

DEVOIR MAISON N°11
A RENDRE POUR LE MERCREDI 1 AVRIL 2026

Exercice

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$\varphi(x) = e^x - xe^{1/x}.$$

Partie I – Étude de la fonction φ

1. Justifier que φ est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi'''(x) = e^x + \frac{3x+1}{x^5}e^{1/x}.$$

2. Déterminer les variations de φ'' et calculer $\varphi''(1)$.
3. En déduire les variations de φ' puis, montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \varphi'(x) \geq e$.
4. En déduire les variations de φ sur $\mathbb{R}_+^*$.
5. Montrer que, pour tout $x \geq 3$, on a

$$\varphi(x) \geq ex.$$

On pourra utiliser le théorème des accroissements finis.

Partie II – Étude d'une suite récurrente

On introduit la suite (u_n) définie, pour $n \in \mathbb{N}$ par

$$u_0 = 3, \quad u_{n+1} = \varphi(u_n).$$

6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et que $u_n \geq 3e^n$. En déduire la limite de la suite (u_n) .
7. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
8. Dans cette question, on pourra utiliser la fonction `exp` du module `math` (permettant de calculer l'exponentielle d'un nombre x) à condition de l'importer au préalable.
 - (a) Écrire une fonction Python `phi(x)` qui retourne le nombre $\varphi(x)$.
 - (b) Écrire une fonction Python itérative `u_iter(n)` qui retourne le terme u_n .
 - (c) Écrire une fonction Python récursive `u_recur(n)` qui retourne le terme u_n .
 - (d) Écrire une fonction Python `seuil(A)` qui retourne le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geq A$.

Partie III – Étude d’une suite implicite

9. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l’équation $\varphi(x) = n$ admet une unique solution, notée v_n dans $\mathbb{R}_+^*$. Préciser la valeur de v_0 .
10. Montrer que (v_n) est croissante et qu’elle diverge vers $+\infty$.
11. Justifier que $0 < v_1 < 2$ et que $1 < v_n < n$ pour $n \geq 2$.
12. En utilisant un algorithme de dichotomie, écrire une fonction Python `dicho_v(n, eps)` qui retourne une valeur approchée de v_n à `eps` près.
13. (a) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{n}{e^{v_n}} = 1 - \frac{v_n}{e^{v_n}} \exp\left(\frac{1}{v_n}\right).$$

- (b) En déduire que $e^{v_n} \sim n$.
- (c) En déduire un équivalent simple de (v_n) .