
CORRIGÉ DU DEVOIR MAISON N°10
À RENDRE POUR LE MERCREDI 11 MARS 2026

Problème

On dispose de deux jetons A et B que l'on peut placer dans deux cases C_0 et C_1 , et d'un dispositif permettant de tirer au hasard et de manière équiprobable l'une des lettres a , b ou c . Au début de l'expérience, les deux jetons sont placés dans C_0 . On procède alors à une série de tirages indépendants de l'une des trois lettres a , b ou c .

À la suite de chaque tirage, on effectue l'opération suivante :

- si la lettre a est tirée, on change le jeton A de case,
- si la lettre b est tirée, on change le jeton B de case,
- si la lettre c est tirée, on ne change pas le placement des jetons.

On suppose qu'il existe un espace probabilisé dont la probabilité est notée P , qui modélise cette expérience et que l'on définit deux suites de variables aléatoires sur cet espace, $(X_n)_{n \geq 0}$ et $(Y_n)_{n \geq 0}$, décrivant les positions respectives des jetons A et B , en posant :

$$X_0 = Y_0 = 0,$$

et pour tout entier naturel n non nul, $X_n = 0$ si, à l'issue de la n^{e} opération, le jeton A se trouve dans C_0 et $X_n = 1$ s'il se trouve dans C_1 ; de même, $Y_n = 0$ si le jeton B est dans C_0 à l'issue de la n^{e} opération et $Y_n = 1$ s'il se trouve dans C_1 .

1 Simulation

Écrire un programme en Python permettant de simuler l'expérience, qui lira un entier N entré par l'utilisateur, représentant le nombre de tirages à effectuer, et qui affichera à l'écran la liste des couples observés (X_n, Y_n) pour $0 \leq n \leq N$.

```
from random import *
def simulation(N):
    lettres = ["a", "b", "c"]
    result = []
    x, y = 0, 0
    result.append([x, y])
    for _ in range(N):
        choix = choice(lettres)
        if choix == "a":
            x = 1 - x
        elif choix == "b":
            y = 1 - y
        result.append([x, y])
    return result
print(simulation(10))
```

2 Étude du mouvement du jeton A

1. (a) Soit n un entier strictement positif. Déterminer la probabilité que, à l'issue de la n^{e} opération, le jeton A n'ait jamais quitté C_0 .

Dire que A n'a jamais quitté C_0 signifie qu'aucune lettre a n'a été tirée pendant les n tirages. À chaque tirage, la probabilité de ne pas tirer de la lettre a est de $\frac{2}{3}$, et comme les tirages sont indépendants, on a :

$$P(\forall k \in \{1, \dots, n\}, X_k = 0) = \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

- (b) Quelle est la probabilité que le jeton A reste indéfiniment dans C_0 ?

« Rester indéfiniment dans C_0 » équivaut à « ne jamais tirer a », donc la probabilité que le jeton A reste indéfiniment dans C_0 est

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0.$$

2. Pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, on s'intéresse à l'événement D_k : à l'issue de la k^{e} opération, le jeton A revient pour la première fois dans C_0 . Déterminer la probabilité $P(D_k)$.

Si à l'issue de la k^{e} opération, le jeton A revient pour la première fois dans C_0 c'est qu'il était parti plus tôt. Donc D_k correspond à l'obtention d'un seul a avant le $k - 1^{\text{e}}$ tirage et à l'obtention de a au k^{e} tirage. Or le nombre de a lors des $k - 1$ premiers tirages suit une loi binomiale de paramètre $k - 1$ et $\frac{1}{3}$ car les tirages de lettre sont indépendants. Donc

$$P(D_k) = \binom{k-1}{1} \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1-1} \frac{1}{3} = (k-1) \frac{1}{9} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-2} \quad (k \geq 2).$$

3. Soient les matrices

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Calculer P^{-1} .

On a $\det(P) = 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 = -2$. Donc

$$P^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

- (b) Montrer que $P^{-1}MP$ est une matrice diagonale, notée D , que l'on déterminera.

$$\text{On obtient } P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{diag}(3, 1) = D.$$

- (c) En déduire, pour tout entier $n \geq 1$, une expression de M^n .

Comme $M = PDP^{-1}$, on a pour $n \geq 1$: $M^n = PD^nP^{-1}$ avec $D^n = \text{diag}(3^n, 1)$.
Un calcul matriciel donne alors

$$M^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^n + 1 & 3^n - 1 \\ 3^n - 1 & 3^n + 1 \end{pmatrix}.$$

4. (a) Calculer les probabilités $P(X_1 = 0)$ et $P(X_1 = 1)$.

À l'instant $n = 1$, A reste dans C_0 si l'on tire b ou c (probabilité $\frac{2}{3}$), et passe dans C_1 si l'on tire a (probabilité $\frac{1}{3}$). Donc

$$P(X_1 = 0) = \frac{2}{3}, \quad P(X_1 = 1) = \frac{1}{3}.$$

- (b) Déterminer une matrice Q telle que, pour tout entier naturel n , on ait l'égalité matricielle :

$$\begin{pmatrix} P(X_{n+1} = 0) \\ P(X_{n+1} = 1) \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \end{pmatrix}.$$

$(X_n = 0, X_n = 1)$ est un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = 0) &= P(X_{n+1} = 0 \cap X_n = 0) + P(X_{n+1} = 0 \cap X_n = 1) \\ &= P_{X_n=0}(X_{n+1} = 0) \times P(X_n = 0) + P_{X_n=1}(X_{n+1} = 0) \times P(X_n = 1) \\ &= \frac{2}{3}P(X_n = 0) + \frac{1}{3}P(X_n = 1) \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = 1) &= P(X_{n+1} = 1 \cap X_n = 0) + P(X_{n+1} = 1 \cap X_n = 1) \\ &= P_{X_n=0}(X_{n+1} = 1) \times P(X_n = 0) + P_{X_n=1}(X_{n+1} = 1) \times P(X_n = 1) \\ &= \frac{1}{3}P(X_n = 0) + \frac{2}{3}P(X_n = 1) \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient :

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

- (c) Pour tout entier naturel n non nul, calculer la matrice Q^n et en déduire la loi de la variable X_n .

On remarque que

$$Q = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}M.$$

Donc, pour $n \geq 1$, $Q^n = \frac{1}{3^n}M^n$. En utilisant l'expression obtenue pour M^n :

$$Q^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n & 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n & 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix}.$$

Comme $X_0 = 0$, le vecteur de loi initial est $(P(X_0 = 0), P(X_0 = 1))^T = (1, 0)^T$, donc

$$\begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \end{pmatrix} = Q^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, pour $n \geq 0$:

$$P(X_n = 0) = \frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n \right), \quad P(X_n = 1) = \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right).$$

3 Étude du mouvement du couple de jetons (A, B)

On suppose que l'on définit sur le même espace probabilisé une suite de variables aléatoires $(W_n)_{n \geq 0}$, à valeurs dans $\{0, 1, 2, 3\}$, décrivant les positions des deux jetons A et B , en posant : $W_0 = 0$, et pour tout entier naturel n non nul,

- $W_n = 0$ si, à l'issue de la n^e opération, A et B se trouvent tous les deux dans C_0 ,
 - $W_n = 1$ si, à l'issue de la n^e opération, A se trouve dans C_0 et B dans C_1 ,
 - $W_n = 2$ si, à l'issue de la n^e opération, A se trouve dans C_1 et B dans C_0 ,
 - $W_n = 3$ si, à l'issue de la n^e opération, les deux jetons A et B se trouvent dans C_1 .
5. Calculer les probabilités $P(W_1 = i)$ pour i égal à 0, 1, 2 et 3.

On part de $(A, B) = (0, 0)$, donc $W_0 = 0$.

- Si l'on tire c (probabilité $\frac{1}{3}$), rien ne change : $W_1 = 0$.
- Si l'on tire b (probabilité $\frac{1}{3}$), seul B change de case : $(0, 1)$ donc $W_1 = 1$.
- Si l'on tire a (probabilité $\frac{1}{3}$), seul A change de case : $(1, 0)$ donc $W_1 = 2$.

Il est impossible d'avoir directement $(1, 1)$ en un seul tirage, donc $P(W_1 = 3) = 0$. Ainsi :

$$P(W_1 = 0) = \frac{1}{3}, \quad P(W_1 = 1) = \frac{1}{3}, \quad P(W_1 = 2) = \frac{1}{3}, \quad P(W_1 = 3) = 0.$$

6. Déterminer la matrice R telle que, pour tout entier naturel n , on ait l'égalité matricielle :

$$\begin{pmatrix} P(W_{n+1} = 0) \\ P(W_{n+1} = 1) \\ P(W_{n+1} = 2) \\ P(W_{n+1} = 3) \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} P(W_n = 0) \\ P(W_n = 1) \\ P(W_n = 2) \\ P(W_n = 3) \end{pmatrix}.$$

Par définition, la matrice $R = (r_{i,j})_{0 \leq i,j \leq 3}$ vérifie $r_{i,j} = P(W_{n+1} = i \mid W_n = j)$.

La lettre a (probabilité $\frac{1}{3}$) échange les états où seul A est changé : $0 \leftrightarrow 2$ et $1 \leftrightarrow 3$.

La lettre b (probabilité $\frac{1}{3}$) échange les états où seul B est changé : $0 \leftrightarrow 1$ et $2 \leftrightarrow 3$.

La lettre c (probabilité $\frac{1}{3}$) laisse l'état inchangé.

Ainsi, $P(W_{n+1} = 0) = \frac{1}{3}P(W_n = 0) + \frac{1}{3}P(W_n = 1) + \frac{1}{3}P(W_n = 2)$. On fait de même pour les autres probabilités et on obtient (colonnes = état au temps n , lignes = état au temps $n + 1$) la matrice suivante :

$$R = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. On considère les matrices :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Pour tout entier naturel n non nul, calculer les matrices U^n et V^n .

— Pour U : chaque coefficient de U^2 vaut 4 (somme de 4 fois 1), donc $U^2 = 4U$.
Par récurrence (immédiate), pour tout $n \geq 1$:

$$U^n = 4^{n-1}U.$$

On a enfin $U^0 = I$.

— Pour V : un calcul immédiat donne $V^2 = I$. Ainsi, pour tout $n \geq 1$:

$$V^n = \begin{cases} I & \text{si } n \text{ est pair,} \\ V & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Cela peut s'écrire sans distinction de cas par la formule suivante :

$$V^n = \frac{(1 - (-1)^n)}{2}V + \frac{(1 + (-1)^n)}{2}I$$

(b) En déduire, pour tout entier naturel non nul, l'égalité

$$(U - V)^n = \frac{1}{4}(3^n - (-1)^n)U + (-1)^nV^n.$$

On remarque que $UV = VU = U$.

On peut donc appliquer le binôme de Newton :

$$(U - V)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} U^{n-k} V^k.$$

Le terme en $k = n$ vaut $(-1)^n V^n$.

Pour $0 \leq k \leq n-1$, on a $n-k \geq 1$ donc $U^{n-k} = 4^{n-k-1}U$ et $UV^k = U$, d'où

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n}{k} U^{n-k} V^k = \left(\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n}{k} 4^{n-k-1} \right) U.$$

Or

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} 4^{n-k} = (4-1)^n = 3^n,$$

donc en retirant le terme en $k = n$ (qui vaut $(-1)^n$), on obtient

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n}{k} 4^{n-k} = 3^n - (-1)^n.$$

En divisant par 4, cela donne

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n}{k} 4^{n-k-1} = \frac{1}{4}(3^n - (-1)^n),$$

d'où l'égalité demandée :

$$(U - V)^n = \frac{1}{4}(3^n - (-1)^n)U + (-1)^n V^n.$$

8. Pour tout entier naturel n non nul, calculer la matrice R^n et donner la loi de la variable W_n (on distinguera les cas n pair et n impair).

On constate que $R = \frac{1}{3}(U - V)$ (mêmes coefficients : $\frac{1}{3}$ partout sauf sur l'antidiagonale où c'est 0). Donc, pour $n \geq 1$:

$$R^n = \frac{1}{3^n}(U - V)^n.$$

En utilisant la formule précédente :

$$R^n = \frac{1}{4}\left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)U + \left(-\frac{1}{3}\right)^n V^n.$$

Comme $W_0 = 0$, le vecteur de loi initial est $e_0 = (1, 0, 0, 0)^\top$. On obtient alors

$$\begin{pmatrix} P(W_n = 0) \\ P(W_n = 1) \\ P(W_n = 2) \\ P(W_n = 3) \end{pmatrix} = R^n e_0 = \frac{1}{4}\left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)\mathbf{1} + \left(-\frac{1}{3}\right)^n V^n e_0,$$

où $\mathbf{1} = (1, 1, 1, 1)^\top$.

Cas n pair. Alors $\left(-\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ et $V^n = I$, donc $V^n e_0 = e_0$.

On obtient :

$$P(W_n = 0) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n, \quad P(W_n = 1) = P(W_n = 2) = P(W_n = 3) = \frac{1}{4}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right).$$

Cas n impair. Alors $\left(-\frac{1}{3}\right)^n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n$ et $V^n = V$, donc $V^n e_0 = V e_0 = (0, 0, 1, 0)^\top$.

On obtient alors :

$$P(W_n = 0) = P(W_n = 1) = P(W_n = 2) = \frac{1}{4}\left(1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right), \quad P(W_n = 3) = \frac{1}{4} - \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

4 Étude d'un temps de séjour

On suppose que chaque tirage, avec l'opération qui le suit, dure une minute. Ainsi, à l'issue de la n^e opération, n minutes se sont écoulées depuis le début de l'expérience.

Soit n un entier naturel non nul. On suppose que le nombre de minutes écoulées pendant lesquelles le jeton A a séjourné dans C_1 , entre le début de l'expérience et l'issue de la n^e opération, est une variable aléatoire que l'on note T_n .

9. Exprimer T_n à l'aide des variables X_k , pour k compris entre 1 et n .

Pour chaque minute k (entre l'issue de l'opération $k - 1$ et l'issue de l'opération k), le jeton A est en C_1 exactement lorsque $X_k = 1$. Ainsi

$$T_n = \sum_{k=1}^n X_k.$$

10. En déduire l'espérance $E(T_n)$.

Par linéarité de l'espérance :

$$E(T_n) = \sum_{k=1}^n E(X_k) = \sum_{k=1}^n P(X_k = 1).$$

Or, d'après la loi de X_k trouvée plus haut,

$$P(X_k = 1) = \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3} \right)^k \right).$$

Donc

$$E(T_n) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(1 - \left(\frac{1}{3} \right)^k \right) = \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{3} \right)^k.$$

La somme géométrique vaut

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{3} \right)^k = \frac{\frac{1}{3} (1 - (\frac{1}{3})^n)}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3} \right)^n \right).$$

Finalement

$$E(T_n) = \frac{n}{2} - \frac{1}{4} \left(1 - \left(\frac{1}{3} \right)^n \right) = \frac{n}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3} \right)^n.$$

11. Calculer la limite de $\frac{1}{n}E(T_n)$ quand n tend vers l'infini.

On a

$$\frac{1}{n}E(T_n) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4n} + \frac{1}{4n} \left(\frac{1}{3} \right)^n.$$

Comme $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $\left(\frac{1}{3} \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ (car $|\frac{1}{3}| = \frac{1}{3} < 1$), on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n}E(T_n) = \frac{1}{2}.$$