
DEVOIR SURVEILLÉ DE MATHÉMATIQUES N°6
Samedi 14 mars 2026 (4h00)

L'énoncé est constitué de quatre exercices et comporte 8 pages.

Les questions d'informatique (exercice 2 : questions 1 à 4) sont à rendre sur une copie séparée.

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, la précision et la concision de la rédaction. Le soin de la copie ainsi que l'orthographe entreront également pour une part importante dans l'appréciation du travail rendu.

Les résultats doivent être encadrés.

Si un candidat repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Lorsqu'un raisonnement utilise le résultat d'une question précédente, il est demandé au candidat d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.

Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1 : À la plage

Sur la plage, les drapeaux hissés près des postes de secours avertissent des conditions de baignade liées à l'état de la mer et à la météo.

Les significations des couleurs de drapeaux sont les suivantes :

- drapeau vert : la baignade est surveillée et ne présente pas de danger apparent ;
- drapeau jaune : la baignade est surveillée avec danger limité ou marqué ;
- drapeau rouge : la baignade est interdite.

La couleur d'un drapeau est déterminée par de nombreux facteurs tels que la météo, l'état de la mer ou la présence de sauveteurs pour assurer la sécurité des baigneurs.

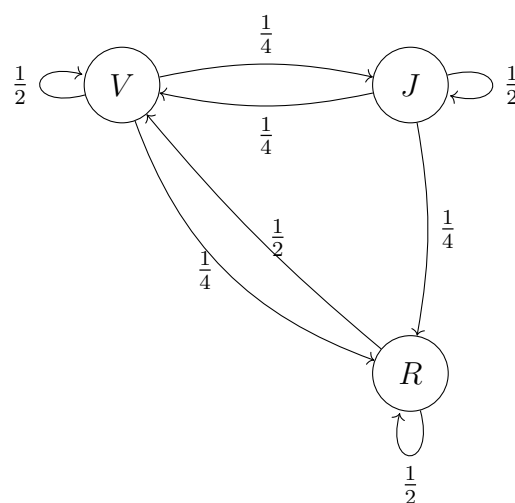
Dans cet exercice, on considère que la couleur d'un drapeau est fixée quotidiennement et on modélise le changement de couleur selon les règles simplifiées suivantes :

- si le drapeau est vert un jour, le lendemain il peut être vert avec une probabilité $\frac{1}{2}$, jaune avec une probabilité $\frac{1}{4}$ et rouge sinon ;
- si le drapeau est jaune un jour, le lendemain il peut être vert avec une probabilité $\frac{1}{4}$, jaune avec une probabilité $\frac{1}{2}$ et rouge sinon ;
- si le drapeau est rouge un jour, le lendemain il peut être vert avec une probabilité $\frac{1}{2}$ et rouge sinon. Un drapeau rouge ne peut donc pas passer à l'état jaune le jour suivant.

On note :

- V_n l'évènement « le drapeau est vert le n -ième jour » et $v_n = \mathbb{P}(V_n)$;
- J_n l'évènement « le drapeau est jaune le n -ième jour » et $j_n = \mathbb{P}(J_n)$;
- R_n l'évènement « le drapeau est rouge le n -ième jour » et $r_n = \mathbb{P}(R_n)$.

La situation est résumée sur la figure suivante :



On suppose que le drapeau est vert le jour numéro 0.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.

- (a) À l'aide d'un système complet d'évènements à préciser, exprimer v_{n+1} en fonction de v_n , j_n et de r_n .
- (b) Obtenir de même des expressions de j_{n+1} et de r_{n+1} en fonction de v_n , j_n et de r_n .
- (c) On pose

$$X_n = \begin{pmatrix} v_n \\ j_n \\ r_n \end{pmatrix}.$$

Préciser X_0 puis justifier que $X_{n+1} = AX_n$ avec

$$A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- (d) Calculer X_1 .

2. On pose

$$P = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

- (a) Montrer que P est inversible et calculer son inverse.
- (b) Montrer que la matrice A définie précédemment vérifie l'égalité

$$A = PTP^{-1}.$$

- (c) Montrer que la matrice T est inversible et calculer son inverse.

3. Résoudre l'équation suivante $TX = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ d'inconnue $X \in M_{3,1}(\mathbb{R})$.

4. Montrer que, pour tout entier naturel n ,

$$A^n = PT^nP^{-1}.$$

5. On pose $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- (a) Montrer que les matrices D et N commutent.
- (b) Déterminer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. On attend l'expression détaillée des coefficients de cette matrice. *On pourra utiliser le binôme de Newton.*

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en déduire une expression de X_n en fonction de n , T , P et de X_0 .

7. À l'aide des résultats précédents, déterminer des expressions explicites pour v_n , j_n et r_n .

8. Au bout d'un grand nombre de jours, quelle est la couleur la plus probable pour le drapeau?

Exercice 2 : À la fête foraine

Soit n un entier naturel non nul.

Dans une fête foraine, un stand propose le jeu suivant : le joueur lance n fois une pièce et compte le nombre de Pile obtenus. Si ce nombre est pair, le joueur est déclaré vainqueur, et s'il est impair, il est déclaré perdant.

Si le joueur est déclaré vainqueur, il gagne 10 euros pour chaque Pile obtenu, mais s'il a perdu, il doit payer 10 euros pour chaque Pile obtenu.

En particulier, s'il n'obtient aucun Pile, il est déclaré vainqueur, mais ne remporte rien. La pièce est truquée, et à chaque lancer, la probabilité d'obtenir Pile est égale à p ($p \in]0, 1[$), et celle d'obtenir Face est de $1 - p$.

On notera X la variable aléatoire égale au nombre de Pile obtenus, et G la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

Enfin, on notera A l'événement : « le joueur est déclaré vainqueur » et on dira que le jeu est favorable au joueur si l'espérance mathématique de la variable aléatoire G est positive.

Pour les questions d'informatique, **qui sont à rendre sur une copie séparée**, on pourra utiliser le module `random` de Python, à condition de l'importer au préalable. On rappelle enfin que `random.random()` renvoie un nombre aléatoire uniforme dans $[0, 1[$.

Partie I : questions d'informatique

1. Écrire une fonction Python `est_pile(p)` qui simule le lancer d'une pièce et renvoie `True` si le résultat obtenu est Pile, `False` sinon.
2. Écrire une fonction Python `partie(n,p)` qui simule une partie du jeu et renvoie le gain algébrique du joueur.
3. Écrire une fonction Python `estime_PA(N,n,p)` qui simule N parties indépendantes et renvoie une estimation de la probabilité $P(A)$, où on rappelle que A est l'événement : « le joueur est déclaré vainqueur ».
4. Écrire une fonction Python `gain_moyen(N,n,p)` qui simule N parties indépendantes et renvoie une estimation de l'espérance du gain algébrique du joueur.

Partie II

Dans cette partie, on suppose que $n = 3$ et $p = \frac{2}{3}$.

5. Reconnaître la loi de X , puis vérifier que : $P(A) = \frac{13}{27}$.
6. Montrer que : $G(\Omega) = \{-30, -10, 0, 20\}$, puis expliciter la loi de G .
7. Calculer l'espérance de la variable aléatoire G . Le jeu est-il favorable au joueur ?

Partie III

Dans cette partie, on revient au cas général, où n est un entier naturel non nul et $p \in]0, 1[$. Celui qui tient le stand souhaite rendre le jeu plus attractif en affichant le slogan « À ce jeu, il y a plus de gagnants que de perdants ! », et cherche donc les conditions nécessaires sur p et n pour que son affichage ne soit pas mensonger.

Soit Y la variable aléatoire définie par :

$$Y = (-1)^X.$$

Autrement dit, Y prend la valeur 1 lorsque X prend une valeur paire, et Y prend la valeur -1 lorsque X prend une valeur impaire.

8. On note $Z = \frac{Y+1}{2}$.

- (a) Déterminer $Z(\Omega)$, puis montrer que Z suit une loi de Bernoulli de paramètre $P(A)$.
- (b) Démontrer que : $\mathbb{E}(Y) = 2P(A) - 1$.

9. (a) Donner la loi de X .

- (b) En déduire qu'on a également :

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

puis que : $\mathbb{E}(Y) = (1-2p)^n$.

10. Exprimer alors la valeur de $P(A)$ en fonction de n et p .

11. Démontrer que :

$$P(A) \geq \frac{1}{2} \iff p \leq \frac{1}{2} \quad \text{OU} \quad \text{« } n \text{ est pair »}.$$

Partie IV

Le concepteur du jeu souhaite cependant vérifier que, tout en laissant son jeu attractif (c'est-à-dire en faisant en sorte que $P(A) \geq \frac{1}{2}$), son activité soit rentable pour lui, autrement dit que le jeu soit défavorable au joueur (c'est-à-dire que $\mathbb{E}(G) \leq 0$).

12. Exprimer G en fonction de X et Y . En déduire que :

$$\mathbb{E}(G) = 10 \sum_{k=0}^n (-1)^k k P(X = k).$$

13. Démontrer que : $\forall k \in [1, n], k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$.

14. Montrer que : $\mathbb{E}(G) = -10np(1-2p)^{n-1}$.

15. Démontrer alors que :

$$\begin{cases} P(A) \geq \frac{1}{2} \iff p \leq \frac{1}{2}, \\ \mathbb{E}(G) \leq 0. \end{cases}$$

16. (a) Étudier les variations de la fonction f définie sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ par :

$$\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad f(x) = x(1-2x)^{n-1}.$$

- (b) Pour une valeur de n fixée, comment le concepteur du jeu doit-il truquer sa pièce (c'est-à-dire quelle valeur doit-il donner à $p \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$) pour optimiser la rentabilité de son activité ?

Partie V

Le forain décide de fixer $n = 2$ et $p = \frac{1}{4}$. En période estivale, il pense pouvoir compter sur la participation de 200 clients dans la journée. Avant de se décider à installer son stand, il voudrait être certain, avec un risque d'erreur inférieur à 10%, qu'il gagnera plus de 100 euros dans la journée.

Pour tout entier i compris entre 1 et 200, on note alors G_i le gain algébrique du i -ème joueur. On note aussi J la variable aléatoire égale au gain du forain sur toute la journée.

17. Pour tout entier $i \in [1, 200]$, donner la loi de G_i , et calculer son espérance et sa variance.
18. Exprimer la variable aléatoire J en fonction des variables aléatoires G_i . Démontrer alors que $\mathbb{E}(J) = 500$ et que $V(J) = 11250$.
19. Justifier que : $P(J \leq 100) \leq P(|J - 500| \geq 400)$.
20. On admet que la variable aléatoire J vérifie l'inégalité (où $\epsilon > 0$) :

$$P(|J - \mathbb{E}(J)| \geq \epsilon) \leq \frac{V(J)}{\epsilon^2}.$$

Montrer alors que : $P(J \leq 100) \leq \frac{9}{128}$.

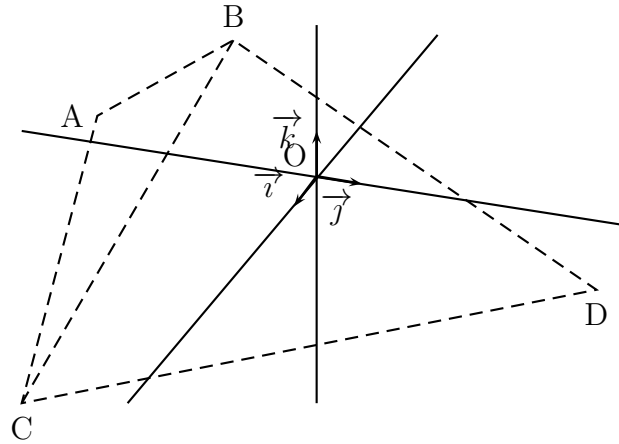
21. Compte tenu de ses exigences de rentabilité, le forain peut-il installer son stand ?

Exercice 3 : Étude d'un tétraèdre

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Les points A, B et C ont pour coordonnées respectives :

$$A(3; -2; 2) \quad ; \quad B(6; 1; 5) \quad ; \quad C(6; -2; -1).$$



Partie A

1. Montrer que le triangle ABC est un triangle rectangle.
2. Soit P le plan d'équation cartésienne $x + y + z - 3 = 0$.
Montrer que P est orthogonal à la droite (AB) et passe par le point A.
3. Soit P' le plan orthogonal à la droite (AC) et passant par le point A.
Déterminer une équation cartésienne de P' .
4. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ , droite d'intersection des plans P et P' .

Partie B

On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par la formule $\frac{Ah}{3}$ où A est l'aire d'une des faces du tétraèdre et h la distance entre cette même face et le sommet opposé à cette face.

5. Soit D le point de coordonnées $(0; 4; -1)$.
Montrer que la droite (AD) est perpendiculaire au plan (ABC).
6. Calculer le volume du tétraèdre ABDC.
7. Montrer que l'angle géométrique $\widehat{BDC}$ a pour mesure $\frac{\pi}{4}$ radian.
8. (a) Calculer l'aire du triangle BDC.
(b) En déduire la distance du point A au plan (BDC).

Exercice 4 : Autour d'une intégrale

Soient a et b deux entiers naturels. On définit :

$$f_{a,b} : x \longmapsto x^a(1-x)^b \quad \text{et} \quad I_{a,b} = \int_0^1 f_{a,b}(x) \, dx.$$

1. Représenter graphiquement les fonctions $f_{1,1}$ et $f_{2,1}$ sur le segment $[0, 1]$.
2. Justifier que le nombre $I_{a,b}$ est positif pour tout $(a, b) \in \mathbb{N}^2$.
3. Calculer $I_{0,n}$ pour tout entier naturel n .
4. Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tel que $a \neq 0$.
En effectuant une intégration par parties, trouver une relation entre $I_{a,b}$ et $I_{a-1,b+1}$.
5. En déduire que pour tout $a \in \mathbb{N}$, on a :

$$\forall b \in \mathbb{N}, \quad I_{a,b} = \frac{a! \, b!}{(a+b+1)!}.$$

6. Déterminer la limite de la suite de terme général

$$\frac{I_{n+1,n+1}}{I_{n,n}}.$$

7. Soit (u_n) une suite réelle et ℓ un réel. Donner la définition, avec quantificateurs, de

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell.$$

8. En déduire l'existence d'un rang n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait :

$$\frac{I_{n+1,n+1}}{I_{n,n}} \leq \frac{1}{2}.$$

9. En déduire que pour tout $n \geq n_0$ on a :

$$I_{n,n} \leq 2^{n_0} I_{n_0,n_0} \frac{1}{2^n}.$$

10. Déterminer un équivalent de $\ln\left(\frac{2n}{2n+1}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
11. En déduire la limite de $\exp\left((2n+1) \ln\left(\frac{2n}{2n+1}\right)\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
12. On admet l'équivalent suivant (dit de Stirling) :

$$n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}.$$

En déduire un équivalent de $4^n I_{n,n}$ et de $I_{n,n}$ puis la limite de la suite $(4^n I_{n,n})$.