

20

Dérivation des fonctions réelles

Dans tout le chapitre, I désigne un intervalle réel.

TABLE DES MATIÈRES

| | |
|--|----------|
| 20 Dérivation des fonctions réelles | 1 |
| 20.1 Dérivée | 1 |
| 20.1.1 Définition et premières propriétés | 1 |
| 20.1.2 Opérations sur les dérivées | 5 |
| 20.1.3 Dérivées d'ordre supérieur | 9 |
| 20.2 Théorème de Rolle et conséquences | 10 |
| 20.2.1 Dérivée et extrema | 10 |
| 20.2.2 Théorème de Rolle | 11 |
| 20.2.3 Monotonie et signe de la dérivée | 13 |

20.1 Dérivée

20.1.1 Définition et premières propriétés

Définition 1: Nombre dérivé et fonction dérivée

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

- Soit $a \in I$. On dit que f est dérivable en a si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe et est finie. Dans ce cas, on note

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

On dit que $f'(a)$ est le nombre dérivé de la fonction f au point a .

- On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en chaque point de I .

On note alors $f' : \begin{matrix} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{matrix}$ la fonction dérivée de f .

Remarque 1. • En physique, on note également $\frac{df}{dx}(a)$ au lieu de $f'(a)$.

- On a la définition équivalente suivante : f est dérivable en a si $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ existe et est finie. Dans ce cas, on note $f'(a)$ cette limite.

L'équivalence des deux définitions est immédiate en posant $h = x - a$.

Exemple 1. Soient $(m, p) \in \mathbb{R}^2$. Soit $f : x \mapsto mx + p$ une fonction affine. Alors f est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = m$. En effet, pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{mx + p - ma - p}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{m(x - a)}{x - a} = m.$$

Remarque 2. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in I$ tel que f est dérivable en a . Pour tout $x \in I$, la droite qui relie les points $(a, f(a))$ et $(x, f(x))$, qui appartiennent à la courbe représentative de f , a pour pente $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

Quand le point x tend vers a , cette droite tend vers la tangente à la courbe représentative de f au point $(a, f(a))$, ce qui permet d'interpréter géométriquement $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ comme le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point $(a, f(a))$. Ainsi, si $f'(a) = 0$, alors la tangente est horizontale.

Si f n'est pas dérivable en a et si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \pm\infty$, alors la courbe représentative de f admet une tangente verticale au point $(a, f(a))$.

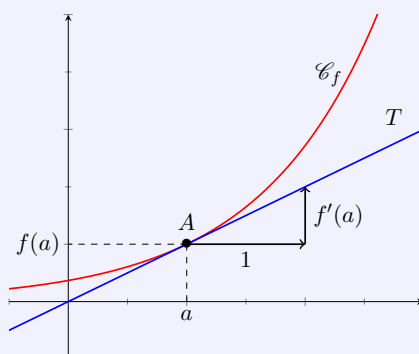
Par exemple, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ donc la courbe représentative de la fonction racine carrée possède une tangente verticale en l'origine.

Proposition 1: Equation de la tangente

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in I$. On suppose que f est dérivable en a .

L'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point $(a, f(a))$ est

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$



Démonstration. On a vu que le coefficient directeur de la tangente est $f'(a)$. Ainsi, son équation est de la forme $y = f'(a)x + b$, où b est une constante à déterminer. Puisque la tangente passe par le point $(a, f(a))$, on a $f(a) = f'(a)a + b$ d'où $b = f(a) - af'(a)$.

Ainsi, l'équation de la tangente est

$$y = f'(a)x + f(a) - af'(a) = f'(a)(x - a) + f(a).$$

■

Exemple 2. • La tangente à la courbe représentative de la fonction exponentielle au point $(0, 1)$ a pour équation $y = x + 1$.

• La tangente à la courbe représentative de la fonction logarithme népérien au point $(1, 0)$ a pour équation $y = x - 1$.

• La tangente à la courbe représentative de la fonction sinus en l'origine a pour équation $y = x$.

• La tangente à la courbe représentative de la fonction cosinus en $(0, 1)$ est horizontale et a pour équation $y = 1$.

Définition 2: Nombre dérivé à droite, nombre dérivé à gauche

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in I$.

- On dit que f est dérivable à droite en a si $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe et est finie.

On note alors $f'_d(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

- On dit que f est dérivable à gauche en a si $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe et est finie.

On note alors $f'_g(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

Proposition 2

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in I$. On suppose que a n'est pas une des bornes de I , i.e. il existe $r > 0$ tel que $[a - r, a + r] \subset I$.

La fonction f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à gauche et à droite en a et $f'_g(a) = f'_d(a)$.

On a dans ce cas $f'(a) = f'_g(a) = f'_d(a)$.

Démonstration. On introduit la fonction T_a définie sur $I \setminus \{a\}$ par $T_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

- Supposons que f est dérivable en a . Alors $\lim_{x \rightarrow a} T_a(x) = f'(a)$.

On en déduit que $\lim_{x \rightarrow a^-} T_a(x) = f'(a)$ et $\lim_{x \rightarrow a^+} T_a(x) = f'(a)$, ce qui assure que f est dérivable à gauche et à droite en a et $f'(a) = f'_g(a) = f'_d(a)$.

- Supposons que f est dérivable à gauche et à droite en a et que $f'_g(a) = f'_d(a)$. Alors $\lim_{x \rightarrow a^-} T_a(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} T_a(x) = f'_g(a) = f'_d(a) = l$.

Ceci permet de prolonger T_a par continuité en a en posant $T_a(a) = l$.

On a alors $\lim_{x \rightarrow a^-} T_a(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} T_a(x) = T_a(a) = l$ donc $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$, ce qui prouve que f est dérivable en a de dérivée $f'(a) = l = f'_g(a) = f'_d(a)$. ■

Exemple 3. Considérons f la fonction valeur absolue définie sur \mathbb{R} . Pour tout $x < 0$, $f(x) = -x$ donc f est dérivable sur \mathbb{R}_-^* et pour tout $x < 0$, $f'(x) = -1$.

Pour tout $x > 0$, $f(x) = x$ donc f est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et pour tout $x > 0$, $f'(x) = 1$.

Montrons que f n'est pas dérivable en 0.

On a $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1$ donc f est dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0) = -1$.

De même, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$ donc f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 1$.

Puisque $f'_g(0) \neq f'_d(0)$, on en déduit que la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0.

Enfin, le résultat suivant est très pratique et est une première incursion dans le domaine des développements limités :

Proposition 3: Existence d'un développement limité d'ordre 1

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in I$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1. La fonction f est dérivable en a .
2. Il existe une fonction $\varepsilon : I \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$ et un réel A tels que pour tout $x \in I$, $f(x) = f(a) + A(x - a) + (x - a)\varepsilon(x)$.

Dans ce cas, on a $A = f'(a)$.

Démonstration. • Montrons que 1) \Rightarrow 2). Supposons que f est dérivable en a .

$$\text{Posons pour tout } x \in I, \varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) & \text{si } x \neq a \\ 0 & \text{si } x = a. \end{cases}$$

Puisque f est dérivable en a , on a

$$\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) = 0 = \varepsilon(a).$$

Par ailleurs, on a bien $f(a) + f'(a)(a - a) + (a - a)\varepsilon(a) = f(a)$ et pour tout $x \in I \setminus \{a\}$,

$$f(a) + f'(a)(x - a) + (x - a)\varepsilon(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + (x - a) \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \right) = f(x),$$

donc pour tout $x \in I$, $f(x) = f(a) + A(x - a) + (x - a)\varepsilon(x)$ avec $A = f'(a)$.

On a donc bien montré que 1) \Rightarrow 2).

• Montrons que 2) \Rightarrow 1).

On suppose qu'il existe une fonction $\varepsilon : I \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$ et un réel A tels que pour tout $x \in I$, $f(x) = f(a) + A(x - a) + (x - a)\varepsilon(x)$. On a alors pour $x \in I \setminus \{a\}$,

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = A + \varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} A$$

donc f est dérivable en a et $f'(a) = A$. ■

On en déduit le lien suivant fondamental entre dérivation et continuité :

Corollaire 1: Dérivabilité implique continuité

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable en $a \in I$.

Alors f est continue en a .

Ainsi, si f est dérivable sur I , alors f est continue sur I .

Démonstration. On suppose que f est dérivable en a . D'après la proposition précédente, il existe une fonction $\varepsilon : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$ et vérifiant pour tout $x \in I$,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + (x - a)\varepsilon(x).$$

On a alors immédiatement $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, ce qui prouve la continuité de f en a . ■

Exemple 4. La réciproque est fautive : en effet, la fonction valeur absolue est continue sur \mathbb{R} (donc en particulier en 0) mais n'est pas dérivable en 0.

De même, la fonction racine carrée est continue sur \mathbb{R}_+ (donc en particulier en 0) mais n'est pas dérivable en 0.

Corollaire 2: Dérivation des fonctions constantes

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction constante sur I .

Alors f est dérivable sur I et pour tout $a \in I$, $f'(a) = 0$.

Démonstration. Soit $a \in I$. Puisque f est constante sur I , alors on a pour tout $x \in I$

$$f(x) = f(a) = f(a) + A(x - a) + (x - a)\varepsilon(x)$$

où $A = 0$ et ε est la fonction identiquement nulle sur I (on a donc bien $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$).

D'après la proposition précédente, ceci implique que f est dérivable en a et que

$$f'(a) = A = 0.$$

Ceci est valable en tout point $a \in I$, d'où le résultat. ■

Remarque 3. On verra plus loin que la réciproque est vraie, à savoir que si une fonction est dérivable sur un intervalle de dérivée nulle, alors la fonction est constante sur cet intervalle.

20.1.2 Opérations sur les dérivées

Proposition 4: Opérations sur les dérivées

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in I$. On suppose que f et g sont dérivables en a .

1. Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, la fonction $\lambda f + \mu g$ est dérivable en a et

$$(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a).$$

2. La fonction fg est dérivable en a et

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

3. Supposons que $g(a) \neq 0$.

Alors $\frac{f}{g}$ est dérivable en a et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}.$$

En particulier la fonction $\frac{1}{g}$ est dérivable en a et

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{g(a)^2}.$$

Démonstration.

1. Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{(\lambda f + \mu g)(x) - (\lambda f + \mu g)(a)}{x - a} = \lambda \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \mu \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \lambda f'(a) + \mu g'(a) \in \mathbb{R}.$$

2. Pour tout $x \in I \setminus \{a\}$, on a

$$\frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x - a} = \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x - a} = g(x) \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + f(a) \frac{g(x) - g(a)}{x - a}.$$

Par produit de limites, on a $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = g(a)f'(a)$ et $\lim_{x \rightarrow a} f(a) \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = f(a)g'(a)$. Par somme on en déduit que fg est dérivable en a et que

$$(fg)'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x - a} = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

3. On suppose que $g(a) \neq 0$. Soit $\varepsilon = \frac{|g(a)|}{2} > 0$.

Puisque g est dérivable en a , alors g est continue en a donc il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in I \cap [a - \alpha, a + \alpha]$, $|g(x) - g(a)| \leq \frac{|g(a)|}{2}$ d'où, pour tout $x \in I \cap [a - \alpha, a + \alpha]$,

$$|g(x)| \geq |g(a)| - |g(x) - g(a)| \geq |g(a)| - \frac{|g(a)|}{2} = \frac{|g(a)|}{2} > 0,$$

ce qui assure que pour tout $x \in I \cap [a - \alpha, a + \alpha]$, $|g(x)| > 0$, d'où $g(x) \neq 0$.

Il est donc légitime de définir $\frac{f}{g}$ sur $I \cap [a - \alpha, a + \alpha]$ et pour tout $x \in I \cap [a - \alpha, a + \alpha]$,

$$\frac{\frac{f}{g}(x) - \frac{f}{g}(a)}{x - a} = \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)}}{x - a} = \frac{f(x)g(a) - f(a)g(x)}{(x - a)g(x)g(a)} = \frac{1}{g(x)g(a)} \left(g(a) \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f(a) \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right).$$

Puisque g est dérivable en a , g est continue en a donc $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a) \neq 0$ d'où $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)g(a)} = \frac{1}{g(a)^2}$.

Puisque f et g sont dérivables en a , on a $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$ et $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = g'(a)$ donc finalement $\frac{f}{g}$ est dérivable en a et on a

$$\left(\frac{f}{g} \right)'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{f}{g}(x) - \frac{f}{g}(a)}{x - a} = \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)}}{x - a} = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}.$$

Enfin, dans le cas particulier où f est la constante égale à 1, la fonction f' est identiquement nulle donc

$$\left(\frac{1}{g} \right)'(a) = -\frac{g'(a)}{g(a)^2}.$$

■

Exemple 5. La fonction $\tan = \frac{\sin}{\cos}$ est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, et on a pour tout $k \in \mathbb{Z}$, pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$,

$$\tan'(x) = \frac{\sin'(x) \cos(x) - \sin(x) \cos'(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x).$$

Proposition 5: Dérivation d'une fonction composée

Soit $f : I \rightarrow J$, soit $g : J \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in I$.

On suppose que f est dérivable en a et que g est dérivable en $f(a)$.

Alors $g \circ f$ est dérivable en a et

$$(g \circ f)'(a) = f'(a)g'(f(a)).$$

Démonstration. Puisque f est dérivable en a , il existe une fonction $\varepsilon : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$ et telle que pour tout $x \in I$,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + (x - a)\varepsilon(x).$$

De même, puisque g est dérivable en $f(a)$, il existe une fonction $\delta : J \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\lim_{x \rightarrow f(a)} \delta(x) = 0$ et telle que pour tout $x \in J$,

$$g(x) = g(f(a)) + g'(f(a))(x - f(a)) + (x - f(a))\delta(x).$$

Puisque pour tout $x \in I$, $f(x) \in J$, on a pour tout $x \in I$,

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g(f(a)) + g'(f(a))(f(x) - f(a)) + (f(x) - f(a))\delta(f(x)) \\ &= g(f(a)) + g'(f(a))(f'(a)(x - a) + (x - a)\varepsilon(x)) + (f'(a)(x - a) + (x - a)\varepsilon(x))\delta(f(x)) \\ &= g \circ f(a) + f'(a)g'(f(a))(x - a) + (x - a)[g'(f(a))\varepsilon(x) + \delta(f(x))(f'(a) + \varepsilon(x))]. \end{aligned}$$

Posons pour tout $x \in I$, $\alpha(x) = g'(f(a))\varepsilon(x) + \delta(f(x))(f'(a) + \varepsilon(x))$.

Par hypothèse, on a $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$.

De plus, puisque f est dérivable en a , donc continue en a , $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Par hypothèse, $\lim_{x \rightarrow f(a)} \delta(x) = 0$ donc par composition de limites, $\lim_{x \rightarrow a} \delta(f(x)) = 0$.

Ainsi, on a $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$.

On a donc prouvé l'existence d'une fonction $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$ et telle que pour tout $x \in I$, $g \circ f(x) = g \circ f(a) + f'(a)g'(f(a))(x - a) + (x - a)\alpha(x)$.

D'après la proposition 3, on en déduit que $g \circ f$ est dérivable en a et que

$$(g \circ f)'(a) = f'(a)g'(f(a)).$$

■

Corollaire 3: Dérivation de fonctions composées

Soit $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I .

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction u^n est dérivable sur I et on a pour tout $x \in I$,

$$(u^n)'(x) = nu'(x)u(x)^{n-1}.$$

2. Si u est à valeurs dans \mathbb{R}^* , alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $\frac{1}{u^n}$ est dérivable sur I et on a pour tout $x \in I$,

$$\left(\frac{1}{u^n}\right)'(x) = -\frac{nu'(x)}{u^{n+1}(x)}.$$

3. La fonction $\exp \circ u$ est dérivable sur I et on a pour tout $x \in I$,

$$(\exp \circ u)'(x) = u'(x) \exp(u(x)).$$

4. Si u est à valeurs dans \mathbb{R}_+^* , alors \sqrt{u} et $\ln(u)$ sont dérivables sur I et on a pour tout $x \in I$,

$$(\ln \circ u)'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} \quad \text{et} \quad (\sqrt{u})'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}.$$

5. Les fonctions $\cos \circ u$ et $\sin \circ u$ sont dérivables sur I et on a pour tout $x \in I$,

$$(\cos \circ u)'(x) = -u'(x) \sin(u(x)) \quad \text{et} \quad (\sin \circ u)'(x) = u'(x) \cos(u(x)).$$

Démonstration. Ceci découle de la proposition précédente et des dérivées des fonctions usuelles. ■

Proposition 6: Dérivation d'une fonction réciproque

Soient I et J des intervalles réels. Soit $f : I \rightarrow J$ une application continue sur I , strictement monotone et bijective de bijection réciproque $f^{-1} : J \rightarrow I$.

Soit $a \in I$ tel que f est dérivable en a avec $f'(a) \neq 0$.

Alors f^{-1} est dérivable en $f(a)$ et

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Ainsi, si f est dérivable sur I alors pour tout $x \in J$, f^{-1} est dérivable en x si et seulement si $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$ et dans ce cas, on a

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Démonstration. Soit $a \in I$ tel que f est dérivable en a avec $f'(a) \neq 0$. Montrons que f^{-1} est dérivable en $f(a)$.

Posons $X = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(X) = x$.

D'après le théorème de la bijection, puisque f est continue et strictement monotone sur I alors f^{-1} est également continue sur J donc $\lim_{x \rightarrow f(a)} f^{-1}(x) = f^{-1}(f(a)) = a$. Ainsi, quand $x = f(X)$ tend vers $f(a)$, alors $X = f^{-1}(x)$ tend vers a d'où

$$\lim_{x \rightarrow f(a)} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(f(a))}{x - f(a)} = \lim_{x \rightarrow f(a)} \frac{f^{-1}(x) - a}{x - f(a)} = \lim_{X \rightarrow a} \frac{X - a}{f(X) - f(a)} = \frac{1}{f'(a)}.$$

■

Rappelons que la bijection réciproque de $\tan :] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$ est $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Corollaire 4: Dérivée de la fonction arctan

La fonction arctan est dérivable sur \mathbb{R} de dérivée

$$\forall x \in \mathbb{R}, \arctan'(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Démonstration. Pour tout $x \in] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on a $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) \neq 0$ donc d'après la proposition précédente, arctan est dérivable sur \mathbb{R} et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(x))}.$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\tan(\arctan(x)) = x$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\arctan'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$. ■

Remarque 4. Ainsi, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x) - \arctan(0)}{x - 0} = \arctan'(0) = 1$.

On en déduit que $\arctan(x) \underset{0}{\sim} x$.

20.1.3 Dérivées d'ordre supérieur

Définition 3: Dérivée n -ème

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, soit $a \in I$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

On appelle dérivée n -ème de f en a le nombre :

- $f^{(0)}(a) = f(a)$ et $f^{(0)} = f$ si $n = 0$;
- $f^{(n)}(a) = (f^{(n-1)})'(a)$ si $f^{(n-1)}$ existe et est dérivable en a si $n \geq 1$. On dit alors que f est n fois dérivable en a .

On dit que f est n fois dérivable sur I si f est n fois dérivable en tout point de I et on note $f^{(n)}$ la dérivée n -ème de f sur I .

Remarque 5. On a $f^{(0)} = f, f^{(1)} = f', f^{(2)} = f'' \dots$

Exemple 6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $f : x \mapsto x^n$ définie sur \mathbb{R} .

Alors pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}.$$

Définition 4: Fonctions de classe \mathcal{C}^n

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

On dit que f est de classe \mathcal{C}^n sur I si f est n fois dérivable sur I et si $f^{(n)}$ est continue sur I .

L'ensemble des fonctions réelles de classe \mathcal{C}^n sur I se note $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$.

Remarque 6. • $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions continues sur I .

- Si $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ alors pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket, f \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$.

Exemple 7. Il existe des fonctions dérivables sur \mathbb{R} dont la dérivée n'est pas continue sur \mathbb{R} .

$$\text{Considérons } f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{array}$$

Tout d'abord, puisque la fonction sinus est bornée sur \mathbb{R} , on a bien $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 = f(0)$ donc f est continue en 0. Par ailleurs, pour tout $x \in \mathbb{R}^*, f$ est continue en x comme composée de fonctions continues en x .

Montrons que f est dérivable sur \mathbb{R} .

La fonction f est dérivable sur \mathbb{R}^* comme composée de fonctions dérivables sur \mathbb{R}^* et on a pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Par ailleurs, f est dérivable en 0 puisque

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

donc f est dérivable sur \mathbb{R} de dérivée

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

En revanche, f' n'est pas continue en 0 car $\lim_{x \rightarrow 0} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ mais $x \mapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'admet pas de limite en 0 puisque la fonction cosinus n'admet pas de limite en l'infini.

Ainsi, f' n'admet pas de limite en 0 donc elle n'y est pas continue.

On a donc $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, f est dérivable sur \mathbb{R} mais $f \notin \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Définition 5: Fonctions de classe \mathcal{C}^∞

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

On dit que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur I si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est de classe \mathcal{C}^n sur I .

L'ensemble des fonctions réelles de classe \mathcal{C}^∞ sur I se note $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$.

Exemple 8. • La fonction exponentielle, les fonctions cosinus et sinus, les fonctions puissances d'exposant entier sont de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

• La fonction logarithme népérien et la fonction racine carrée sont de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_+^* .

On sait que les combinaisons linéaires, produits, quotients, composées de fonctions continues (resp. dérivables) sont également continues (resp. dérivables). On a donc les mêmes propriétés pour les fonctions de classe \mathcal{C}^n .

Proposition 7: Opérations sur les fonctions de classe \mathcal{C}^n

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions de classe \mathcal{C}^n sur I .

1. Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda f + \mu g$ est de classe \mathcal{C}^n sur I et on a pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$(\lambda f + \mu g)^{(k)} = \lambda f^{(k)} + \mu g^{(k)}.$$

2. La fonction fg est de classe \mathcal{C}^n sur I .

3. Si pour tout $x \in I$, $g(x) \neq 0$ alors la fonction $\frac{f}{g}$ est de classe \mathcal{C}^n sur I .

Proposition 8: Composition de fonctions de classe \mathcal{C}^n

Soient I et J deux intervalles réels. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $f : I \rightarrow J$ une fonction de classe \mathcal{C}^n sur I et soit $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^n sur J .

Alors la fonction $g \circ f$ est de classe \mathcal{C}^n sur I .

Remarque 7. On en déduit que les combinaisons linéaires, produits, quotients et compositions de fonctions de classe \mathcal{C}^∞ sont des fonctions de classe \mathcal{C}^∞ .

20.2 Théorème de Rolle et conséquences

20.2.1 Dérivée et extrema

Définition 6

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in I$.

- On dit que f admet un minimum sur I en a si pour tout $x \in I$, $f(x) \geq f(a)$.
- On dit que f admet un maximum sur I en a si pour tout $x \in I$, $f(x) \leq f(a)$.
- On dit que f admet un extremum sur I en a si f y admet un maximum ou un minimum.

Exemple 9. • La fonction $x \mapsto x^2$ atteint son minimum sur \mathbb{R} en 0.

• La fonction sinus admet son maximum sur $[0, \pi]$ en $\frac{\pi}{2}$.

Théorème 1: Dérivée et extrema

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $]a, b[$. Soit $c \in]a, b[$. On suppose que f admet un extremum sur $]a, b[$ en c .
Alors $f'(c) = 0$.

Démonstration. Faisons la preuve dans le cas où la fonction f admet en c un minimum sur $]a, b[$. La preuve dans le cas où f y admet un maximum est analogue.

Par hypothèse, on a donc pour tout $x \in]a, b[$, $f(x) \geq f(c)$ d'où $f(x) - f(c) \geq 0$.

Puisque $c \in]a, b[$, alors f est dérivable à gauche et à droite en c et on a $f'(c) = f'_g(c) = f'_d(c)$.

On a $f'_g(c) = \lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$ car $f(x) - f(c) \geq 0$ et $x - c \leq 0$ pour tout $x \in]a, c[$.

D'autre part, $f'_d(c) = \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$ car $f(x) - f(c) \geq 0$ et $x - c \geq 0$ pour tout $x \in]c, b[$.

Ainsi, puisque $f'(c) = f'_g(c) = f'_d(c)$, alors $f'(c) \leq 0$ et $f'(c) \geq 0$, ce qui implique que $f'(c) = 0$. ■

Remarque 8. • Ainsi, les extrema d'une fonction dérivable à l'intérieur d'un intervalle sont à chercher parmi les points en lesquels la dérivée s'annule.

• La réciproque est fautive. Soit $f : x \mapsto x^3$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2$ donc $f'(0) = 0$ mais 0 n'est pas un extremum de f sur \mathbb{R} .

• Si l'extremum est atteint sur une des bornes du segment, le théorème n'est plus forcément vrai.

En effet, la fonction sin atteint son minimum sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ en 0 mais $\sin'(0) = 1 \neq 0$.

20.2.2 Théorème de Rolle**Théorème 2: Théorème de Rolle**

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$.

Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration. Il y a deux cas :

• Si f est constante sur $[a, b]$, alors pour tout $c \in]a, b[$, $f'(c) = 0$.

• Supposons que f n'est pas constante sur $[a, b]$. Puisque f est continue sur $[a, b]$, d'après le théorème des bornes atteintes, il existe $(m, M) \in [a, b]^2$ tels que $f([a, b]) = [f(m), f(M)]$.

Puisque f n'est pas constante sur $[a, b]$, $f(m) \neq f(M)$.

Si $m \in]a, b[$, puisque f atteint son minimum en m et que f est dérivable sur $]a, b[$, alors $f'(m) = 0$.

Si $m \notin]a, b[$, alors $m \in \{a, b\}$ donc $f(m) = f(a) = f(b)$. Puisque $f(M) \neq f(m) = f(a) = f(b)$, nécessairement $M \in]a, b[$ donc comme précédemment, $f'(M) = 0$.

Dans tous les cas, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$. ■

Exemple 10. On a $\sin(0) = \sin(\pi) = 0$ et sin est continue sur $[0, \pi]$ et dérivable sur $]0, \pi[$.

D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]0, \pi[$ tel que $\sin'(c) = 0$. En effet, $c = \frac{\pi}{2}$.

Remarque 9. Si f n'est pas continue sur $[a, b]$ mais seulement sur $]a, b[$ le résultat n'est plus vrai.

En effet, soit $f : \begin{array}{ccc} [0, 1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ x & \text{si } x \in]0, 1[. \end{cases} \end{array}$

La fonction f est continue sur $]0, 1]$, dérivable sur $]0, 1[$ et vérifie $f(0) = f(1) = 1$ mais pour tout $x \in]0, 1[$, $f'(x) = 1 \neq 0$.

Corollaire 5: Théorème des accroissements finis

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Démonstration. Posons pour tout $x \in [a, b]$, $g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$.

Puisque f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, alors g est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

Par ailleurs, $g(a) = g(b) = f(a)$.

D'après le théorème de Rolle, on en déduit qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$, i.e.

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

d'où $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. ■

Remarque 10. • Géométriquement, le théorème des accroissements finis affirme qu'il existe un point de la courbe situé entre $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ tel que la tangente à la courbe en ce point soit parallèle à la corde reliant les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$.

• Physiquement, il signifie que si on se déplace entre le temps $t = a$ et le temps $t = b$ d'un point $f(a)$ à un point $f(b)$ avec une vitesse moyenne $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, il existe un instant $c \in]a, b[$ pour lequel la vitesse instantanée $f'(c)$ est égale à la vitesse moyenne.

• Le théorème de Rolle et le théorème des accroissements finis sont en fait équivalents.

En effet, on peut démontrer le théorème de Rolle à partir du théorème des accroissements finis.

Sous les mêmes hypothèses, si $f(a) = f(b)$, alors d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

• Si la fonction f' est bornée sur $]a, b[$, on déduit du théorème des accroissements finis que

$$\left| \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right| \leq \sup_{x \in]a, b[} |f'(x)|,$$

dite inégalité des accroissements finis.

Exemple 11. Soit $x > 0$. La fonction $f : t \mapsto \ln(1 + t)$ est continue sur $[0, x]$ et dérivable sur $]0, x[$.

Ainsi, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]0, x[$ tel que

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c),$$

i.e.

$$\frac{\ln(1 + x)}{x} = \frac{1}{1 + c}.$$

Or, pour tout $c \in]0, x[$, $\frac{1}{1 + x} \leq \frac{1}{1 + c} \leq 1$ donc pour tout $x > 0$

$$\frac{1}{1 + x} \leq \frac{\ln(1 + x)}{x} \leq 1$$

d'où pour tout $x \geq 0$, $\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$ (on remarque que la formule est valable aussi pour $x = 0$).

20.2.3 Monotonie et signe de la dérivée

Théorème 3: Lien entre signe de la dérivée et monotonie

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle I .

1. La fonction f est croissante sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$.
2. La fonction f est décroissante sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) \leq 0$.
3. La fonction f est constante sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$.

Démonstration.

1. • Supposons que la fonction f est croissante sur I .

Soit $c \in I$. Montrons que $f'(c) \geq 0$.

- (a) Supposons que c n'est pas l'extrémité droite de I .

Puisque f est dérivable en c , alors $f'(c) = f'_d(c)$.

$$\text{On a } f'_d(c) = \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Or, pour tout $x \in I \cap]c, +\infty[$, $x - c \geq 0$ et $f(x) - f(c) \geq 0$ car f est croissante sur I .

Ainsi, pour tout $x \in I \cap]c, +\infty[$, $\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$ donc par passage à la limite,

$$f'_d(c) = \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$$

d'où $f'(c) \geq 0$.

- (b) Si c est l'extrémité droite de I , on a $f'(c) = f'_g(c)$.

$$\text{On a } f'_g(c) = \lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Or, pour tout $x \in I \cap]-\infty, c[$, $x - c \leq 0$ et $f(x) - f(c) \leq 0$ car f est croissante sur I .

Ainsi, pour tout $x \in I \cap]-\infty, c[$, $\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$ donc par passage à la limite,

$$f'_g(c) = \lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$$

d'où $f'(c) \geq 0$.

Dans tous les cas, on a bien $f'(c) \geq 0$ pour tout $c \in I$.

- Supposons que pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$.

Montrons que f est croissante sur I . Soient $(a, b) \in I^2$ avec $a < b$.

Puisque I est un intervalle, $[a, b] \subset I$.

Alors f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ donc d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

i.e. $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$.

Par hypothèse, on a $f'(c) \geq 0$ et $b - a > 0$ donc $f(b) - f(a) \geq 0$, i.e. $f(a) \leq f(b)$.

On en déduit que la fonction f est croissante sur I .

2. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} f \text{ est décroissante sur } I &\Leftrightarrow -f \text{ est croissante sur } I \\ &\Leftrightarrow \forall x \in I, (-f)'(x) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in I, -f'(x) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in I, f'(x) \leq 0. \end{aligned}$$

3. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} f \text{ est constante sur } I &\Leftrightarrow f \text{ est croissante et décroissante sur } I \\ &\Leftrightarrow \forall x \in I, f'(x) \geq 0 \text{ et } f'(x) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in I, f'(x) = 0. \end{aligned}$$

Remarque 11. • La même preuve montre que si f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, alors f est croissante (resp. décroissante) sur $[a, b]$ si et seulement si pour tout $x \in]a, b[$, $f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) \leq 0$).

• Ce résultat n'est valable que sur un intervalle. Soit $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ pour $x \in \mathbb{R}^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ mais f n'est pas décroissante sur \mathbb{R}^* puisque $f(-1) = -1 < 1 = f(1)$.

Théorème 4: Stricte monotonie et signe de la dérivée

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I .

1. Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$, alors la fonction f est strictement croissante sur I .
2. Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$, alors la fonction f est strictement décroissante sur I .

Démonstration.

1. Supposons que pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$. Soient $(a, b) \in I^2$ avec $a < b$. Puisque f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]a, b[$ tel que $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$, i.e. $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$.
Par hypothèse, $b - a > 0$ et $f'(c) > 0$ donc $f(b) - f(a) > 0$, i.e. $f(a) < f(b)$ ce qui implique la stricte croissance de f sur I .
2. Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$, alors $-f'(x) > 0$, ce qui implique que la fonction $-f$ est strictement croissante sur I , d'où la stricte décroissance de f sur I .

Remarque 12. • La même preuve montre que si f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, alors si pour tout $x \in]a, b[$, $f'(x) > 0$ (resp. $f'(x) < 0$), f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur $[a, b]$.

• La réciproque est fautive. En effet, soit $f : x \mapsto x^3$. La fonction f est strictement croissante sur \mathbb{R} mais $f'(0) = 0$.

En fait, on a une réciproque partielle au théorème précédent.

Théorème 5: Stricte monotonie et signe de la dérivée

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur I . Soit $A \subset I$ un ensemble fini.

On suppose que pour tout $x \in I \setminus A$, la fonction f est dérivable en x et $f'(x) > 0$.

Alors f est strictement croissante sur I .

Autrement dit, une fonction continue sur un intervalle et dont, sauf peut-être en un nombre fini de points, la dérivée existe et est strictement positive, est strictement croissante sur cet intervalle.

Démonstration. Soit $A = \{a_1, \dots, a_n\}$. Alors

$$I = (I \cap]-\infty, a_1]) \bigcup_{i=1}^{n-1} [a_i, a_{i+1}] \cup (I \cap [a_n, +\infty[).$$

D'après le théorème précédent, f est strictement croissante sur $I \cap]-\infty, a_1]$, sur $I \cap [a_n, +\infty[$ et sur $[a_i, a_{i+1}]$. En effet, pour tout $1 \leq i \leq n-1$, f est continue sur $[a_i, a_{i+1}]$, dérivable sur $]a_i, a_{i+1}[$ et pour tout $x \in]a_i, a_{i+1}[$, $f'(x) > 0$ (et de même sur $I \cap]-\infty, a_1]$ et sur $I \cap [a_n, +\infty[$).

De plus, puisque f est strictement croissante sur $I \cap]-\infty, a_1]$ et sur $[a_1, a_2]$, alors f est strictement croissante sur $(I \cap]-\infty, a_1]) \cup [a_1, a_2]$.

En recollant de proche en proche tous les intervalles qui dont l'union forme I , on montre que f est strictement croissante sur I . ■

Remarque 13. On a bien sûr un résultat analogue pour les fonctions strictement décroissantes (et pour les fonctions constantes) dans le cas où $f'(x) < 0$ pour tout $x \in I$ sauf peut-être en un nombre fini de points.