
DEVOIR MAISON N°10
A RENDRE POUR LE MERCREDI 11 MARS 2026

Problème

On dispose de deux jetons A et B que l'on peut placer dans deux cases C_0 et C_1 , et d'un dispositif permettant de tirer au hasard et de manière équiprobable l'une des lettres a , b ou c . Au début de l'expérience, les deux jetons sont placés dans C_0 . On procède alors à une série de tirages indépendants de l'une des trois lettres a , b ou c .

À la suite de chaque tirage, on effectue l'opération suivante :

- si la lettre a est tirée, on change le jeton A de case,
- si la lettre b est tirée, on change le jeton B de case,
- si la lettre c est tirée, on ne change pas le placement des jetons.

On suppose qu'il existe un espace probabilisé dont la probabilité est notée P , qui modélise cette expérience et que l'on définit deux suites de variables aléatoires sur cet espace, $(X_n)_{n \geq 0}$ et $(Y_n)_{n \geq 0}$, décrivant les positions respectives des jetons A et B , en posant :

$$X_0 = Y_0 = 0,$$

et pour tout entier naturel n non nul, $X_n = 0$ si, à l'issue de la n^{e} opération, le jeton A se trouve dans C_0 et $X_n = 1$ s'il se trouve dans C_1 ; de même, $Y_n = 0$ si le jeton B est dans C_0 à l'issue de la n^{e} opération et $Y_n = 1$ s'il se trouve dans C_1 .

1 Simulation

Écrire un programme en Python permettant de simuler l'expérience, qui lira un entier N entré par l'utilisateur, représentant le nombre de tirages à effectuer, et qui affichera à l'écran la liste des couples observés (X_n, Y_n) pour $0 \leq n \leq N$.

Ce programme utilisera le module `random`. On pourra par exemple utiliser `random.randint(0, m-1)`, qui renvoie un entier suivant la loi uniforme sur $\{0, \dots, m-1\}$, ou `random.choice(liste)`, qui renvoie un élément de `liste` choisi selon la loi uniforme.

2 Étude du mouvement du jeton A

1. (a) Soit n un entier strictement positif. Déterminer la probabilité que, à l'issue de la n^{e} opération, le jeton A n'ait jamais quitté C_0 .
(b) Quelle est la probabilité que le jeton A reste indéfiniment dans C_0 ?
2. Pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, on s'intéresse à l'événement D_k : à l'issue de la k^{e} opération, le jeton A revient pour la première fois dans C_0 . Déterminer la probabilité $P(D_k)$.
3. Soient les matrices

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Calculer P^{-1} .
- (b) Montrer que $P^{-1}MP$ est une matrice diagonale, notée D , que l'on déterminera.

(c) En déduire, pour tout entier $n \geq 1$, une expression de M^n .

4. (a) Calculer les probabilités $P(X_1 = 0)$ et $P(X_1 = 1)$.

(b) Déterminer une matrice Q telle que, pour tout entier naturel n , on ait l'égalité matricielle :

$$\begin{pmatrix} P(X_{n+1} = 0) \\ P(X_{n+1} = 1) \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \end{pmatrix}.$$

(c) Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$, calculer la matrice Q^n et en déduire la loi de la variable X_n .

3 Étude du mouvement du couple de jetons (A, B)

On suppose que l'on définit sur le même espace probabilisé une suite de variables aléatoires $(W_n)_{n \geq 0}$, à valeurs dans $\{0, 1, 2, 3\}$, décrivant les positions des deux jetons A et B , en posant : $W_0 = 0$, et pour tout entier naturel n non nul,

- $W_n = 0$ si, à l'issue de la $n^{\text{ième}}$ opération, A et B se trouvent tous les deux dans C_0 ,
- $W_n = 1$ si, à l'issue de la $n^{\text{ième}}$ opération, A se trouve dans C_0 et B dans C_1 ,
- $W_n = 2$ si, à l'issue de la $n^{\text{ième}}$ opération, A se trouve dans C_1 et B dans C_0 ,
- $W_n = 3$ si, à l'issue de la $n^{\text{ième}}$ opération, les deux jetons A et B se trouvent dans C_1 .

5. Calculer les probabilités $P(W_1 = i)$ pour i égal à 0, 1, 2 et 3.

6. Déterminer la matrice R telle que, pour tout entier naturel n , on ait l'égalité matricielle :

$$\begin{pmatrix} P(W_{n+1} = 0) \\ P(W_{n+1} = 1) \\ P(W_{n+1} = 2) \\ P(W_{n+1} = 3) \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} P(W_n = 0) \\ P(W_n = 1) \\ P(W_n = 2) \\ P(W_n = 3) \end{pmatrix}.$$

7. On considère les matrices :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Pour tout entier naturel n non nul, calculer les matrices U^n et V^n .

(b) En déduire, pour tout entier naturel non nul, l'égalité

$$(U - V)^n = \frac{1}{4}(3^n - (-1)^n)U + (-1)^n V^n.$$

8. Pour tout entier naturel n non nul, calculer la matrice R^n et donner la loi de la variable W_n (on distinguera les cas n pair et n impair).

4 Étude d'un temps de séjour

On suppose que chaque tirage, avec l'opération qui le suit, dure une minute. Ainsi, à l'issue de la n^{e} opération, n minutes se sont écoulées depuis le début de l'expérience.

Soit n un entier naturel non nul. On suppose que le nombre de minutes écoulées pendant lesquelles le jeton A a séjourné dans C_1 , entre le début de l'expérience et l'issue de la n^{e} opération, est une variable aléatoire que l'on note T_n .

9. Exprimer T_n à l'aide des variables X_k , pour k compris entre 1 et n .

10. En déduire l'espérance $E(T_n)$.

11. Calculer la limite de $\frac{1}{n}E(T_n)$ quand n tend vers l'infini.