

Corrigé de la liste d'exercices n°19

Limites et continuité

Exercice 1.

1. • On a $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + \cos(x) - 14) \sin(e^{-x}) = -13 \sin(1) < 0$.

Par ailleurs, on sait que $(\ln(x) + \sqrt{x}) \ln(1+x) \underset{0}{\sim} (\ln(x) + \sqrt{x})x = x \ln(x) + x\sqrt{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0^-$ car au voisinage de 0^+ , $(\ln(x) + \sqrt{x}) \ln(1+x)$ est de signe négatif.

Par quotient, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$.

- Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ et $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$, on en déduit que $\sin(e^{-x}) \underset{+\infty}{\sim} e^{-x}$.

Ainsi, $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x^2 e^{-x}}{\sqrt{x} \ln(1+x)}$ donc par croissances comparées, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0^+$.

2. • On a $\sin(x^2) \underset{0}{\sim} x^2$ donc $x^3 + \sin(x^2) = x^2 \left(x + \frac{\sin(x^2)}{x^2} \right) \underset{0}{\sim} x^2$ et $e^{x^3} - 1 \underset{0}{\sim} x^3$

$$g(x) \underset{0}{\sim} \frac{x^4 \sqrt{14}}{x^3(x + x^2 \ln(x))} \underset{0}{\sim} \frac{\sqrt{14}x^4}{x^4} = \sqrt{14}$$

donc $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \sqrt{14}$.

- En $+\infty$, on a

$$g(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x^6 \sqrt{x}}{e^{x^3} x^2 \ln(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0^+$$

par croissances comparées.

Exercice 2.

1. En multipliant par la quantité conjuguée, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{(\sqrt{x^2 + 3x - 1} - \sqrt{x^2 + x})(\sqrt{x^2 + 3x - 1} + \sqrt{x^2 + x})}{\sqrt{x^2 + 3x - 1} + \sqrt{x^2 + x}} &= \frac{x^2 + 3x - 1 - (x^2 + x)}{\sqrt{x^2 + 3x - 1} + \sqrt{x^2 + x}} \\ &= \frac{2x - 1}{\sqrt{x^2 + 3x - 1} + \sqrt{x^2 + x}} \\ &= \frac{2x - 1}{x \left(\sqrt{1 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \right)} \\ &\underset{+\infty}{\sim} \frac{2x}{2x} \end{aligned}$$

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 3x - 1} - \sqrt{x^2 + x} = 1$.

2. Au voisinage de 0, on a

$$(\cos(x))^{\frac{1}{\sin^2(x)}} = \exp \left(\frac{1}{\sin^2(x)} \ln(\cos(x)) \right).$$

Or, $\ln(\cos(x)) = \ln(1 + (\cos(x) - 1))$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) - 1 = 0$ donc

$$\ln(\cos(x)) \underset{0}{\sim} \cos(x) - 1 \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}.$$

Par ailleurs, $\sin^2(x) \underset{0}{\sim} x^2$ donc $\frac{\ln(\cos(x))}{\sin^2(x)} \underset{0}{\sim} -\frac{1}{2}$.

Finalement, $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos(x))^{\frac{1}{\sin^2(x)}} = e^{-\frac{1}{2}}$.

3. Par croissances comparées, on a $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$ donc $\sin(x \ln(x)) \underset{0}{\sim} x \ln(x)$ d'où

$$\frac{\sin(x \ln(x))}{x} \underset{0}{\sim} \ln(x).$$

Or, $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x \ln(x))}{x} = -\infty$.

4. On a $\frac{-x^2 + x + 6}{x^2 - 6x + 9} = \frac{(x-3)(-x-2)}{(x-3)^2} = \frac{-x-2}{x-3}$.

Or, $\lim_{x \rightarrow 3} -x-2 = -5$, $\lim_{x \rightarrow 3^-} x-3 = 0^-$ et $\lim_{x \rightarrow 3^+} x-3 = 0^+$ donc $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-x^2 + x + 6}{x^2 - 6x + 9} = +\infty$
et $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{-x^2 + x + 6}{x^2 - 6x + 9} = -\infty$.

5. Puisque $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) = 0$ et $\cos(x) - 1 \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$, on en déduit que

$$\cos(\sin(x)) - 1 \underset{0}{\sim} -\frac{\sin^2(x)}{2} \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}.$$

Par ailleurs, $\tan^3(x) - 2\sin^2(x) = \sin^2(x) \left(\frac{\sin(x)}{\cos^3(x)} - 2 \right) \underset{0}{\sim} x^2 \left(\frac{\sin(x)}{\cos^3(x)} - 2 \right)$ donc

$$\frac{\cos(\sin(x)) - 1}{\tan^3(x) - 2\sin^2(x)} \underset{0}{\sim} \frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2 \left(\frac{\sin(x)}{\cos^3(x)} - 2 \right)} = -\frac{1}{2 \left(\frac{\sin(x)}{\cos^3(x)} - 2 \right)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{4}.$$

6. Puisque $\frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, on a $\sin\left(\frac{1}{x}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$ donc $\lfloor x \rfloor \sin\left(\frac{1}{x}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\lfloor x \rfloor}{x}$.

Or, pour tout $x > 0$, on a $x-1 < \lfloor x \rfloor \leq x$ donc $\frac{x-1}{x} < \frac{\lfloor x \rfloor}{x} \leq 1$. On en déduit d'après le théorème des gendarmes que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{x} = 1$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \lfloor x \rfloor \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 1$.

7. Montrons que cette limite n'existe pas. Supposons par l'absurde qu'il existe $l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ tel que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin(x) = l$.

Soit $u_n = n\pi$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, on en déduit par composition que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n\pi \sin(n\pi) = l$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n\pi \sin(n\pi) = 0$, donc $l = 0$.

Soit $v_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$, on en déduit par composition que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2n\pi + \frac{\pi}{2}) \sin(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = l = 0$.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(2n\pi + \frac{\pi}{2}) \sin(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = 2n\pi + \frac{\pi}{2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Donc $l = 0 = +\infty$, ce qui est absurde.

Ainsi, la fonction $x \mapsto x \sin(x)$ n'admet pas de limite en $+\infty$.

8. On a pour tout $x > 0$,

$$\left(\frac{x+2}{x}\right)^{2x} = e^{2x \ln(1+\frac{2}{x})}.$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$, on en déduit que $\ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{x}$ donc $2x \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) \underset{+\infty}{\sim} 4$, i.e.
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) = 4$, puis par composition de limites, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x \ln(1 + \frac{2}{x})} = e^4$.

Exercice 3. Supposons que f soit croissante (la preuve est analogue dans le cas où f est décroissante).

Soit $x_0 \in I$.

La fonction f est croissante sur $]a, x_0[$ et par croissance de f , pour tout $x \in]a, x_0[$, $f(x) \leq f(x_0)$, donc f est majorée sur $]a, x_0[$. D'après le théorème de la limite monotone, f admet une limite finie en x_0^- et $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \sup_{x \in]a, x_0[} f(x)$.

De même, f est croissante sur $]x_0, b[$ et par croissance de f , pour tout $x \in]x_0, b[$, $f(x) \geq f(x_0)$, donc f est minorée sur $]x_0, b[$. D'après le théorème de la limite monotone, f admet une limite finie en x_0^+ et $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \inf_{x \in]x_0, b[} f(x)$.

Exercice 4.

1. On sait que $1 - \cos(x) \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} 2\pi x = 0$ donc par composition, on obtient

$$1 - \cos(2\pi x) \underset{0}{\sim} \frac{(2\pi x)^2}{2} = 2\pi^2 x^2$$

donc $\frac{1 - \cos(2\pi x)}{x^2 \ln(x)} \underset{0}{\sim} \frac{2\pi^2}{\ln(x)} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0^-$ donc on peut prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.

2. Posons $x = 1 + h$. Quand x tend vers 1, on a $h = x - 1$ tend vers 0 et

$$f(x) = f(1 + h) = \frac{1 - \cos(2\pi(1 + h))}{(1 + h)^2 \ln(1 + h)} = \frac{1 - \cos(2\pi h + 2\pi)}{(1 + h)^2 \ln(1 + h)} = \frac{1 - \cos(2\pi h)}{(1 + h)^2 \ln(1 + h)}.$$

On a déjà vu en question précédente que $1 - \cos(2\pi h) \underset{0}{\sim} 2\pi^2 h^2$ et par ailleurs, on sait que $\ln(1 + h) \underset{0}{\sim} h$ donc

$$f(1 + h) \underset{0}{\sim} \frac{2\pi^2 h}{(1 + h)^2}$$

donc $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(1 + h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2\pi^2 h}{(1 + h)^2} = 0$ donc on peut prolonger f par continuité en 1 en posant $f(1) = 0$.

3. Puisque $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ et $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$, on a par composition $\sin(x^2) \underset{0}{\sim} x^2$ donc

$$g(x) \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{\sqrt{x+4}-2} = \frac{x^2(\sqrt{x+4}+2)}{x} = x(\sqrt{x+4}+2) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

Ainsi, on peut prolonger g par continuité en 0 en posant $g(0) = 0$.

Exercice 5.

1. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ comme produit et quotient de fonctions continues sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, le dénominateur ne s'y annulant pas.

Calculons $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$. On sait que $\ln(x) \underset{1}{\sim} x - 1$ (car $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$) donc $f(x) \underset{1}{\sim} \frac{x+2}{x} \underset{1}{\sim} 3$. Ainsi, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3 = f(1)$, ce qui montre que f est continue en 1.

Finalement, f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. La fonction $x \mapsto \sin(\pi x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et la fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ donc g est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ comme produit de fonctions continues sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Soit $n \in \mathbb{Z}$. On a $\lim_{x \rightarrow n} \sin(\pi x) = \sin(n\pi) = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow n^-} \lfloor x \rfloor \sin(\pi x) = (n-1) \times 0 = 0$ et $\lim_{x \rightarrow n^+} \lfloor x \rfloor \sin(\pi x) = n \times 0 = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow n} \lfloor x \rfloor \sin(\pi x) = 0 = g(n)$ donc g est continue en n , et ce pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Finalement, g est continue sur $\mathbb{R}$.

3. La fonction h est continue sur $] -\frac{\pi}{2}, 0[\cup]0, \frac{\pi}{2}[$ comme produit de fonctions continues sur $] -\frac{\pi}{2}, 0[\cup]0, \frac{\pi}{2}[$.

Pour tout $x \in] -\frac{\pi}{2}, 0[\cup]0, \frac{\pi}{2}[$, on a

$$h(x) = \frac{\cos^2(x) - 3\cos(x) + 2}{x^2 \cos(x)} = \frac{(\cos(x) - 2)(\cos(x) - 1)}{x^2 \cos(x)} \underset{0}{\sim} \frac{\frac{x^2}{2}}{x^2} = \frac{1}{2}$$

donc $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \frac{1}{2} = h(0)$ donc h est continue en 0.

Exercice 6. On a :

$$\frac{t^2}{e^t - 1} \underset{0}{\sim} \frac{t^2}{t} = t$$

donc

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{e^t - 1} = 0$$

On doit donc poser $f(0) = 0$ pour que f soit continue en 0.

Exercice 7. Il est immédiat que $g \circ f$ est bornée sur $\mathbb{R}$. Pour $f \circ g$, on exploite le fait que l'image de $\mathbb{R}$ par g est contenue dans un segment (g étant bornée sur $\mathbb{R}$), puis on applique le théorème des bornes atteintes à la fonction continue f .

Exercice 8. Si f n'est pas constante, alors il existe $(k, k') \in \mathbb{Z}^2$ avec $k \neq k'$ tel que $f(x) = k$ et $f(x') = k'$ où $(x, x') \in \mathbb{R}^2$. Sans perte de généralité, on peut supposer $k < k'$. Soit $y = k + \frac{1}{2} \in [k, k']$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $z \in \mathbb{R}$ tel que $f(z) = y \notin \mathbb{Z}$. Contradiction. Il s'ensuit que f est constante.

Exercice 9. On a pour tout $x \in I$,

$$\max(f, g)(x) = \frac{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|}{2} \text{ et } \min(f, g)(x) = \frac{f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|}{2}.$$

Puisque la fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$ et que f et g sont continues sur I , on en déduit que les fonctions $\max(f, g)$ et $\min(f, g)$ sont continues sur I comme composée de fonctions continues sur I .

Exercice 10. Posons pour tout $x \in [a, b]$, $g(x) = f(x) - x$. La fonction g est continue sur $[a, b]$ comme somme de fonctions continues sur $[a, b]$.

Par ailleurs, $g(a) = f(a) - a \geq 0$ car $f(a) \geq a$ et $g(b) = f(b) - b \leq 0$ car $f(b) \leq b$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [a, b]$ tel que $g(c) = f(c) - c = 0$, i.e. $f(c) = c$ donc c est un point fixe de f .

Exercice 11. Soit $T > 0$ tel que g est T -périodique.

On suppose qu'il existe $l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ tel que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = l$.

Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = a + nT$. Puisque $T > 0$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, donc par caractérisation séquentielle de la limite, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} g(a + nT) = l$.

Or, puisque g est T -périodique, on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g(a + nT) = g(a)$ donc $g(a) = l$ (ce qui implique qu'on a nécessairement $l \in \mathbb{R}$).

Ainsi, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $g(a) = l$ donc g est constante.

Exercice 12. On suppose qu'il existe deux réels l et l' tels que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l'$.

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Par définition, il existe $A > 0$ et $A' < 0$ tels que pour tout $x \geq A$, $|f(x) - l| \leq \varepsilon$ et pour tout $x \leq A'$, $|f(x) - l'| \leq \varepsilon$.

Ainsi, pour tout $x \geq A$, $|f(x)| = |f(x) - l + l| \leq |f(x) - l| + |l| \leq \varepsilon + |l|$ et pour tout $x \leq A'$, $|f(x)| \leq \varepsilon + |l'|$.

Par ailleurs, puisque f est continue sur $[A', A]$, on sait d'après le théorème des bornes atteintes que f est bornée sur $[A', A]$, donc il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $x \in [A', A]$, $|f(x)| \leq M$.

Finalement, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq \max(\varepsilon + |l'|, M, \varepsilon + |l|)$ donc f est bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 13. Par définition, puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, il existe un réel $M > 0$ tel que pour tout $x > M$, $f(x) > f(0)$.

De même, puisque $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, il existe un réel $M' < 0$ tel que pour tout $x < M'$, $f(x) > f(0)$.

La fonction f étant continue sur le segment $[M', M]$, d'après le théorème des bornes atteintes, la fonction f admet un minimum sur $[M', M]$, atteint en un réel qu'on note α . Ainsi, pour tout $x \in [M', M]$, $f(x) \geq f(\alpha)$.

De plus, puisque $0 \in [M', M]$, $f(\alpha) \leq f(0)$.

Il en découle que pour tout $x > M$, $f(x) > f(0) \geq f(\alpha)$ et pour tout $x < M'$, $f(x) > f(0) \geq f(\alpha)$.

Finalement, pour tout réel x , $f(x) \geq f(\alpha)$ donc la fonction f admet bien un minimum global atteint en α .

Exercice 14. La fonction $f : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto x^3 + x^2 + x - 1$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et continue sur $\mathbb{R}_+$. En outre, $f(0) = -1$ et f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$.

On en déduit que la fonction f s'annule en un unique réel positif (en vertu du théorème des valeurs intermédiaires), c'est-à-dire que l'équation $x^3 + x^2 + x - 1 = 0$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}_+$.

Exercice 15.

1. Posons $f : x \mapsto x^{17} + x^3 \sin(x)$. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

Par ailleurs, on a $f(0) = 0$ et $f(\pi) = \pi^{17}$, donc $1 \in [f(0), f(\pi)]$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit qu'il existe $x_0 \in [0, \pi]$ tel que $f(x_0) = 1$.

2. Posons $g : x \mapsto x^2 \cos(x) + x \sin(x)$. La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$.

Par ailleurs, on a $g(0) = 0$ et $g(\frac{3\pi}{2}) = -\frac{3\pi}{2}$, donc $-1 \in [g(\frac{3\pi}{2}), g(0)]$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit qu'il existe $x_0 \in [0, \frac{3\pi}{2}]$ tel que $g(x_0) = -1$.

Exercice 16. Raisonnons par analyse-synthèse.

• **Analyse** : Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x , $f(x)^2 - f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x)(f(x) - 1) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ ou $f(x) = 1$.

Supposons que f prenne ces deux valeurs, c'est à dire supposons qu'il existe deux réels $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ avec $x \neq y$ tels que $f(x) = 0$ et $f(y) = 1$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe c entre x et y tel que $f(c) = \frac{1}{2}$, ce qui contredit le fait que f ne peut prendre que 0 ou 1 comme valeur.

Ainsi, f prend au maximum une valeur donc f est la fonction constante égale à 0 ou la fonction constante égale à 1.

• **Synthèse** : Si f est la fonction constante égale à 0 (ou égale à 1), on a clairement pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^2(x) - f(x) = 0$. Les deux fonctions solutions de ce problème sont donc les fonctions constantes égales à 0 ou à 1.

Exercice 17.

1. Soit $n \geq 3$.

La fonction P_n est dérivable (donc continue) sur $[0, 1]$ et pour tout $x \in [0, 1]$, $P'_n(x) = nx^{n-1} - n = n(x^{n-1} - 1)$. Ainsi, pour tout $x \in [0, 1[$, $P'_n(x) < 0$ donc P_n est strictement décroissante sur $[0, 1]$.

Or, on a $P_n(0) = 1 > 0$ et $P_n(1) = 2 - n < 0$ car $n > 2$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, puisque P_n est continue et strictement monotone sur $[0, 1]$, avec $0 \in [P_n(1), P_n(0)]$, on en déduit qu'il existe un unique réel $u_n \in [0, 1]$ tel que $P_n(u_n) = 0$.

2. Pour tout $n \geq 3$, on a $P_n(\frac{1}{n}) = (\frac{1}{n})^n - n \times \frac{1}{n} + 1 = (\frac{1}{n})^n > 0$ et

$$P_n\left(\frac{2}{n}\right) = \left(\frac{2}{n}\right)^n - n \times \frac{2}{n} + 1 = \left(\frac{2}{n}\right)^n - 1 < 0$$

car $0 < \frac{2}{n} < 1$.

Ainsi, on a $P_n(\frac{2}{n}) \leq P_n(u_n) \leq P_n(\frac{1}{n})$ et par stricte décroissance de P_n sur $[0, 1]$, ceci implique que $\frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{2}{n}$.

3. Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} = 0$, on déduit du théorème des gendarmes que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Par définition de la suite $(u_n)_{n \geq 3}$, on a pour tout $n \geq 3$, $P_n(u_n) = 0$, i.e. pour tout $n \geq 3$, $u_n^n - nu_n + 1 = 0$ d'où $nu_n = u_n^n + 1$.

Or, pour tout $n \geq 3$, puisque $u_n > 0$, on a $u_n^n = e^{n \ln(u_n)}$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ donc

$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln(u_n) = -\infty$, puis par composition, $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{n \ln(u_n)} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^n + 1 = 1$.

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n = 1$, i.e. $nu_n \underset{+\infty}{\sim} 1$ d'où $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

Exercice 18.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_n est dérivable (donc continue) sur $[0, \frac{1}{2}]$ et on a pour tout $x \in [0, \frac{1}{2}]$, $f'_n(x) = nx^{n-1} + 4x + 1 \geq 1 > 0$ donc la fonction f_n est strictement croissante sur $[0, \frac{1}{2}]$.

Par ailleurs, $f_n(0) = -1 < 0$ (car $0^n = 0$ puisque $n > 0$) et $f_n(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2^n} > 0$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, puisque f_n est continue et strictement croissante sur $[0, \frac{1}{2}]$, il existe un unique réel $x_n \in [0, \frac{1}{2}]$ tel que $f_n(x_n) = 0$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On a $f_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} + 2x_n^2 + x_n - 1 = 0$.

Or, $f_n(x_n) = 0$ donc $2x_n^2 + x_n - 1 = -x_n^n$ d'où

$$f_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} - x_n^n = x_n^n(x_n - 1) \leq 0$$

car $x_n \in [0, 1]$.

3. D'après la question précédente, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_{n+1}(x_n) \leq 0 = f_{n+1}(x_{n+1})$. Puisque la fonction f_n est strictement croissante sur $[0, \frac{1}{2}]$, ceci implique que $x_n \leq x_{n+1}$ donc la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

4. La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée donc d'après le théorème de la limite monotone, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers un réel $l \in [0, \frac{1}{2}]$.

On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x_n) = 0$, i.e. $x_n^n + 2x_n^2 + x_n - 1 = 0$. Passons à la limite dans cette égalité.

On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq x_n \leq \frac{1}{2}$ et par croissance de $x \mapsto x^n$ sur $[0, \frac{1}{2}]$, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq x_n^n \leq \frac{1}{2^n}$. Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$, on déduit du théorème des gendarmes que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n^n = 0$.

En passant à la limite, on obtient alors $2l^2 + l - 1 = 0$, i.e. $l = \frac{1}{2}$ ou $l = -1$ (impossible car $l \in [0, \frac{1}{2}]$).

On en conclut que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \frac{1}{2}$.

Exercice 19.

1. Soit n un entier > 2 . La fonction $f : x \mapsto \tan x - nx$ est de classe C^∞ sur I et :

$$\forall x \in I, \quad f'(x) = 1 + \tan^2(x) - n \quad \text{et} \quad f''(x) = 2 \tan(x)(1 + \tan^2(x)).$$

Sur I , f'' est strictement positive, donc f' est strictement croissante. Or f' a pour limite $1 - n$ en 0 (et $1 - n < 0$), et $+\infty$ à gauche de $\pi/2$.

On en déduit que f' est strictement négative puis strictement positive sur I , et qu'elle ne s'annule qu'une seule fois dans I , en un réel que nous noterons β_n .

D'après ce qui précède, f est strictement décroissante sur $]0, \beta_n[$, et strictement croissante sur $]\beta_n, \pi/2[$. Puisqu'en outre $f(0) = 0$, et $\lim_{x \rightarrow \pi/2^-} f(x) = +\infty$, on peut affirmer que f est strictement négative sur $]0, \pi/2[$, et que f s'annule exactement une fois dans $]\beta_n, \pi/2[$.

Conclusion. La fonction f s'annule exactement une fois dans I ; c'est-à-dire que l'équation (E_n) admet une unique solution x_n dans $I =]0; \pi/2[$.

2. Que peut-on dire de la suite (x_n) ?

Soit n un entier naturel. Par définition du réel x_n , on a $x_n > 0$ et $\tan(x_n) = nx_n$. La suite (x_n) est croissante et majorée par $\pi/2$; d'après le théorème de la limite monotone, elle est donc convergente, vers une limite ℓ strictement positive. On en déduit que nx_n tend vers $+\infty$, donc $\tan(x_n)$ tend vers $+\infty$.

Conclusion. $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 20. On considère $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^x + x$.

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = e^x + 1 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc injective.

De plus,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + x) = -\infty$$

(car $e^x \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow -\infty$). Ainsi, comme f est continue et strictement croissante, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ (entier positif). Comme f est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, l'équation

$$f(x) = n$$

admet une unique solution réelle, notée x_n .

3. Pour tout $n \geq 1$, on a $n < n + 1$, donc

$$f(x_n) = n < n + 1 = f(x_{n+1}).$$

Or f est strictement croissante, donc $x_n < x_{n+1}$. Ainsi la suite (x_n) est strictement croissante.

4. Soit $n > 1$.

Majoration. On a

$$f(\ln n) = e^{\ln n} + \ln n = n + \ln n > n.$$

Comme $f(x_n) = n$ et f est croissante, on en déduit

$$x_n \leq \ln n.$$

Minoration. On note $a = \ln(n - \ln n)$ (bien défini car $n - \ln n > 0$ pour $n > 1$). Alors

$$f(a) = e^{\ln(n - \ln n)} + \ln(n - \ln n) = (n - \ln n) + \ln(n - \ln n) = n - \ln\left(\frac{n}{n - \ln n}\right).$$

Or $\frac{n}{n - \ln n} > 1$, donc $\ln\left(\frac{n}{n - \ln n}\right) > 0$, et par conséquent $f(a) < n$. Comme f est croissante et $f(a) < f(x_n) = n$, on obtient

$$\ln(n - \ln n) = a \leq x_n.$$

On a bien : $\ln(n - \ln n) \leq x_n \leq \ln n$ pour $n > 1$.

5. Comme $n - \ln n \rightarrow +\infty$, on a $\ln(n - \ln n) \rightarrow +\infty$, donc par comparaison avec

$$\ln(n - \ln n) \leq x_n \leq \ln n,$$

on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty.$$

Pour l'équivalent, on divise l'encadrement par $\ln n > 0$:

$$\frac{\ln(n - \ln n)}{\ln n} \leq \frac{x_n}{\ln n} \leq 1.$$

Or

$$\ln(n - \ln n) = \ln\left(n\left(1 - \frac{\ln n}{n}\right)\right) = \ln n + \ln\left(1 - \frac{\ln n}{n}\right),$$

et comme $\frac{\ln n}{n} \rightarrow 0$, on a $\ln\left(1 - \frac{\ln n}{n}\right) \rightarrow 0$, donc

$$\frac{\ln(n - \ln n)}{\ln n} \rightarrow 1.$$

Par le théorème des gendarmes,

$$\frac{x_n}{\ln n} \rightarrow 1, \quad \text{donc} \quad x_n \sim \ln n \quad (n \rightarrow +\infty).$$

Exercice 21.

1. La fonction f est définie en les réels x pour lesquels $x^2 + 1 \geq 0$, ce qui est vérifié par tout réel x donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (car la fonction $x \mapsto x^2 + 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction racine carrée est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$) et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} - 1 = \frac{x - \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2 + 1} > 0$ d'une part et d'autre part, $\sqrt{x^2 + 1} > \sqrt{x^2} = |x| \geq x$ donc $x - \sqrt{x^2 + 1} < 0$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) < 0$ donc la fonction f est strictement décroissante et continue sur $\mathbb{R}$.

D'après le théorème de la bijection, f est alors bijective de $\mathbb{R}$ sur l'intervalle $f(\mathbb{R})$ qui est à déterminer.

On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x = +\infty$.

En multipliant par la quantité conjuguée, on obtient pour tout réel x ,

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x}.$$

Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = 0^+$.

Puisque f est décroissante et continue sur $\mathbb{R}$, on a donc

$$f(\mathbb{R}) =] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) [=]0, +\infty[.$$

Exercice 22.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(x)$.
 - **Initialisation** : Pour $n = 0$, on a $f\left(\frac{x}{2^0}\right) = f(x)$ donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.
 - **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose que $f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(x)$.
Montrons que $f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) = f(x)$. Par hypothèse sur f , on a

$$f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) = f\left(2 \times \frac{x}{2^{n+1}}\right) = f\left(\frac{x}{2^n}\right).$$

Or, par hypothèse de récurrence, $f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(x)$ donc $f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) = f(x)$, ce qui prouve la propriété au rang $n + 1$ et achève la récurrence.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(x)$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x}{2^n} = 0$ et f est continue en 0 donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(0)$.
Or, d'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(\frac{x}{2^n}) = f(x)$ donc $f(x) = f(0)$.
3. On a montré en question précédente que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(0)$ donc f est constante.
Réciproquement, si f est une fonction constante, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(2x)$.
Les fonctions définies sur $\mathbb{R}$, continues en 0 telles que pour tout réel x , $f(x) = f(2x)$ sont donc les fonctions constantes.

Exercice 23.

1. Par hypothèse : $f(0+0) = f(0) \times f(0)$. D'où :

$$f(0)(f(0) - 1) = 0.$$

Il s'ensuit que $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$.

Si $f(0) = 0$, alors pour tout réel x , on a :

$$f(x) = f(x+0) = f(x) \times f(0) = 0.$$

Ainsi, $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$. Dans le cas où $f(0) = 0$, f est identiquement nulle sur $\mathbb{R}$.

2. À partir de maintenant, on suppose $f(0) = 1$.

- (a) Pour tout réel x , on a : $f(x) = f(x/2) \times f(x/2) = f(x/2)^2 \geq 0$.

Établissons l'inégalité stricte. S'il existait un réel x tel que $f(x) = 0$, alors on aurait :

$$f(0) = f(x) \times f(-x) = 0,$$

ce qui contredirait l'hypothèse suivant laquelle $f(0) = 1$.

Conclusion. f est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

- (b) Une récurrence évidente donne :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(n) = [f(1)]^n.$$

Pour la seconde assertion, on utilise le fait que : $f(0) = f(n-n) = f(n) \times f(-n)$.
Puisque $f(n) \neq 0$ selon la question précédente, on peut conclure.

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n) = [f(1)]^n$ et $f(-n) = \frac{1}{f(n)}$.

- (c) Soit $x = p/q$ un rationnel quelconque (avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$). On a :

$$[f(p/q)]^q = f(p) = f(1)^p.$$

Par suite :

$$f(p/q) = f(1)^{p/q}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad f(p/q) = e^{\frac{p}{q} \ln(f(1))}.$$

En d'autres termes :

$$\forall x \in \mathbb{Q}, \quad f(x) = e^{x \ln(f(1))}.$$

- (d) Soit $x \in \mathbb{R}$ alors $\exists (r_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$, $r_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$.

D'après la question précédente : $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(r_n) = e^{r_n \ln(f(1))}$.

Par passage à la limite, et en utilisant la continuité de la fonction f et $\exp$ (respectivement en x et $x \ln(f(1))$), on obtient :

$$f(x) = e^{x \ln(f(1))}.$$

Conclusion. Pour tout réel x , $f(x) = e^{x \ln(f(1))}$.