

Liste d'exercices n°19

Limites et continuité

Exercice 1. Calculer, si elles existent, les limites en 0 et en $+\infty$ des fonctions suivantes.

$$1. f : x \mapsto \frac{(x^2 + \cos(x) - 14) \sin(e^{-x})}{(\ln(x) + \sqrt{x}) \ln(1+x)} \quad 2. g : x \mapsto \frac{(x^3 + \sin(x^2))^2 \sqrt{14+x}}{(e^{x^3} - 1)(x + x^2 \ln(x))}$$

Exercice 2. Calculer, si elles existent, les limites suivantes.

$$\begin{array}{ll} 1. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x - 1} - \sqrt{x^2 + x}) & 6. \lim_{x \rightarrow +\infty} [x] \sin\left(\frac{1}{x}\right) \\ 2. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos(x))^{\frac{1}{\sin^2(x)}} & 7. \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin(x) \\ 3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x \ln(x))}{x} & 8. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\left(\frac{x+2}{x} \right)^{2x} \right) \\ 4. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-x^2 + x + 6}{x^2 + 9 - 6x} & 9. \lim_{x \rightarrow 0} (\exp(\sin(x)) - \sin^2(x))^{\frac{1}{\sin(x)}} \\ 5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin(x)) - 1}{\tan^3(x) - 2 \sin^2(x)} & \end{array}$$

Exercice 3. Soit f une fonction monotone sur un intervalle $I =]a, b[$, avec a et b éventuellement infinis.

Montrer que la fonction f admet en tout point x_0 des limites à gauche et à droite finies.

Exercice 4. Soient f et g les fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto \frac{1 - \cos(2\pi x)}{x^2 \ln(x)} \quad \text{et} \quad g : x \mapsto \frac{\sin(x^2)}{\sqrt{x+4} - 2}.$$

1. La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 0 ?
2. La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 1 ?
3. La fonction g est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

Exercice 5. Les fonctions suivantes sont-elles continues ?

$$\begin{array}{l} 1. f : x \mapsto \begin{cases} \frac{(x+2)(x-1)}{x \ln(x)} & \text{si } x > 0 \text{ et } x \neq 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \end{cases} \\ 2. g : x \mapsto [x] \sin(\pi x) \\ 3. h : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x^2} \left(\frac{2}{\cos(x)} + \cos(x) - 3 \right) & \text{si } x \in]-\frac{\pi}{2}; 0[\cup]0; \frac{\pi}{2}[\\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

Exercice 6. Soit f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(t) = \frac{t^2}{e^t - 1}$. Comment choisir $f(0)$ pour que f soit continue en 0 ?

Exercice 7. Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ respectivement continue et bornée. Montrer que $g \circ f$ et $f \circ g$ sont bornées sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8. Montrer que les seules fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Z}$ sont les fonctions constantes.

Exercice 9. Soit I un intervalle, soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions continues. Montrer que les fonctions $\max(f, g) : x \longmapsto \max(f(x), g(x))$ et $\min(f, g) : x \longmapsto \min(f(x), g(x))$ sont continues sur I .

Exercice 10. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \leq b$. Soit $f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ une fonction continue. Montrer que f possède au moins un point fixe.

Exercice 11. Soit g une fonction périodique définie sur $\mathbb{R}$. On suppose que g admet une limite en $+\infty$. Montrer que g est constante.

Exercice 12. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On suppose que f admet une limite finie en $+\infty$ et en $-\infty$. Montrer que f est bornée.

Exercice 13. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que f admet un minimum global sur $\mathbb{R}$.

Exercice 14. Montrer que l'équation $x^3 + x^2 + x - 1 = 0$ admet une solution unique dans $[0; +\infty[$.

Exercice 15. Etablir que les équations suivantes, d'inconnue x réelle, admettent au moins une solution.

1. $x^{17} + x^3 \sin(x) = 1$.
2. $x^2 \cos(x) + x \sin(x) = -1$.

Exercice 16. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continues vérifiant la propriété suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x)^2 - f(x) = 0.$$

Exercice 17. Pour $n \geq 3$, on pose $P_n(x) = x^n - nx + 1$.

1. Montrer que P_n admet un unique zéro sur $[0, 1]$ noté u_n .
2. Encadrer u_n à l'aide de $\frac{1}{n}$ et $\frac{2}{n}$.
3. Déterminer la limite de $(u_n)_{n \geq 3}$ puis un équivalent de u_n .

Exercice 18. Pour tout entier naturel non nul n , on considère la fonction suivante :

$$f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n + 2x^2 + x - 1. \end{array}$$

1. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n , il existe un unique point x_n appartenant à $[0; \frac{1}{2}]$ tel que $f_n(x_n) = 0$.
2. Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n , on a $f_{n+1}(x_n) \leq 0$.
3. En déduire que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.
4. Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et calculer sa limite.

Exercice 19. Pour tout entier naturel non-nul n , on note (E_n) l'équation : $\tan x = nx$.

1. Montrer que l'équation (E_n) admet une unique solution x_n dans $]0; \frac{\pi}{2}[$.
2. Que peut-on dire de la suite (x_n) ?

Exercice 20. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^x + x.$$

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à expliciter.
2. Justifier que pour tout entier positif n , l'équation $f(x) = n$ possède une unique solution que l'on notera par la suite x_n .
3. Déterminer la monotonie de la suite (x_n) .
4. Démontrer que $\forall n > 1, \ln(n - \ln n) \leq x_n \leq \ln n$.
5. En déduire la limite de la suite (x_n) puis un équivalent simple de x_n .

Exercice 21. Considérons la fonction suivante :

$$f: x \mapsto \sqrt{x^2 + 1} - x.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f . On le notera $\mathcal{D}_f$.
2. Montrer que la fonction f réalise une bijection de $\mathcal{D}_f$ sur un ensemble que l'on précisera.

Exercice 22. On souhaite déterminer toutes les fonctions définies sur $\mathbb{R}$, continues en 0, vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(2x).$$

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(x)$.
2. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(0)$.
3. Conclure.

Exercice 23. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x) \times f(y)$.

1. Établir que $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$. Puis établir que si $f(0) = 0$, alors f est identiquement nulle sur $\mathbb{R}$.
2. À partir de maintenant, on suppose $f(0) = 1$.
 - (a) Établir que f est strictement positive sur $\mathbb{R}$.
 - (b) Établir que pour tout entier naturel n , on a : $f(n) = [f(1)]^n$, et $f(-n) = \frac{1}{f(n)}$.
 - (c) Établir que pour tout rationnel $\frac{p}{q}$ où $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, on a : $f\left(\frac{p}{q}\right) = (f(1))^{\frac{p}{q}}$.
 - (d) On admet que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ c'est-à-dire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists (r_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}, r_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x.$$

Établir que pour tout réel x , $f(x) = e^{x \ln(f(1))}$.