

Liste d'exercices n°20

Dérivation

Exercice 1. Déterminer les limites suivantes :

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+x}}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} x \left[x - \frac{1}{x} \right]$$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+x}}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1}$$

Exercice 2. Démontrer que les courbes d'équation $y = x^2$ et $y = \frac{1}{x}$ admettent une unique tangente commune.

Exercice 3. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit a un point de I . Soient f et g deux fonctions continues sur I et dérivables en a . Calculer les limites suivantes :

$$1. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h^2) - f(a+h)}{h}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)g(a) - f(a)g(x)}{x-a}.$$

Exercice 4. Soit f la fonction suivante :

$$\begin{aligned} f : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} \frac{1}{1+x} & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 2x + \lambda x^2 & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

1. Déterminer, s'ils existent, les $\lambda \in \mathbb{R}$ pour que f soit continue.
2. Déterminer, s'ils existent, les $\lambda \in \mathbb{R}$ pour que f soit dérivable.

Exercice 5. Etudier la fonction $f : x \mapsto x^2 \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.

Exercice 6. Considérons l'équation (E) suivante, d'inconnue x réelle :

$$\arctan(2x) + \arctan(x) = \frac{\pi}{4}.$$

1. Etudier la fonction $x \mapsto \arctan(2x) + \arctan(x)$.
2. Montrer que l'équation (E) admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.
3. Résoudre l'équation (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7. Justifier que les fonctions suivantes sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ puis calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, leurs dérivées n -ièmes.

$$1. \cos$$

$$2. f : x \mapsto \frac{1}{2-x}$$

Exercice 8. Montrer que la fonction suivante est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} \frac{e^{x^2} - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Exercice 9. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I . Montrer que fg est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et que pour tout $x \in I$,

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x).$$

Cette formule s'appelle la formule de Leibniz.

Exercice 10. Considérons la fonction suivante : $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{\ln(x)}{x} \end{cases}$.

1. Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux réels u_n et v_n tels que pour tout réel x strictement positif, on ait :

$$f^{(n)}(x) = \frac{u_n + v_n \ln(x)}{x^{n+1}}.$$

3. Expliciter les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 11. Trouver une primitive des fonctions suivantes.

- | | |
|--|--|
| 1. $t \longmapsto (2t + 1)^7$ | 5. $x \longmapsto \frac{\ln(x)}{x}$ |
| 2. $u \longmapsto \frac{1}{3u}$ | 6. $x \longmapsto \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ |
| 3. $x \longmapsto e^{\sin(x)} \cos(x)$ | 7. $u \longmapsto \frac{1}{u \ln(u)}$ |
| 4. $t \longmapsto \frac{\sin(t)}{\cos^2(t)}$ | |

Exercice 12. Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit f une fonction dérivable sur $[a; b]$ telle que $f(a) = f(b) = 0$, que $f'(a) > 0$ et que $f'(b) > 0$. Montrer qu'il existe trois éléments c_1 , c_2 et c_3 dans $]a; b[$ tels que :

$$c_1 < c_2 < c_3 \quad \text{et} \quad f(c_2) = f'(c_1) = f'(c_3) = 0.$$

Exercice 13. Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soient f et g deux fonctions continues sur $[a; b]$ et dérivables sur $]a; b[$.

1. Montrer qu'il existe c dans $]a; b[$ tel que :

$$g'(c)(f(b) - f(a)) = f'(c)(g(b) - g(a)).$$

2. On suppose que $f(a) = g(a) = 0$, que g' ne s'annule pas sur $]a; b[$ et que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$.

(a) Montrer que g ne s'annule pas sur $]a; b[$.

(b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = l$ (appelée règle de l'Hôpital).

3. Calculer

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}.$$

Exercice 14. Soit f une fonction continue sur un intervalle I . Soit $a \in I$. On suppose que f est dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et que $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = l$, où $l \in \mathbb{R}$. Montrer que f est dérivable en a et que $f'(a) = l$.

Exercice 15. Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable telle que $f(a) = f'(a)$ et $f(b) = f'(b)$.
Montrer qu'il existe un élément $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = f''(c)$.

Exercice 16. Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b) = 0$. Montrer qu'il existe un élément c de $]a, b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(c)}{c}$.

Exercice 17. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
On suppose que f et f' ont des limites finies en $+\infty$.
Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$.

Exercice 18. Soit $f \in \mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{R})$ tel que $f(a) = f(b) = 0$ et $c \in]a, b[$.
Montrer qu'il existe $\gamma \in]a, b[$, tel que $f(c) = \frac{(c-a)(c-b)}{2} f''(\gamma)$.

Exercice 19.

1. Soit $f : x \mapsto \frac{1}{5}(4 - x^2)$.
 - (a) Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$. En déduire que $f([0, 1]) \subset [0, 1]$.
 - (b) Déterminer les points fixes de f .
 - (c) Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, $|f'(x)| \leq \frac{2}{5}$.
2. On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 \in [0, 1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
 - (a) Quel est l'unique point fixe de f dans $[0, 1]$? On le notera l dans la suite.
 - (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 1]$.
 - (c) A l'aide du théorème des accroissements finis, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_{n+1} - l| \leq \frac{2}{5} |u_n - l|.$$

- (d) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - l| \leq \left(\frac{2}{5}\right)^n$.
- (e) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
- (f) Expliciter un rang n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $|u_n - l| \leq 10^{-10}$.

Exercice 20. On considère dans ce problème la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par un premier terme u_0 dans $]0, 1[$ et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 - u_n + 1}.$$

On introduit la fonction

$$f : x \longmapsto \sqrt{x^2 - x + 1}.$$

1. (a) Vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

- (b) En déduire que f est bien définie sur $\mathbb{R}$. Justifier alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien définie.
- (c) Déduire de la question 1.(a) que, pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) \in [0, 1]$.
- (d) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 1]$.

2. (a) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer $f'(x)$.
 On détaillera les calculs effectués.
 Déterminer le tableau des variations de f sur $[0, 1]$.
- (b) Montrer que, pour $x \in [0, 1]$, $f(x) \geq x$.
- (c) Représenter alors la courbe représentative de f sur $[0, 1]$.
 On se placera dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et on utilisera l'échelle suivante : 10 cm pour 1 unité.
 On fera apparaître la tangente horizontale et la première bissectrice.
 Dans cette question uniquement, on suppose $u_0 = \frac{1}{4}$; construire à l'aide du graphe précédent les premiers termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- (d) Montrer que, pour tout $x \in [0, 1]$,

$$|f'(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

3. (a) Calculer $f(1)$.
- (b) En déduire, à l'aide du théorème des accroissements finis, que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |1 - u_{n+1}| \leq \frac{1}{\sqrt{3}} |1 - u_n|.$$

- (c) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une majoration de $|1 - u_n|$ en fonction de n et de $|1 - u_0|$.
- (d) En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 21. Soit n un entier naturel. Si n est non nul, on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui associe à un réel x , lorsque c'est possible,

$$f_n(x) = \frac{\sin x}{2 - \cos x} - \frac{x}{n}.$$

On note f_0 la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui associe à un réel x , lorsque c'est possible,

$$f_0(x) = \frac{\sin x}{2 - \cos x}.$$

I) Généralités sur f_n

Soit n un entier naturel fixé.

- Déterminer le domaine de définition D de f_n .
- f_n est-elle paire ? f_n est-elle impaire ? On justifiera sa réponse.
- f_n est-elle 2π -périodique ?
- Montrer qu'il suffit d'étudier f_n sur $[0, \pi]$ pour tracer sa courbe sur D tout entier. On justifiera sa réponse.

II) Étude de la fonction f_0

- Étudier la dérivabilité de f_0 sur D . Déterminer l'expression de sa dérivée.
- Étudier le signe de la dérivée de f_0 sur $[0, \pi]$.
- Déterminer le tableau de variations sur $[0, \pi]$ et tracer l'allure de la courbe de f_0 sur $\mathbb{R}$ dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

8. On rappelle que : $\sqrt{3}$ a pour valeur 1,732 comme valeur approchée par défaut à 10^{-3} près. Déterminer les valeurs maximales et minimales atteintes par $f_0(x)$ quand x parcourt $\mathbb{R}$. En déduire la valeur maximale atteinte par $|f_0(x)|$ lorsque x parcourt $\mathbb{R}$.

III) Utilisation d'une primitive de f_0

9. Déterminer une primitive de f_0 sur $\mathbb{R}$. En déduire

$$\int_0^{\pi/3} \frac{\sin t}{2 - \cos t} dt.$$

Soit l'équation différentielle (E) :

$$(E) : y'(x) + \frac{\sin x}{2 - \cos x} y(x) = 2 \sin x.$$

10. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation sans second membre (H) associée à (E) .
11. Chercher une solution particulière de (E) sous la forme $x \mapsto a \cos(x) + b$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.
12. Trouver la fonction h définie sur $\mathbb{R}$, solution de (E) et qui vérifie : $h(0) = 1$.

IV) Étude de la fonction g

Soit la fonction

$$g : x \mapsto \frac{\sin x}{x(2 - \cos x)}.$$

13. Déterminer le domaine de définition de g .
14. Montrer que g admet une limite finie l en 0.
On prolonge g par continuité en posant : $g(0) = l$. On admet que g est strictement décroissante sur $[0, \pi]$.
15. Montrer que g est une bijection entre $[0, \pi]$ et un ensemble I à définir. On notera h sa réciproque.

V) Étude d'une suite qui annule f_n

Soit n un entier naturel non nul.

16. Montrer que si a est un réel strictement positif qui annule f_n , alors a appartient à l'intervalle

$$\left[0, \frac{n}{\sqrt{3}}\right].$$

17. Montrer qu'il existe un unique réel x_n appartenant à $]0, \pi]$ tel que $f_n(x_n) = 0$.
18. Montrer que la suite (x_n) est convergente et déterminer sa limite.