega) = \{0, 1\}$. D'après la formule des probabilités totales avec le SCE $(X_1 = 0), (X_1 = 1)$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_2 = 1) &= \mathbb{P}(X_1 = 0)\,\mathbb{P}(X_2 = 1 \mid X_1 = 0) + \mathbb{P}(X_1 = 1)\,\mathbb{P}(X_2 = 1 \mid X_1 = 1) \\
&= (1 - p_1) \cdot \frac{a}{2a+1} + p_1 \cdot \frac{a+1}{2a+1} = \frac{a + p_1}{2a+1},
\end{aligned}$$

   car :
   - lorsque $(X_1 = 0)$ est réalisé, l'urne 2 contient a blanches et $a + 1$ noires,
   - lorsque $(X_1 = 1)$ est réalisé, l'urne 2 contient $a + 1$ blanches et a noires.

   Ainsi $X_2 \sim \mathcal{B}\left(\dfrac{a + p_1}{2a+1}\right)$. En particulier :

$$\mathbb{E}(X_1) = p_1, \qquad \operatorname{Var}(X_1) = p_1(1 - p_1),$$

$$\mathbb{E}(X_2) = \frac{a + p_1}{2a+1}, \qquad \operatorname{Var}(X_2) = \frac{a + p_1}{2a+1} \cdot \frac{a + 1 - p_1}{2a+1}.$$

2. X_1 et X_2 suivant toutes deux des lois de Bernoulli, elles suivent la même loi si et seulement si les lois ont même paramètre :

$$p_1 = \frac{a + p_1}{2a+1} \iff p_1 = \frac{1}{2}.$$

3. Pour cette valeur :

$$\mathbb{P}(X_2 = 1) = \frac{1 + p_1}{2}, \qquad \mathbb{P}(X_2 = 1 \mid X_1 = 0) = \frac{1}{4} \neq \mathbb{P}(X_2 = 1),$$

   donc X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

4. Exprimons p_{k+1} et q_{k+1} en fonction de p_k, q_k. En appliquant la FPT avec le SCE $(X_k = 0)$ et $(X_k = 1)$:

$$\begin{aligned}
p_{k+1} = \mathbb{P}(X_{k+1} = 1) &= \mathbb{P}(X_{k+1} = 1 \mid X_k = 0)\,\mathbb{P}(X_k = 0) + \mathbb{P}(X_{k+1} = 1 \mid X_k = 1)\,\mathbb{P}(X_k = 1) \\
&= \frac{a}{2a+1}\, q_k + \frac{a+1}{2a+1}\, p_k, \\
q_{k+1} = \mathbb{P}(X_{k+1} = 0) &= \frac{a+1}{2a+1}\, q_k + \frac{a}{2a+1}\, p_k.
\end{aligned}$$

Ainsi matriciellement :

$$\begin{pmatrix} p_{k+1} \\ q_{k+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{2a+1} \begin{pmatrix} a+1 & a \\ a & a+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_k \\ q_k \end{pmatrix}, \qquad M = \frac{1}{2a+1}\left(P + I_2\right),$$

où

$$P = \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. (a) On obtient :

$$P^n = \begin{cases} I_2 & \text{si } n = 0, \\ a^n\, 2^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \text{si } n > 0, \end{cases}$$

(à établir par récurrence). Puisque P et I_2 commutent, on peut appliquer la formule du binôme :

$$\begin{aligned} M^n &= \left(\frac{1}{2a+1}\right)^n (P + I_2)^n = \left(\frac{1}{2a+1}\right)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^k \\ &= \left(\frac{1}{2a+1}\right)^n \left(I_2 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} P^k\right) \\ &= \left(\frac{1}{2a+1}\right)^n \left(I_2 + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(2a)^k}{2}\right) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right). \end{aligned}$$

En posant

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(2a)^k}{2} = \frac{1}{2}\left((1+2a)^n - 1\right),$$

on arrive à

$$M^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{(2a+1)^n} & 1 - \frac{1}{(2a+1)^n} \\ 1 - \frac{1}{(2a+1)^n} & 1 + \frac{1}{(2a+1)^n} \end{pmatrix} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(b) Puisque

$$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = M^{n-1} \begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \end{pmatrix},$$

on en déduit la loi de X_n : $X_n(\Omega) = [\![0, 1]\!]$ et :

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = p_n = \frac{1}{2} + \frac{p_1 - q_1}{2(2a+1)^{n-1}}, \qquad \mathbb{P}(X_n = 0) = q_n = \frac{1}{2} + \frac{q_1 - p_1}{2(2a+1)^{n-1}}.$$

D'où les limites

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \frac{1}{2}, \qquad \lim_{n\to\infty} q_n = \frac{1}{2}.$$

Ainsi X_n tend vers la loi de Bernoulli uniforme.

Exercice 18.

1. X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ vu qu'on est en présence d'un schéma de Bernoulli. Ainsi :
$$\mathbb{E}(X) = np, \qquad \operatorname{Var}(X) = npq.$$

2. (a) $Z(\Omega) = [\![0,n]\!]$.

   (b) Avec la formule de conditionnement :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z=0) &= \mathbb{P}\big((X=0)\cap(Y=0)\big) = \mathbb{P}(X=0)\,\mathbb{P}(Y=0 \mid X=0)\\ &= \binom{n}{0}p^0q^n \times q^n = q^{2n}.\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z=1) &= \mathbb{P}\big((X=1)\cap(Y=0)\big) + \mathbb{P}\big((X=0)\cap(Y=1)\big) \quad \text{(incompatibilité)}\\ &= \mathbb{P}(X=1)\mathbb{P}(Y=0 \mid X=1) + \mathbb{P}(X=0)\mathbb{P}(Y=1 \mid X=0).\end{aligned}$$
   Or $Y \mid (X=0) \sim \mathcal{B}(n,p)$; $Y \mid (X=1) \sim \mathcal{B}(n-1,p)$, donc
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z=1) &= \binom{n}{1}pq^{n-1} \times \binom{n-1}{0}p^0q^{n-1} + \binom{n}{0}p^0q^n \times \binom{n}{1}pq^{n-1}\\ &= npq^{2n-2} + npq^{2n-1} = npq^{2n-2}(1+q).\end{aligned}$$

   (c) On remarque que pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, $Y \mid (X=i)$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n-i,p)$, puisqu'on est encore en présence d'un schéma de Bernoulli (répété $n-i$ fois). Ainsi, $\forall i \in [\![0,n]\!]$, $\forall j \in [\![0,n-i]\!]$:
$$\mathbb{P}\big(Y=j \mid X=i\big) = \binom{n-i}{j}p^jq^{n-i-j}.$$

   (d) Soit $k \in [\![0,n]\!]$; d'après la loi de la somme :
$$\mathbb{P}(Z=k) = \mathbb{P}(X+Y=k) = \sum_{\substack{i+j=k\\ (i,j)\in[\![0,n]\!]^2}} \mathbb{P}\big((X=i)\cap(Y=j)\big) = \sum_{i=0}^{k}\mathbb{P}\big((X=i)\cap(Y=k-i)\big).$$

   (e) Soit $k \in [\![0,n]\!]$:
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z=k) &= \sum_{i=0}^{k}\mathbb{P}(X=i)\,\mathbb{P}(Y=k-i \mid X=i)\\ &= \sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}p^iq^{n-i}\binom{n-i}{k-i}p^{k-i}q^{n-k}\\ &= \sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i}p^kq^{2n-i-k}.\end{aligned}$$
   Or
$$\binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i} = \binom{n}{k}\binom{k}{i},$$
   donc
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z=k) &= \binom{n}{k}p^kq^{2n-2k}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}q^{k-i}\\ &= \binom{n}{k}p^kq^{2n-2k}(1+q)^k.\end{aligned}$$

Donc
$$\mathbb{P}(Z=k) = \binom{n}{k}\big(p(1+q)\big)^k\big(q^2\big)^{n-k},$$
car $1-p(1+q) = 1-p-pq = q-pq = q(1-p) = q^2$.
Ainsi $Z \sim \mathcal{B}\big(n, p(1+q)\big)$.
Remarquons qu'on aurait pu l'obtenir directement : on a le schéma de Bernoulli, consistant pour chacune des n personnes à : l'appeler, et la rappeler si on ne l'a pas eue au premier appel.
Pour chaque personne, la probabilité de la joindre est alors : $p+qp$ (obtenu au premier appel ou raté puis obtenu au deuxième). On répète n fois de manière indépendante l'expérience consistant à tenter de joindre une personne en au plus 2 appels, et on compte les réussites.
Donc $Z \sim \mathcal{B}(n, p+qp)$.