
CORRIGÉ DU DEVOIR SURVEILLÉ DE MATHÉMATIQUES N°6
Samedi 14 mars 2026 (4h00)

Exercice 1 : À la plage

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.

- (a) À l'aide d'un système complet d'événements à préciser, exprimer v_{n+1} en fonction de v_n , j_n et de r_n .

On utilise la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements (V_n, J_n, R_n) :

$$v_{n+1} = P(V_{n+1} | V_n)P(V_n) + P(V_{n+1} | J_n)P(J_n) + P(V_{n+1} | R_n)P(R_n).$$

D'après l'énoncé :

$$v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n + \frac{1}{4}j_n + \frac{1}{2}r_n.$$

- (b) Obtenir de même des expressions de j_{n+1} et de r_{n+1} en fonction de v_n , j_n et de r_n .

De même,

$$j_{n+1} = P(J_{n+1} | V_n)v_n + P(J_{n+1} | J_n)j_n + P(J_{n+1} | R_n)r_n$$

et comme un drapeau rouge ne devient pas jaune le lendemain :

$$j_{n+1} = \frac{1}{4}v_n + \frac{1}{2}j_n.$$

Enfin,

$$r_{n+1} = \frac{1}{4}v_n + \frac{1}{4}j_n + \frac{1}{2}r_n.$$

- (c) On pose $X_n = \begin{pmatrix} v_n \\ j_n \\ r_n \end{pmatrix}$. Préciser X_0 puis justifier que $X_{n+1} = AX_n$ avec $A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Le drapeau est vert au jour 0, donc

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Les relations précédentes se réécrivent matriciellement :

$$\begin{pmatrix} v_{n+1} \\ j_{n+1} \\ r_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_n \\ j_n \\ r_n \end{pmatrix}.$$

Donc

$$X_{n+1} = AX_n.$$

(d) Calculer X_1 .

On calcule

$$X_1 = AX_0 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$X_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

2. On pose

$$P = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

(a) Montrer que P est inversible et calculer son inverse.

Méthode 1 (inversion par résolution d'un système).

Soit $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et cherchons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tel que

$$PX = Y.$$

Cela équivaut au système

$$\begin{cases} 4x + y - 3z = a \\ 2x - y = b \\ 3x + 3z = c \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2x - b & (\text{à partir de la 2e équation}) \\ z = \frac{c}{3} - x & (\text{à partir de la 3e équation}) \\ 4x + (2x - b) - 3\left(\frac{c}{3} - x\right) = a & (\text{substitution dans la 1re}) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 9x - b - c = a \\ y = 2x - b \\ z = \frac{c}{3} - x \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{a+b+c}{9} \\ y = \frac{2a-7b+2c}{9} \\ z = \frac{-a-b+2c}{9} \end{cases}$$

Donc

$$X = \begin{pmatrix} \frac{a+b+c}{9} \\ \frac{2a-7b+2c}{9} \\ \frac{-a-b+2c}{9} \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -7 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

On en déduit

$$P^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -7 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Méthode 2 (pivot de Gauss).

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xLeftrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
 & \xLeftrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1, L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 0 & -3 & 2 \end{array} \right) \xLeftrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -1 & -1 & 2 \end{array} \right) \\
 & \xLeftrightarrow{L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1, L_2 \leftarrow \frac{1}{3}L_2, L_3 \leftarrow \frac{1}{9}L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{array} \right) \\
 & \xLeftrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + L_3, L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{2}L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{9} & -\frac{7}{9} & \frac{2}{9} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{array} \right).
 \end{aligned}$$

Ainsi

$$P^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -7 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Montrer que la matrice A définie précédemment vérifie l'égalité

$$A = PTP^{-1}.$$

On effectue le calcul matriciel TP^{-1} , on trouve :

$$TP^{-1} = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ -1 & -10 & 8 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

On obtient alors (calcul direct) que

$$PTP^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = A.$$

Donc

$$A = PTP^{-1}.$$

(c) Montrer que la matrice T est inversible et calculer son inverse.

Méthode 1 : inversion du système

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

$$TX = Y \iff \begin{cases} x = a \\ \frac{1}{4}y + \frac{3}{4}z = b \\ \frac{1}{4}z = c \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = a \\ \frac{1}{4}y + \frac{3}{4}z = b \\ \frac{1}{4}z = c \end{cases} \xLeftrightarrow[L_2 \leftarrow 4L_2, L_3 \leftarrow 4L_3] \begin{cases} x = a \\ y + 3z = 4b \\ z = 4c \end{cases} \iff \begin{cases} x = a \\ y = 4b - 12c \\ z = 4c \end{cases}$$

$$\iff X = \begin{pmatrix} a \\ 4b - 12c \\ 4c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -12 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -12 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Méthode 2 : pivot de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xLeftrightarrow[L_2 \leftarrow 4L_2, L_3 \leftarrow 4L_3] \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right) \xLeftrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3] \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right)$$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -12 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

3. Résoudre l'équation suivante $TX = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ d'inconnue $X \in M_{3,1}(\mathbb{R})$.

On résout le système triangulaire

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{soit} \quad \begin{cases} x = 1 \\ \frac{1}{4}y + \frac{3}{4}z = 1 \\ \frac{1}{4}z = 1 \end{cases}$$

D'où

$$z = 4, \quad y + 3z = 4 \Rightarrow y = -8.$$

Ainsi

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

4. Montrer que, pour tout entier naturel n ,

$$A^n = PT^n P^{-1}.$$

On raisonne par récurrence sur n . On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$ $P(n) : A^n = PT^n P^{-1}$.

Initialisation

Pour $n = 0$:

$$A^0 = I_3 = PI_3P^{-1} = PT^0P^{-1}.$$

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la propriété vraie à l'ordre n :

$$A^n = PT^n P^{-1}.$$

Alors

$$A^{n+1} = A^n A = (PT^n P^{-1})(PTP^{-1}) = PT^n(P^{-1}P)TP^{-1} = PT^{n+1}P^{-1}.$$

Donc la proposition est vraie au rang $n + 1$. Donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = PT^n P^{-1}.}$$

5. On pose $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Montrer que les matrices D et N commutent.

On obtient

$$DN = ND = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{16} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\boxed{DN = ND.}$$

(b) Déterminer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. On attend l'expression détaillée des coefficients de cette matrice. *On pourra utiliser le binôme de Newton.*

On a $T = D + N$, $DN = ND$ et $N^2 = 0$. Par le binôme de Newton (matrices commutantes) :

$$T^n = (D + N)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D^{n-k} N^k = D^n + nD^{n-1}N \quad (\text{car } N^2 = 0).$$

Or

$$D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{4})^n & 0 \\ 0 & 0 & (\frac{1}{4})^n \end{pmatrix}, \quad D^{n-1}N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4}(\frac{1}{4})^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$\boxed{T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{4})^n & 3n(\frac{1}{4})^n \\ 0 & 0 & (\frac{1}{4})^n \end{pmatrix}} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en déduire une expression de X_n en fonction de n , T , P et de X_0 .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$X_n = A^n X_0.$$

Avec la question 4 :

$$X_n = PT^n P^{-1} X_0.$$

En remplaçant T^n par son expression explicite (question 5.b), on obtient aussi :

$$X_n = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4^{-n} & 3n 4^{-n} \\ 0 & 0 & 4^{-n} \end{pmatrix} P^{-1} X_0.$$

7. À l'aide des résultats précédents, déterminer des expressions explicites pour v_n , j_n et r_n .

Comme

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1} X_0 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

on obtient

$$T^n P^{-1} X_0 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 \\ (2 - 3n)4^{-n} \\ -4^{-n} \end{pmatrix}.$$

Puis

$$X_n = PT^n P^{-1} X_0.$$

Après calcul :

$$v_n = \frac{4}{9} + \frac{5 - 3n}{9 \cdot 4^n}$$

$$j_n = \frac{2}{9} + \frac{3n - 2}{9 \cdot 4^n}$$

$$r_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 4^n}$$

(vérification : $v_n + j_n + r_n = 1$).

8. Au bout d'un grand nombre de jours, quelle est la couleur la plus probable pour le drapeau ?

Comme, lorsque n tend vers $+\infty$,

$$4^{-n} \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad n4^{-n} \rightarrow 0 \quad (\text{croissances comparées}),$$

on a

$$v_n \rightarrow \frac{4}{9}, \quad j_n \rightarrow \frac{2}{9}, \quad r_n \rightarrow \frac{1}{3}.$$

Donc la couleur la plus probable à long terme est le vert (probabilité limite $\frac{4}{9}$).

Exercice 2 : À la fête foraine

Partie I : questions d'informatique

1. Écrire une fonction Python `est_pile(p)` qui simule le lancer d'une pièce et renvoie `True` si le résultat obtenu est Pile, `False` sinon.

Voici une simulation du lancer d'une pièce :

```
import random

def est_pile(p):
    return random.random() < p:
```

2. Écrire une fonction Python `partie(n,p)` qui simule une partie du jeu et renvoie le gain algébrique du joueur.

Une simulation possible d'une partie est la suivante :

```
def partie(n, p):
    pile = 0
    for i in range(n):
        if est_pile(p):
            pile += 1
    if pile % 2 == 0:
        return 10 * pile
    else:
        return -10 * pile
```

La variable `pile` représente le nombre de Pile obtenus. Si `pile` est pair, le joueur gagne $10 \times \text{pile}$ euros; sinon, il perd $10 \times \text{pile}$ euros, d'où le retour de $-10 \times \text{pile}$.

3. Écrire une fonction Python `estime_PA(N,n,p)` qui simule N parties indépendantes et renvoie une estimation de la probabilité $P(A)$, où on rappelle que A est l'événement : « le joueur est déclaré vainqueur ».

Pour estimer la probabilité $P(A)$, on compte le nombre de parties pour lesquelles le joueur est déclaré vainqueur, c'est-à-dire celles pour lesquelles le gain renvoyé par `partie(n,p)` est positif ou nul.

```
def estime_PA(N, n, p):
    nb_victoires = 0
    for i in range(N):
        if partie(n, p) >= 0:
            nb_victoires += 1
    return nb_victoires / N
```

Comme le joueur est vainqueur lorsque le nombre de Pile est pair, son gain est alors positif ou nul. Le quotient `nb_victoires / N` fournit une fréquence, qui constitue une estimation de $P(A)$.

4. Écrire une fonction Python `gain_moyen(N,n,p)` qui simule N parties indépendantes et renvoie une estimation de l'espérance du gain algébrique du joueur.

Pour estimer l'espérance du gain algébrique du joueur, on calcule la moyenne des gains observés sur le nombre total de simulations.

```
def gain_moyen(N, n, p):  
    somme = 0  
    for i in range(N):  
        somme += partie(n, p)  
    return somme / N
```

Remarque : d'après la loi des grands nombres, lorsque N est grand, cette moyenne empirique fournit une estimation de $\mathbb{E}(G)$.

Partie II

Dans cette partie, on suppose que $n = 3$ et $p = \frac{2}{3}$.

5. Reconnaître la loi de X , puis vérifier que : $P(A) = \frac{13}{27}$.

Avec $n = 3$ et $p = \frac{2}{3}$, la variable X (nombre de Pile) suit une loi binomiale :

$$X \sim \mathcal{B}\left(3, \frac{2}{3}\right).$$

L'événement $A = \ll \text{nombre de Pile pair} \gg$ vaut $A = \{X = 0\} \cup \{X = 2\}$, donc

$$P(A) = P(X = 0) + P(X = 2) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \binom{3}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27} + \frac{12}{27} = \frac{13}{27}.$$

6. Montrer que : $G(\Omega) = \{-30, -10, 0, 20\}$, puis expliciter la loi de G .

Si X est pair, $G = 10X$; si X est impair, $G = -10X$.

Comme $X \in \{0, 1, 2, 3\}$, on obtient

$$G(\Omega) = \{-30, -10, 0, 20\}.$$

La loi de G est :

$$P(G = 0) = P(X = 0) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27},$$

$$P(G = -10) = P(X = 1) = \binom{3}{1} \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{6}{27},$$

$$P(G = 20) = P(X = 2) = \binom{3}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^2 \frac{1}{3} = \frac{12}{27},$$

$$P(G = -30) = P(X = 3) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}.$$

7. Calculer l'espérance de la variable aléatoire G . Le jeu est-il favorable au joueur ?

L'espérance vaut

$$\mathbb{E}(G) = 0 \cdot \frac{1}{27} - 10 \cdot \frac{6}{27} + 20 \cdot \frac{12}{27} - 30 \cdot \frac{8}{27}.$$

Les termes en 20 et -30 se compensent ($240 - 240$), donc

$$\mathbb{E}(G) = -\frac{60}{27} = -\frac{20}{9}.$$

Ainsi

$$\mathbb{E}(G) = -\frac{20}{9} \text{ euros} < 0,$$

donc le jeu est défavorable au joueur.

Partie III

Dans cette partie, on revient au cas général, où n est un entier naturel non nul et $p \in]0, 1[$.

Celui qui tient le stand souhaite rendre le jeu plus attractif en affichant le slogan « À ce jeu, il y a plus de gagnants que de perdants ! », et cherche donc les conditions nécessaires sur p et n pour que son affichage ne soit pas mensonger.

Soit Y la variable aléatoire définie par :

$$Y = (-1)^X.$$

Autrement dit, Y prend la valeur 1 lorsque X prend une valeur paire, et Y prend la valeur -1 lorsque X prend une valeur impaire.

8. On note $Z = \frac{Y+1}{2}$.

(a) Déterminer $Z(\Omega)$, puis montrer que Z suit une loi de Bernoulli de paramètre $P(A)$.

On a $Y = (-1)^X \in \{-1, 1\}$, donc

$$Z = \frac{Y+1}{2} \in \{0, 1\}.$$

Plus précisément,

$$Z = 1 \iff Y = 1 \iff X \text{ pair} \iff A.$$

Ainsi, X suit une loi de Bernoulli de paramètre $P(A)$:

$$Z \sim \mathcal{B}(P(A)).$$

(b) Démontrer que : $\mathbb{E}(Y) = 2P(A) - 1$.

Comme $Y = 2Z - 1$, on obtient

$$\mathbb{E}(Y) = 2\mathbb{E}(Z) - 1 = 2P(A) - 1.$$

Donc

$$\mathbb{E}(Y) = 2P(A) - 1.$$

9. (a) Donner la loi de X .

Comme X est égale au nombre de Pile en n lancers indépendants, on déduit que X suit une loi binomiale de paramètres n et p soit

$$X \sim \mathcal{B}(n, p), \quad P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad (0 \leq k \leq n).$$

- (b) En déduire qu'on a également :

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

puis que : $\mathbb{E}(Y) = (1 - 2p)^n$.

Comme $Y = (-1)^X$, on obtient d'après le théorème de transfert :

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=0}^n (-1)^k P(X = k) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Or

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-p)^k (1-p)^{n-k} = (1 - p - p)^n = (1 - 2p)^n.$$

Donc

$$\mathbb{E}(Y) = (1 - 2p)^n.$$

10. Exprimer alors la valeur de $P(A)$ en fonction de n et p .

D'après 4.b et 5.b :

$$2P(A) - 1 = (1 - 2p)^n.$$

Donc

$$P(A) = \frac{1 + (1 - 2p)^n}{2}.$$

11. Démontrer que :

$$P(A) \geq \frac{1}{2} \iff p \leq \frac{1}{2} \quad \text{OU} \quad \ll n \text{ est pair} \gg.$$

On a

$$P(A) \geq \frac{1}{2} \iff \frac{1 + (1 - 2p)^n}{2} \geq \frac{1}{2} \iff (1 - 2p)^n \geq 0.$$

Donc :

- si n est pair, $(1 - 2p)^n \geq 0$ pour tout $p \in]0, 1[$;
- si n est impair, $(1 - 2p)^n \geq 0 \iff 1 - 2p \geq 0 \iff p \leq \frac{1}{2}$.

Ainsi

$$P(A) \geq \frac{1}{2} \iff \left(p \leq \frac{1}{2}\right) \text{ ou } (n \text{ est pair}).$$

Partie IV

Le concepteur du jeu souhaite cependant vérifier que, tout en laissant son jeu attractif (c'est-à-dire en faisant en sorte que $P(A) \geq \frac{1}{2}$), son activité soit rentable pour lui, autrement dit que le jeu soit défavorable au joueur (c'est-à-dire que $\mathbb{E}(G) \leq 0$).

12. Exprimer G en fonction de X et Y . En déduire que :

$$\mathbb{E}(G) = 10 \sum_{k=0}^n (-1)^k k P(X = k).$$

Par définition du jeu,

$$G = \begin{cases} 10X & \text{si } X \text{ est pair,} \\ -10X & \text{si } X \text{ est impair,} \end{cases}$$

donc

$$G = 10XY = 10X(-1)^X.$$

Par conséquent,

$$\mathbb{E}(G) = 10\mathbb{E}(XY) = 10 \sum_{k=0}^n k(-1)^k P(X = k).$$

Ainsi

$$\mathbb{E}(G) = 10 \sum_{k=0}^n (-1)^k k P(X = k).$$

13. Démontrer que : $\forall k \in [1, n], k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$.

Pour $k \in \{1, \dots, n\}$,

$$k \binom{n}{k} = k \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = n \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = n \binom{n-1}{k-1}.$$

Donc

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}.$$

14. Montrer que : $\mathbb{E}(G) = -10np(1-2p)^{n-1}$.

En utilisant la loi binomiale de X et la question 9 :

$$\mathbb{E}(G) = 10 \sum_{k=0}^n (-1)^k k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Le terme $k = 0$ est nul, donc

$$\mathbb{E}(G) = 10 \sum_{k=1}^n (-1)^k n \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}.$$

On factorise np et on pose $j = k - 1$:

$$\mathbb{E}(G) = 10np \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-1-(k-1)}$$

$$= -10np \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \binom{n-1}{j} p^j (1-p)^{(n-1)-j}.$$

Donc

$$\boxed{\mathbb{E}(G) = -10np(1-2p)^{n-1}.$$

15. Démontrer alors que :

$$\begin{cases} P(A) \geq \frac{1}{2} & \Longleftrightarrow p \leq \frac{1}{2}, \\ \mathbb{E}(G) \leq 0. \end{cases}$$

On a :

$$P(A) \geq \frac{1}{2} \Longleftrightarrow (p \leq \frac{1}{2}) \text{ ou } (n \text{ pair}),$$

De plus :

$$\mathbb{E}(G) \leq 0 \Longleftrightarrow -10np(1-2p)^{n-1} \leq 0 \Longleftrightarrow (1-2p)^{n-1} \geq 0.$$

Donc :

- si n est impair, alors $n-1$ est pair, donc $\mathbb{E}(G) \leq 0$ pour tout $p \in]0, 1[$;
- si n est pair, alors $n-1$ est impair, donc $\mathbb{E}(G) \leq 0 \Longleftrightarrow p \leq \frac{1}{2}$.

16. (a) Étudier les variations de la fonction f définie sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ par :

$$\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad f(x) = x(1-2x)^{n-1}.$$

Sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, on considère

$$f(x) = x(1-2x)^{n-1}.$$

Sa dérivée vaut

$$f'(x) = (1-2x)^{n-1} + x(n-1)(1-2x)^{n-2}(-2) = (1-2x)^{n-2}(1-2nx).$$

Donc :

- $f'(x) \geq 0$ si $x \leq \frac{1}{2n}$,
- $f'(x) \leq 0$ si $x \geq \frac{1}{2n}$.

Ainsi f est croissante sur $\left[0, \frac{1}{2n}\right]$, puis décroissante sur $\left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{2}\right]$, et son maximum est atteint en

$$\boxed{x = \frac{1}{2n}.$$

(b) Pour une valeur de n fixée, comment le concepteur du jeu doit-il truquer sa pièce (c'est-à-dire quelle valeur doit-il donner à $p \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$) pour optimiser la rentabilité de son activité ?

On a

$$\mathbb{E}(G) = -10n f(p),$$

donc la rentabilité du forain (qui vaut $-\mathbb{E}(G)$) est maximale quand $f(p)$ est maximale.

Il doit donc choisir

$$p = \frac{1}{2n}$$

(sur l'intervalle imposé $[0, \frac{1}{2}]$).

Partie V

Le forain décide de fixer $n = 2$ et $p = \frac{1}{4}$. En période estivale, il pense pouvoir compter sur la participation de 200 clients dans la journée. Avant de se décider à installer son stand, il voudrait être certain, avec un risque d'erreur inférieur à 10%, qu'il gagnera plus de 100 euros dans la journée. Pour tout entier i compris entre 1 et 200, on note alors G_i le gain algébrique du i -ème joueur. On note aussi J la variable aléatoire égale au gain du forain sur toute la journée.

17. Pour tout entier $i \in [1, 200]$, donner la loi de G_i , et calculer son espérance et sa variance.

Ici $n = 2$ et $p = \frac{1}{4}$. Pour un joueur :

$$X_i \sim \mathcal{B}\left(2, \frac{1}{4}\right).$$

Alors

$$P(X_i = 0) = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}, \quad P(X_i = 1) = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}, \quad P(X_i = 2) = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}.$$

La variable G_i (gain du joueur) prend donc les valeurs :

g	0	-10	20
$P(G_i = g)$	$\frac{9}{16}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{16}$

D'où

$$\mathbb{E}(G_i) = 0 \cdot \frac{9}{16} - 10 \cdot \frac{3}{8} + 20 \cdot \frac{1}{16} = -\frac{5}{2}.$$

Et

$$\mathbb{E}(G_i^2) = 0^2 \cdot \frac{9}{16} + (-10)^2 \cdot \frac{3}{8} + 20^2 \cdot \frac{1}{16} = \frac{125}{2}.$$

Donc

$$V(G_i) = \mathbb{E}(G_i^2) - \mathbb{E}(G_i)^2 = \frac{125}{2} - \left(-\frac{5}{2}\right)^2 = \boxed{\frac{225}{4}}.$$

18. Exprimer la variable aléatoire J en fonction des variables aléatoires G_i . Démontrer alors que $\mathbb{E}(J) = 500$ et que $V(J) = 11250$.

Le gain du forain est l'opposé de la somme des gains des joueurs :

$$J = - \sum_{i=1}^{200} G_i.$$

En supposant les parties indépendantes :

$$\mathbb{E}(J) = - \sum_{i=1}^{200} \mathbb{E}(G_i) = -200 \left(-\frac{5}{2}\right) = \boxed{500}.$$

Et

$$V(J) = V\left(\sum_{i=1}^{200} (-G_i)\right) = \sum_{i=1}^{200} V(G_i) = 200 \cdot \frac{225}{4} = \boxed{11250}.$$

19. Justifier que : $P(J \leq 100) \leq P(|J - 500| \geq 400)$.

Si $J \leq 100$, alors

$$500 - J \geq 400 \Rightarrow |J - 500| \geq 400.$$

Donc l'événement $\{J \leq 100\}$ est inclus dans $\{|J - 500| \geq 400\}$, et par croissance des probabilités :

$$\boxed{P(J \leq 100) \leq P(|J - 500| \geq 400)}.$$

20. On admet que la variable aléatoire J vérifie l'inégalité (où $\epsilon > 0$) :

$$P(|J - \mathbb{E}(J)| \geq \epsilon) \leq \frac{V(J)}{\epsilon^2}.$$

Montrer alors que : $P(J \leq 100) \leq \frac{9}{128}$.

On applique l'inégalité fournie dans l'énoncé à J avec

$$\epsilon = 400, \quad \mathbb{E}(J) = 500, \quad V(J) = 11250.$$

Alors

$$P(|J - 500| \geq 400) \leq \frac{11250}{400^2} = \frac{11250}{160000} = \frac{9}{128}.$$

Avec la question précédente :

$$\boxed{P(J \leq 100) \leq \frac{9}{128}}.$$

21. Compte tenu de ses exigences de rentabilité, le forain peut-il installer son stand ?

On a

$$\frac{9}{128} < \frac{10}{100} \quad \text{car} \quad 900 < 1280$$

Ainsi, avec un risque d'erreur inférieur à 10%, le forain peut garantir un gain supérieur à 100 euros. Oui, il peut installer son stand.

Exercice 3 : Étude d'un tétraèdre

Les points A, B et C ont pour coordonnées respectives : A(3 ; -2 ; 2) ; B(6 ; 1 ; 5) ; C(6 ; -2 ; -1).

Partie A

1. Montrer que le triangle ABC est un triangle rectangle.

On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= (6 - 3, 1 - (-2), 5 - 2) = (3, 3, 3), \\ \overrightarrow{AC} &= (6 - 3, -2 - (-2), -1 - 2) = (3, 0, -3).\end{aligned}$$

Le produit scalaire vaut

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3 \cdot 3 + 3 \cdot 0 + 3 \cdot (-3) = 9 - 9 = 0.$$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux et le triangle ABC est rectangle en A .

2. Soit P le plan d'équation cartésienne $x + y + z - 3 = 0$.

Montrer que P est orthogonal à la droite (AB) et passe par le point A .

Le plan P a pour équation

$$x + y + z - 3 = 0,$$

donc un vecteur normal est

$$\vec{n} = (1, 1, 1).$$

Or

$$\overrightarrow{AB} = (3, 3, 3) = 3(1, 1, 1),$$

donc $\overrightarrow{AB}$ est colinéaire à un vecteur normal à P , ce qui prouve que P est orthogonal à la droite (AB) soit

$$\boxed{(AB) \perp P.}$$

De plus, le point $A(3, -2, 2)$ vérifie :

$$3 + (-2) + 2 - 3 = 0.$$

Donc

$$\boxed{A \in P.}$$

3. Soit P' le plan orthogonal à la droite (AC) et passant par le point A .

Déterminer une équation cartésienne de P' .

Le plan P' est orthogonal à la droite (AC) , donc un vecteur normal à P' est

$$\overrightarrow{AC} = (3, 0, -3).$$

En prenant $(1, 0, -1) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ comme vecteur normal, une équation de P' passant par $A(3, -2, 2)$ est donc

$$(1, 0, -1) \cdot (x - 3, y + 2, z - 2) = 0.$$

Ainsi

$$(x - 3) - (z - 2) = 0 \iff x - z - 1 = 0.$$

Donc

$$\boxed{P' : x - z - 1 = 0.}$$

4. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ , droite d'intersection des plans P et P' .

La droite $\Delta = P \cap P'$ est l'ensemble des solutions du système

$$\begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ x - z - 1 = 0 \end{cases}$$

On pose par exemple $z = t$. Alors

$$x = t + 1, \quad (t + 1) + y + t - 3 = 0 \Rightarrow y = 2 - 2t.$$

Donc une représentation paramétrique de Δ est

$$\Delta : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Partie B

5. Soit D le point de coordonnées $(0 ; 4 ; -1)$.

Montrer que la droite (AD) est perpendiculaire au plan (ABC) .

Avec $D(0, 4, -1)$,

$$\overrightarrow{AD} = (-3, 6, -3) = -3(1, -2, 1).$$

Or

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 3(-3) + 3(6) + 3(-3) = -9 + 18 - 9 = 0$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = 3(-3) + 0 \cdot 6 + (-3)(-3) = -9 + 0 + 9 = 0$$

$\overrightarrow{AD}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$ (qui forment une base du plan (ABC)), on en déduit que la droite (AD) est perpendiculaire au plan (ABC) . Donc

$$(AD) \perp (ABC).$$

6. Calculer le volume du tétraèdre ABDC.

Le volume du tétraèdre ABDC vaut

$$V = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}(ABC) \times AD$$

car $(AD) \perp (ABC)$.

Or le triangle ABC est rectangle en A , donc

$$AB = \sqrt{3^2 + 3^2 + 3^2} = 3\sqrt{3}, \quad AC = \sqrt{3^2 + 0^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2},$$

et

$$\mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{2} = \frac{9\sqrt{6}}{2}.$$

De plus

$$AD = \sqrt{(-3)^2 + 6^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{6}.$$

Ainsi

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{9\sqrt{6}}{2} \cdot 3\sqrt{6} = 27.$$

Donc

$$V_{ABDC} = 27.$$

7. Montrer que l'angle géométrique $\widehat{BDC}$ a pour mesure $\frac{\pi}{4}$ radian.

On calcule

$$\overrightarrow{DB} = (6, -3, 6), \quad \overrightarrow{DC} = (6, -6, 0).$$

Alors

$$\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} = 6 \cdot 6 + (-3)(-6) + 6 \cdot 0 = 54.$$

De plus

$$\|\overrightarrow{DB}\| = \sqrt{36 + 9 + 36} = 9, \quad \|\overrightarrow{DC}\| = \sqrt{36 + 36} = 6\sqrt{2}.$$

Donc

$$\cos(\widehat{BDC}) = \frac{54}{9 \cdot 6\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Comme l'angle géométrique est dans $[0, \pi]$, on obtient

$$\widehat{BDC} = \frac{\pi}{4}.$$

8. (a) Calculer l'aire du triangle BDC.

L'aire de BDC vaut

$$\mathcal{A}(BDC) = \frac{1}{2} DB \cdot DC \cdot \sin(\widehat{BDC}) = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 6\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 27.$$

Donc

$$\mathcal{A}(BDC) = 27.$$

- (b) En déduire la distance du point A au plan (BDC).

En prenant (BDC) comme base du tétraèdre :

$$V_{ABDC} = \frac{1}{3} \mathcal{A}(BDC) d(A, (BDC)).$$

Avec $V_{ABDC} = 27$ et $\mathcal{A}(BDC) = 27$, on obtient

$$27 = \frac{1}{3} \cdot 27 \cdot d(A, (BDC)) \Rightarrow d(A, (BDC)) = 3.$$

Ainsi, la distance du point A au plan (BDC) vaut

$$d(A, (BDC)) = 3.$$

Exercice 4 : Autour d'une intégrale

Soient a et b deux entiers naturels. On définit :

$$f_{a,b} : x \mapsto x^a(1-x)^b \quad \text{et} \quad I_{a,b} = \int_0^1 f_{a,b}(x) dx.$$

1. Représenter graphiquement les fonctions $f_{1,1}$ et $f_{2,1}$ sur le segment $[0, 1]$.

Étude de $f_{1,1}$ On a

$$f_{1,1}(x) = x(1 - x) = x - x^2, \quad x \in [0, 1].$$

La fonction $f_{1,1}$ est dérivable sur $[0, 1]$, et

$$f'_{1,1}(x) = 1 - 2x.$$

On a alors :

$$f'_{1,1}(x) = 0 \iff x = \frac{1}{2}.$$

Tableau de variation de $f_{1,1}$:

x	0	$\frac{1}{2}$	1
$f'_{1,1}(x)$	+	0	-
$f_{1,1}(x)$			

On en déduit que $f_{1,1}$ est croissante sur $[0, \frac{1}{2}]$, décroissante sur $[\frac{1}{2}, 1]$, et admet un maximum égal à $\frac{1}{4}$ en $x = \frac{1}{2}$.

Étude de $f_{2,1}$ On a

$$f_{2,1}(x) = x^2(1 - x) = x^2 - x^3, \quad x \in [0, 1].$$

La fonction $f_{2,1}$ est dérivable sur $[0, 1]$, et

$$f'_{2,1}(x) = 2x - 3x^2 = x(2 - 3x).$$

On a alors :

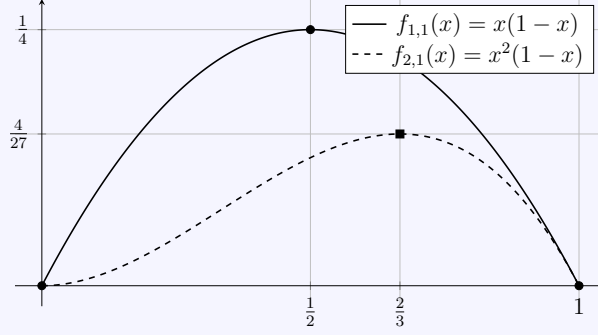
$$f'_{2,1}(x) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = \frac{2}{3}.$$

Tableau de variation de $f_{2,1}$:

x	0	$\frac{2}{3}$	1
$f'_{2,1}(x)$	0	+	0
$f_{2,1}(x)$			

On en déduit que $f_{2,1}$ est croissante sur $[0, \frac{2}{3}]$, décroissante sur $[\frac{2}{3}, 1]$, et admet un maximum égal à $\frac{4}{27}$ en $x = \frac{2}{3}$.

Représentation graphique



2. Justifier que le nombre $I_{a,b}$ est positif pour tout $(a, b) \in \mathbb{N}^2$.

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ et tout $x \in [0, 1]$, on a

$$x^a \geq 0, \quad (1-x)^b \geq 0,$$

donc $f_{a,b}(x) = x^a(1-x)^b \geq 0$. Par intégration :

$$I_{a,b} = \int_0^1 x^a(1-x)^b dx \geq 0.$$

3. Calculer $I_{0,n}$ pour tout entier naturel n .

Soit n un entier naturel.

$$I_{0,n} = \int_0^1 (1-x)^n dx = \left[-\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{n+1}}.$$

4. Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tel que $a \neq 0$. Trouver une relation entre $I_{a,b}$ et $I_{a-1,b+1}$.

On effectue une intégration par parties sur $[0, 1]$ avec $u = x^a$ et $v' = (1-x)^b$.

On a alors $u' = ax^{a-1}$ et $v = -\frac{(1-x)^{b+1}}{b+1}$, d'où

$$I_{a,b} = \left[-\frac{x^a(1-x)^{b+1}}{b+1} \right]_0^1 + \frac{a}{b+1} \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b+1} dx.$$

Le terme entre crochets étant nul, on obtient donc

$$I_{a,b} = \frac{a}{b+1} I_{a-1,b+1}.$$

5. En déduire que pour tout $a \in \mathbb{N}$, on a :

$$\forall b \in \mathbb{N}, \quad I_{a,b} = \frac{a! b!}{(a+b+1)!}.$$

Proposition. $\forall a \in \mathbb{N}, \forall b \in \mathbb{N}, \quad I_{a,b} = \frac{a! b!}{(a+b+1)!}.$

Nous raisonnons par récurrence sur a .

Initialisation ($a = 0$). Soit $b \in \mathbb{N}$. On sait déjà que

$$I_{0,b} = \frac{1}{b+1}.$$

Or

$$\frac{0! b!}{(0+b+1)!} = \frac{b!}{(b+1)!} = \frac{1}{b+1}.$$

Donc

$$\forall b \in \mathbb{N}, \quad I_{0,b} = \frac{0! b!}{(b+1)!}.$$

La propriété est vraie au rang $a = 0$.

Hérédité. Soit $a \in \mathbb{N}$. On suppose que

$$\forall b \in \mathbb{N}, \quad I_{a,b} = \frac{a! b!}{(a+b+1)!}.$$

Montrons que

$$\forall b \in \mathbb{N}, \quad I_{a+1,b} = \frac{(a+1)! b!}{(a+b+2)!}.$$

Soit $b \in \mathbb{N}$. En appliquant la relation trouvée précédemment avec $a+1$ à la place de a , on obtient

$$I_{a+1,b} = \frac{a+1}{b+1} I_{a,b+1}.$$

Par hypothèse de récurrence (appliquée à $b+1$),

$$I_{a,b+1} = \frac{a! (b+1)!}{(a+b+2)!}.$$

Ainsi,

$$I_{a+1,b} = \frac{a+1}{b+1} \cdot \frac{a! (b+1)!}{(a+b+2)!} = \frac{(a+1)! b!}{(a+b+2)!}.$$

La propriété est donc vraie au rang $a+1$.

Conclusion. Par récurrence sur a , on obtient

$$\forall a \in \mathbb{N}, \forall b \in \mathbb{N}, \quad I_{a,b} = \frac{a! b!}{(a+b+1)!}.$$

6. Déterminer la limite de la suite de terme général

$$\frac{I_{n+1,n+1}}{I_{n,n}}.$$

On a

$$I_{n,n} = \frac{n! n!}{(2n+1)!}, \quad I_{n+1,n+1} = \frac{(n+1)!^2}{(2n+3)!}.$$

Donc

$$\frac{I_{n+1,n+1}}{I_{n,n}} = \frac{(n+1)^2}{(2n+3)(2n+2)} = \frac{n+1}{2(2n+3)}.$$

Par passage à la limite,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_{n+1,n+1}}{I_{n,n}} = \frac{1}{4}.$$

7. Soit (u_n) une suite réelle et ℓ un réel. Donner la définition, avec quantificateurs, de

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

8. En déduire l'existence d'un rang n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait :

$$\frac{I_{n+1,n+1}}{I_{n,n}} \leq \frac{1}{2}.$$

Comme $\frac{I_{n+1,n+1}}{I_{n,n}} \rightarrow \frac{1}{4}$, en prenant $\varepsilon = \frac{1}{4}$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$,

$$\left| \frac{I_{n+1,n+1}}{I_{n,n}} - \frac{1}{4} \right| < \frac{1}{4}.$$

Alors $\frac{I_{n+1,n+1}}{I_{n,n}} < \frac{1}{2}$, donc

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \frac{I_{n+1,n+1}}{I_{n,n}} \leq \frac{1}{2}.$$

9. En déduire que pour tout $n \geq n_0$ on a :

$$I_{n,n} \leq 2^{n_0} I_{n_0,n_0} \frac{1}{2^n}.$$

Démontrons par récurrence sur $n \geq n_0$ la proposition $P(n) : I_{n,n} \leq 2^{n_0} I_{n_0,n_0} \frac{1}{2^n}$.

Initialisation

Pour $n = n_0$:

$2^{n_0} I_{n_0,n_0} \frac{1}{2^{n_0}} = I_{n_0,n_0}$ et $I_{n_0,n_0} \leq I_{n_0,n_0}$ donc $P(n_0)$ est vraie.

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq n_0$. Supposons la propriété vraie à l'ordre n .

Pour tout $n \geq n_0$, on a

$$I_{n+1,n+1} \leq \frac{1}{2} I_{n,n}.$$

Par l'hypothèse de récurrence, on obtient

$$I_{n+1,n+1} \leq \frac{1}{2} 2^{n_0} I_{n_0,n_0} \frac{1}{2^n} = 2^{n_0} I_{n_0,n_0} \frac{1}{2^{n+1}}$$

Ainsi, $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion

$$\forall n \geq n_0, \quad I_{n,n} \leq 2^{n_0} I_{n_0,n_0} \frac{1}{2^n}.$$

10. Déterminer un équivalent de $\ln\left(\frac{2n}{2n+1}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

On écrit $\ln\left(\frac{2n}{2n+1}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)$.

Or, si $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, $\ln(1 - u_n) \sim -u_n$. Avec $u_n = \frac{1}{2n+1}$, on obtient

$$\ln\left(\frac{2n}{2n+1}\right) \sim -\frac{1}{2n+1} \sim -\frac{1}{2n}.$$

11. En déduire la limite de $\exp\left((2n+1)\ln\left(\frac{2n}{2n+1}\right)\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Posons $a_n = (2n+1)\ln\left(\frac{2n}{2n+1}\right)$. D'après la question précédemment, $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -1$.

Par continuité de l'exponentielle, $\exp(a_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-1}$. Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \exp\left((2n+1)\ln\left(\frac{2n}{2n+1}\right)\right) = e^{-1}.$$

12. On admet l'équivalent suivant (dit de Stirling) :

$$n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}.$$

En déduire un équivalent de $4^n I_{n,n}$ et de $I_{n,n}$ puis la limite de la suite $(4^n I_{n,n})$.

Avec la formule établie à la question 5, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ $I_{n,n} = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$.

Par la formule de Stirling,

$$n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}, \quad (2n+1)! \sim (2n+1)^{2n+1} e^{-(2n+1)} \sqrt{2\pi(2n+1)}.$$

Ainsi

$$4^n I_{n,n} \sim 4^n \frac{n^{2n} e^{-2n} (2\pi n)}{(2n+1)^{2n+1} e^{-(2n+1)} \sqrt{2\pi(2n+1)}}.$$

On réécrit :

$$4^n I_{n,n} \sim \frac{2\pi n e}{\sqrt{2\pi(2n+1)}} \cdot \frac{1}{2n+1} \cdot \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{2n}.$$

Or, d'après la question 11 (et donc aussi avec l'exposant $2n$), $\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-1}$.

Après simplifications, il reste

$$4^n I_{n,n} \sim \frac{2\pi n}{(2n+1)\sqrt{2\pi(2n+1)}} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}.$$

Donc

$$4^n I_{n,n} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}$$

et en particulier

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 4^n I_{n,n} = 0.$$

On a enfin

$$I_{n,n} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}4^n}.$$