

Corrigé de la liste d'exercices n°20

Dérivation

Exercice 1.

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+x}}$$

On multiplie par la quantité conjuguée :

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+x}} = \frac{x(\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+x})}{(1+x^2) - (1+x)} = \frac{x(\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+x})}{x^2 - x}.$$

Pour $x \neq 0$,

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+x}} = \frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+x}}{x-1}.$$

Donc, en faisant tendre x vers 0,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+x}} = \frac{1+1}{-1} = -2.$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+x}} = -2}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+x}}$$

On reprend l'expression obtenue ci-dessus :

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+x}} = \frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+x}}{x-1}.$$

On divise numérateur et dénominateur par x :

$$\frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+x}}{x-1} = \frac{\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + \frac{\sqrt{1+x}}{x}}{1 - \frac{1}{x}}.$$

Or,

$$\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \rightarrow 1, \quad \frac{\sqrt{1+x}}{x} = \sqrt{\frac{1+x}{x^2}} \rightarrow 0, \quad 1 - \frac{1}{x} \rightarrow 1.$$

Donc

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+x}} = 1.}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} x \left[x - \frac{1}{x} \right]$$

Posons

$$u(x) = x - \frac{1}{x}.$$

Par définition de la partie entière, il existe $\theta(x) \in [0, 1[$ tel que

$$\lfloor u(x) \rfloor = u(x) - \theta(x).$$

Ainsi,

$$x \left[x - \frac{1}{x} \right] = x(u(x) - \theta(x)) = x \left(x - \frac{1}{x} \right) - x\theta(x) = x^2 - 1 - x\theta(x).$$

Or $\theta(x) \in [0, 1[$, donc

$$|x\theta(x)| \leq |x| \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0, \quad x^2 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

Par conséquent,

$$x^2 - 1 - x\theta(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} -1.$$

Donc

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} x \left[x - \frac{1}{x} \right] = -1.}$$

4. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1}$

On reconnaît le taux d'accroissement de $\ln$ en 1 :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - \ln 1}{x - 1} = (\ln)'(1) = \frac{1}{1} = 1.$$

Donc

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1} = 1.}$$

Exercice 2.

Soit une tangente commune. Supposons qu'elle soit tangente à la parabole $y = x^2$ au point d'abscisse a , et à l'hyperbole $y = \frac{1}{x}$ au point d'abscisse $b \neq 0$.

Tangente à $y = x^2$ en $x = a$. On a $f(x) = x^2$, donc $f'(a) = 2a$. L'équation de la tangente est

$$y = f'(a)(x - a) + f(a) = 2a(x - a) + a^2 = 2ax - a^2.$$

Tangente à $y = \frac{1}{x}$ en $x = b$. On a $g(x) = \frac{1}{x}$, donc $g'(b) = -\frac{1}{b^2}$. L'équation de la tangente est

$$y = g'(b)(x - b) + g(b) = -\frac{1}{b^2}(x - b) + \frac{1}{b} = -\frac{1}{b^2}x + \frac{2}{b}.$$

Pour que ce soit la même droite, il faut l'égalité des coefficients :

$$\begin{cases} 2a = -\frac{1}{b^2}, \\ -a^2 = \frac{2}{b}. \end{cases}$$

De la deuxième équation, on tire

$$b = -\frac{2}{a^2}.$$

En remplaçant dans la première :

$$2a = -\frac{1}{\left(-\frac{2}{a^2}\right)^2} = -\frac{1}{\frac{4}{a^4}} = -\frac{a^4}{4}.$$

Donc

$$8a = -a^4 \iff a(a^3 + 8) = 0.$$

Le cas $a = 0$ est impossible (il donnerait b indéfini), donc

$$a^3 = -8 \implies a = -2.$$

Alors

$$b = -\frac{2}{a^2} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}.$$

La tangente commune est donc

$$y = 2ax - a^2 = 2(-2)x - (-2)^2 = -4x - 4.$$

La tangente commune est unique et son équation est $y = -4x - 4$.

Exercice 3.

1. On a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h^2) - f(a + h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \frac{f(a + h^2) - f(a)}{h^2} - \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Puisque f est dérivable en a , on sait que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = f'(a)$.

Posons $H = h^2$. On a $H \rightarrow 0$ lorsque $h \rightarrow 0$ donc

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h^2) - f(a)}{h^2} = \lim_{H \rightarrow 0} \frac{f(a + H) - f(a)}{H} = f'(a)$$

donc

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h^2) - f(a + h)}{h} = 0 \times f'(a) - f'(a) = -f'(a).$$

2. On a

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)g(a) - f(a)g(x)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} g(a) \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f(a) \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = f'(a)g(a) - f(a)g'(a).$$

Exercice 4.

La fonction est définie par morceaux sur $[0, 1]$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x} & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ 2x + \lambda x^2 & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Les deux expressions sont continues (et même dérivables) sur leurs intervalles respectifs. Le seul point délicat est donc $x = \frac{1}{2}$.

1. Pour que f soit continue sur $[0, 1]$, il faut et il suffit que les deux morceaux coïncident en $x = \frac{1}{2}$:

$$\lim_{x \rightarrow (1/2)^-} f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right).$$

Or

$$\lim_{x \rightarrow (1/2)^-} f(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3},$$

et

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} + \lambda \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 + \frac{\lambda}{4}.$$

On impose donc

$$1 + \frac{\lambda}{4} = \frac{2}{3} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\lambda}{4} = -\frac{1}{3} \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda = -\frac{4}{3}.$$

$$f \text{ est continue sur } [0, 1] \Longleftrightarrow \lambda = -\frac{4}{3}.$$

2. Pour que f soit dérivable sur $[0, 1]$, il faut en particulier qu'elle soit continue en $\frac{1}{2}$, donc nécessairement

$$\lambda = -\frac{4}{3}.$$

Calculons les dérivées à gauche et à droite en $\frac{1}{2}$:

$$\left(\frac{1}{1+x}\right)' = -\frac{1}{(1+x)^2} \Rightarrow f'_-\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{\left(1+\frac{1}{2}\right)^2} = -\frac{1}{(3/2)^2} = -\frac{4}{9}.$$

Pour le second morceau,

$$(2x + \lambda x^2)' = 2 + 2\lambda x \Rightarrow f'_+\left(\frac{1}{2}\right) = 2 + \lambda.$$

L'égalité des dérivées en $\frac{1}{2}$ imposerait

$$2 + \lambda = -\frac{4}{9} \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda = -\frac{22}{9}.$$

Cette valeur est différente de $-\frac{4}{3}$, nécessaire pour la continuité. Il n'existe donc aucun λ satisfaisant simultanément continuité et égalité des dérivées en $\frac{1}{2}$.

$$\text{Il n'existe aucun } \lambda \in \mathbb{R} \text{ pour que } f \text{ soit dérivable sur } [0, 1].$$

Exercice 5.

Soit $f : x \mapsto x^2 \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.

A priori, la fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$ mais elle est prolongeable par continuité en 0. En effet, puisque la fonction $\arctan$ est bornée sur $\mathbb{R}$, on a $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ donc on peut prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.

Par ailleurs, par imparité de la fonction $\arctan$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f(-x) = (-x)^2 \arctan\left(-\frac{1}{x}\right) = -x^2 \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$$

donc la fonction f est impaire. Il suffit donc de l'étudier sur $\mathbb{R}_+^*$.

Etudions les variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$ en calculant ses dérivées successives.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f'(x) = 2x \arctan\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \left(-\frac{1}{x^2}\right) \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} = 2x \arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x^2}{1 + x^2} = 2x \arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{1 + x^2} - 1.$$

Par ailleurs, f est dérivable en 0 puisque

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = 0,$$

donc $f'(0) = 0$.

On dérive à nouveau f' : pour tout $x > 0$,

$$f''(x) = 2 \arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{2}{x} \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} - \frac{2x}{(1 + x^2)^2} = 2 \arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{2x}{1 + x^2} - \frac{2x}{(1 + x^2)^2} = 2 \arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{4x + 2x^3}{(1 + x^2)^2}$$

et

$$f''(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2 \arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x}{1 + x^2} = \pi$$

$$\text{car } \lim_{x \rightarrow 0} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Enfin, pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} f^{(3)}(x) &= -\frac{2}{x^2} \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} - \frac{(4 + 6x^2)(1 + x^2)^2 - 4x(1 + x^2)(4x + 2x^3)}{(1 + x^2)^4} \\ &= -\frac{2}{1 + x^2} - \frac{(4 + 6x^2)(1 + x^2) - 4x(4x + 2x^3)}{(1 + x^2)^3} \\ &= -\frac{2(1 + x^2)^2 + 6x^4 + 10x^2 + 4 - 16x^2 - 8x^4}{(1 + x^2)^3} \\ &= -\frac{2 + 4x^2 + 2x^4 - 2x^4 - 6x^2 + 4}{(1 + x^2)^3} \\ &= -\frac{-2x^2 + 6}{(1 + x^2)^3} \\ &= 2 \frac{x^2 - 3}{(1 + x^2)^3}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x \geq \sqrt{3}$, $f^{(3)}(x) \geq 0$ et pour tout $x \in]0, \sqrt{3}]$, $f^{(3)}(x) \leq 0$ donc la fonction f'' est strictement croissante sur $[\sqrt{3}, +\infty[$ et strictement décroissante sur $]0, \sqrt{3}]$.

La fonction f'' admet donc un minimum sur $\mathbb{R}_+^*$ et celui-ci vaut

$$f''(\sqrt{3}) = 2 \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{4\sqrt{3} + 2\sqrt{3}^3}{16} = \frac{\pi}{3} - \frac{5\sqrt{3}}{8} < 0.$$

Puisque $f''(0) = \pi > 0$, comme f'' est continue sur $\mathbb{R}$ et strictement décroissante sur $]0, \sqrt{3}]$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel $\alpha \in]0, \sqrt{3}[$ tel que $f''(\alpha) = 0$.

De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f''(x) = 0$ donc pour tout $x \in [\sqrt{3}, +\infty[$, $f''(x) < 0$.

Ainsi, pour tout $x \in [0, \alpha[$, $f''(x) > 0$ et pour tout $x \in]\alpha, +\infty[$, $f''(x) < 0$ donc la fonction f' est strictement croissante sur $[0, \alpha]$ et strictement décroissante sur $[\alpha, +\infty[$.

On sait que $\arctan(x) \underset{0}{\sim} x$ donc $\arctan\left(\frac{1}{x}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$ d'où $2x \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \underset{+\infty}{\sim} 2$, i.e.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = 2.$$

Ainsi, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x \arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{1+x^2} - 1 = 2 + 0 - 1 = 1$. Puisque f' est strictement croissante sur $[0, \alpha]$ et strictement décroissante sur $[\alpha, +\infty[$ avec $f'(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 1$, alors pour tout $x > 0$, $f'(x) > 0$ donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et on a $f(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ car $x^2 \arctan(x) \underset{+\infty}{\sim} x^2 \frac{1}{x} = x$.

Par imparité de f , on en déduit que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

Exercice 6.

1. Soit $f : x \mapsto \arctan(2x) + \arctan(x)$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{2}{1+(2x)^2} + \frac{1}{1+x^2} = \frac{2}{1+4x^2} + \frac{1}{1+x^2}.$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$ donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Calculons les limites de f .

On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$. Par ailleurs, $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x = -\infty$ donc par composition de

limites, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan(2x) = -\frac{\pi}{2}$. Ainsi, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\pi$.

De même, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$. Par ailleurs, $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$ donc par composition de

limites, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(2x) = \frac{\pi}{2}$. Ainsi, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pi$.

Puisque f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, la fonction f est bijective de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) =]-\pi, \pi[$.

2. Puisque f est bijective de $\mathbb{R}$ sur $]-\pi, \pi[$, il existe un unique réel x tel que $f(x) = \frac{\pi}{4}$ donc l'équation (E) admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.
3. Soit x la solution de (E) sur $\mathbb{R}$. On a alors

$$\tan(\arctan(2x) + \arctan(x)) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \frac{\tan(\arctan(2x)) + \tan(\arctan(x))}{1 - \tan(\arctan(x))\tan(\arctan(2x))} = 1 \Rightarrow \frac{3x}{1 - 2x^2} = 1,$$

ce qui implique que $2x^2 + 3x - 1 = 0$. Les racines de ce trinôme du second degré sont

$$x_1 = \frac{-3 - \sqrt{17}}{4} < 0 \text{ et } x_2 = \frac{-3 + \sqrt{17}}{4} > 0.$$

Or, la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $f(0) = 0$ donc l'unique antécédent de $\frac{\pi}{4}$ par la fonction f est nécessairement strictement positif.

On en déduit que l'unique solution de (E) sur $\mathbb{R}$ est $x = \frac{\sqrt{17} - 3}{4}$.

Exercice 7.

1. Les fonctions $\cos$ et $\sin$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a $\cos' = -\sin$, $\cos^{(2)} = -\cos$, $\cos^{(3)} = \sin$, $\cos^{(4)} = \cos$.

On en déduit par une récurrence immédiate que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\cos$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ (donc $\cos$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$) et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\cos^{(4n)} = \cos$, $\cos^{(4n+1)} = -\sin$, $\cos^{(4n+2)} = -\cos$ et $\cos^{(4n+3)} = \sin$.

2. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(2-x)^{n+1}}$.

• **Initialisation** : pour $n = 0$, on a bien f de classe $\mathcal{C}^0$, i.e. continue sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $f^{(0)}(x) = f(x) = \frac{0!}{(2-x)^{0+1}}$, donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

• **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(2-x)^{n+1}}$. Montrons que f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $f^{(n+1)}(x) = \frac{(n+1)!}{(2-x)^{n+2}}$.

Posons $u(x) = 2 - x$. On a pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $f^{(n)}(x) = \frac{n!}{u^{n+1}(x)}$. Puisque u est dérivable et ne s'annule pas sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, on en déduit que $f^{(n)}$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$,

$$f^{(n+1)}(x) = -\frac{(n+1)n!u'(x)}{u^{n+2}(x)} = \frac{(n+1)!}{(2-x)^{n+2}}.$$

Puisque $f^{(n+1)}$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, on en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, ce qui prouve la propriété au rang $n + 1$ et achève la récurrence.

Ainsi, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$,

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(2-x)^{n+1}}.$$

Exercice 8. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f'(x) = \frac{2x^2e^{x^2} - e^{x^2} + 1}{x^2} = 2e^{x^2} - \frac{e^{x^2} - 1}{x^2}.$$

Montrons que f est dérivable en 0. On a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2}.$$

Or, $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ et $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$ donc par composition, on en déduit que $e^{x^2} - 1 \underset{0}{\sim} x^2$, d'où

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} = 1. \text{ Ainsi, } f \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } f'(0) = 1.$$

On a donc montré que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, il reste à établir que f' est continue sur $\mathbb{R}$.

La fonction f' est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme composée de fonctions continues sur $\mathbb{R}^*$. Il reste à vérifier la continuité de f' en 0.

On a déjà montré que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} = 1$ et on a $\lim_{x \rightarrow 0} 2e^{x^2} = 2$ donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 2e^{x^2} - \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} = 2 - 1 = 1 = f'(0),$$

ce qui prouve que f' est continue en 0, et finalement f' est bien continue sur $\mathbb{R}$.

On en conclut que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $P_n : \llcorner$ Si f et g sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I , alors fg est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et pour tout $x \in I$,

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x). \gg$$

•**Initialisation :** Pour $n = 0$, si f et g sont de classe $\mathcal{C}^0$ sur I , on sait que fg est bien de classe $\mathcal{C}^0$, i.e. continue sur I car f et g le sont et on a pour tout $x \in I$,

$$\sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} f^{(k)}(x) g^{(0-k)}(x) = f(x)g(x) = (fg)^{(0)}(x),$$

donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

•**Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons la propriété P_n vraie et montrons la propriété P_{n+1} . Soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I . A fortiori, f et g sont de classe $\mathcal{C}^n$ sur I . Par hypothèse de récurrence, on en déduit que fg est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et que pour tout $x \in I$,

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x).$$

Montrons que fg est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I et que pour tout $x \in I$,

$$(fg)^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)}(x) g^{(n+1-k)}(x).$$

Puisque f et g sont de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I , pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $f^{(k)}$ et $g^{(n-k)}$ sont dérivables sur I donc la fonction $x \mapsto f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)$ est dérivable sur I de dérivée $x \mapsto f^{(k+1)}(x)g^{(n-k)}(x) + f^{(k)}(x)g^{(n+1-k)}(x)$.

Ainsi, $(fg)^{(n)}$ est dérivable sur I comme somme de fonctions dérivables sur I et on a pour tout $x \in I$,

$$\begin{aligned} (fg)^{(n+1)}(x) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (f^{(k+1)}(x)g^{(n-k)}(x) + f^{(k)}(x)g^{(n+1-k)}(x)) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k+1)}(x)g^{(n-k)}(x) + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x)g^{(n+1-k)}(x) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)}(x)g^{(n+1-k)}(x) + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x)g^{(n+1-k)}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)}(x)g^{(n+1-k)}(x) + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} f^{(k)}(x)g^{(n+1-k)}(x) \quad \left(\binom{n}{-1} = \binom{n}{n+1} = 0 \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) f^{(k)}(x)g^{(n+1-k)}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)}(x)g^{(n+1-k)}(x) \quad (\text{Relation de Pascal}), \end{aligned}$$

ce qui prouve la formule au rang $n + 1$ et achève la récurrence.

Exercice 10.

1. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, le dénominateur ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. •Initialisation :

Pour $n = 0$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f^{(0)}(x) = f(x) = \frac{\ln(x)}{x} = \frac{u_0 + v_0 \ln(x)}{x^{0+1}}$ avec $u_0 = 0$ et $v_0 = 1$, donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

•Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose qu'il existe deux réels u_n et v_n tels que pour tout réel x strictement positif, on ait $f^{(n)}(x) = \frac{u_n + v_n \ln(x)}{x^{n+1}}$.

Montrons la propriété au rang $n + 1$, c'est à dire montrons qu'il existe deux réels u_{n+1} et v_{n+1} tels que pour tout réel x strictement positif, on ait $f^{(n+1)}(x) = \frac{u_{n+1} + v_{n+1} \ln(x)}{x^{n+2}}$.

En dérivant $f^{(n)}$, on a pour tout $x > 0$,

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{\frac{v_n}{x} \times x^{n+1} - (n+1)x^n(u_n + v_n \ln(x))}{(x^{n+1})^2} = \frac{v_n - (n+1)u_n - (n+1)v_n \ln(x)}{x^{n+2}}.$$

Posons $u_{n+1} = v_n - (n+1)u_n$ et $v_{n+1} = -(n+1)v_n$ et on a bien $f^{(n+1)}(x) = \frac{u_{n+1} + v_{n+1} \ln(x)}{x^{n+2}}$, ce qui prouve la propriété au rang $n + 1$ et achève la récurrence.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Utilisons la formule de Leibniz pour calculer $f^{(n)}$.

Posons pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $g(x) = \frac{1}{x}$. La fonction g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et on a pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $g^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}}$ (ceci se montre par une récurrence immédiate).

Par ailleurs, remarquons que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ donc pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln^{(k)}(x) = g^{(k-1)}(x) = \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{x^k}$.

D'après la formule de Leibniz, puisque pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \ln(x) \times g(x)$, f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \ln^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) \\ &= \ln(x) g^{(n)}(x) + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \ln^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) \\ &= \frac{(-1)^n n! \ln(x)}{x^{n+1}} + \sum_{k=1}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{x^k} \frac{(-1)^{n-k} (n-k)!}{x^{n-k+1}} \\ &= \frac{(-1)^n n! \ln(x)}{x^{n+1}} + \frac{(-1)^{n-1} n! \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}{x^{n+1}} \end{aligned}$$

donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^{n-1} n! \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ et $v_n = (-1)^n n!$.

Exercice 11.

1. $t \mapsto \frac{(2t+1)^8}{16}$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. $u \mapsto \frac{1}{3} \ln(|u|)$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

3. $x \mapsto e^{\sin(x)}$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
4. $t \mapsto \frac{1}{\cos(t)}$ définie et dérivable sur $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$.
5. $x \mapsto \frac{1}{2}(\ln(x))^2$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
6. $x \mapsto 2e^{\sqrt{x}}$ définie sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
7. $u \mapsto \ln(\ln(u))$ définie et dérivable sur $]1, +\infty[$.

Exercice 12. Puisque $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0$, on sait qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in]a, a + \alpha]$, $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0$, ce qui implique que pour tout $x \in]a, a + \alpha]$, $f(x) - f(a) > 0$ (car $x - a > 0$).

En particulier, $f(a + \alpha) > f(a) = 0$.

De même, puisque $f'(b) = \lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} > 0$, on sait qu'il existe $\beta > 0$ tel que pour tout $x \in [b - \beta, b[$, $\frac{f(x) - f(b)}{x - b} > 0$, ce qui implique que pour tout $x \in [b - \beta, b[$, $f(x) - f(b) < 0$ (car $x - b < 0$).

En particulier, $f(b - \beta) < f(b) = 0$.

Puisque f est continue (car dérivable) sur $[a, b]$, que $f(a + \alpha) > 0$ et $f(b - \beta) < 0$, on déduit du théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe c_2 entre $a + \alpha$ et $b - \beta$, donc $c_2 \in]a, b[$ tel que $f(c_2) = 0$.

Puisque f est continue sur $[a, c_2]$, dérivable sur $]a, c_2[$, telle que $f(a) = f(c_2) = 0$, on déduit du théorème de Rolle qu'il existe $c_1 \in]a, c_2[$ tel que $f'(c_1) = 0$.

De même, puisque f est continue sur $[c_2, b]$, dérivable sur $]c_2, b[$, telle que $f(b) = f(c_2) = 0$, on déduit du théorème de Rolle qu'il existe $c_3 \in]c_2, b[$ tel que $f'(c_3) = 0$.

On a donc bien $a < c_1 < c_2 < c_3 < b$ tel que $f(c_2) = f'(c_1) = f'(c_3) = 0$.

Exercice 13.

1. Posons pour tout $x \in [a, b]$, $h(x) = g(x)(f(b) - f(a)) - f(x)(g(b) - g(a))$.

La fonction h est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ car f et g le sont.

De plus, on a $h(a) = g(a)f(b) - f(a)g(b) = h(b)$ donc d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que $h'(c) = 0$.

Or, $h'(c) = g'(c)(f(b) - f(a)) - f'(c)(g(b) - g(a))$ donc

$$g'(c)(f(b) - f(a)) = f'(c)(g(b) - g(a)).$$

2. (a) Montrons que pour tout $x \in]a, b]$, $g(x) \neq 0$.

S'il existait $x \in]a, b]$ tel que $g(x) = 0$, d'après le théorème de Rolle, il existerait $c \in]a, x[$ tel que $g'(c) = 0$, ce qui est absurde.

Donc pour tout $x \in]a, b]$, $g(x) \neq 0$.

- (b) Soit $x \in]a, b]$. D'après la question précédente, il existe $c_x \in]a, x[$ tel que

$$g'(c_x)(f(x) - f(a)) = f'(c_x)(g(x) - g(a)),$$

d'où $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$ puisque $f(a) = g(a) = 0$.

Or, puisque pour tout $x \in]a, a + \alpha]$, $a < c_x < x$, on a d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{x \rightarrow a} c_x = a$. Par ailleurs, on sait que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$, donc par composition

de limites, on obtient $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = l$, d'où $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = l$.

3. On pose

$$f(x) = e^x - 1 - x, \quad g(x) = x^2.$$

Quand $x \rightarrow 0$, on a $f(x) \rightarrow 0$ et $g(x) \rightarrow 0$, donc on est dans une forme indéterminée $0/0$.

Première application de la règle de l'Hôpital On dérive :

$$f'(x) = e^x - 1, \quad g'(x) = 2x.$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x}.$$

Mais le membre de droite est encore de type $0/0$.

Deuxième application de la règle de l'Hôpital On dérive à nouveau :

$$(e^x - 1)' = e^x, \quad (2x)' = 2.$$

Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}.$$

On conclut :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Exercice 14. • Supposons que a ne soit pas une extrémité de I , i.e. $\exists \alpha > 0, [a - \alpha, a + \alpha] \subset I$. Soit $x \in [a - \alpha, a[$. Puisque f est continue sur $[x, a]$, dérivable sur $]x, a[$, d'après le théorème des accroissements finis, il existe un réel $c_x \in]x, a[$ tel que $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c_x)$.

Puisque pour tout $x \in [a - \alpha, a], x < c_x < a$, d'après le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow a^-} c_x = a$. Or, $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = l$ donc par composition de limites, on en déduit que

$\lim_{x \rightarrow a^-} f'(c_x) = l$, d'où $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$, ce qui prouve que f est dérivable à gauche en a et que $f'_g(a) = l$.

De même, soit $x \in]a, a + \alpha]$. Puisque f est continue sur $[a, x]$, dérivable sur $]a, x[$, d'après le théorème des accroissements finis, il existe un réel $c_x \in]a, x[$ tel que $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c_x)$.

Puisque pour tout $x \in [a, a + \alpha], a < c_x < x$, d'après le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow a^+} c_x = a$. Or, $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = l$ donc par composition de limites, on en déduit que

$\lim_{x \rightarrow a^+} f'(c_x) = l$, d'où $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$, ce qui prouve que f est dérivable à droite en a et que $f'_d(a) = l$.

Finalement f est dérivable en a et $f'(a) = l$.

• Si a est une des extrémités de l'intervalle I , un seul des deux calculs de dérivée à gauche ou à droite suffit à conclure que f est dérivable en a et que $f'(a) = l$.

Exercice 15. Posons $g : x \mapsto e^x(f'(x) - f(x))$. Puisque f est deux fois dérivable sur $[a, b]$, on en déduit que g est dérivable sur $[a, b]$ donc continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

Par ailleurs, $g(a) = e^a(f'(a) - f(a)) = 0$ et $g(b) = e^b(f'(b) - f(b)) = 0$.

D'après le théorème de Rolle, on en déduit qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$.

Or, $g'(c) = e^c(f'(c) - f(c) + f''(c) - f'(c)) = e^c(f''(c) - f(c)) = 0$. Puisque $e^c \neq 0$, ceci implique que $f''(c) - f(c) = 0$, d'où $f(c) = f''(c)$.

Exercice 16. Posons pour tout $x \in [a, b]$, $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, ce qui est légitime car $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$. La fonction g est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ car f et $x \mapsto x$ le sont. Par ailleurs, $g(a) = g(b) = 0$ car $f(a) = f(b) = 0$ donc d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$.

Or, $g'(c) = \frac{cf'(c) - f(c)}{c^2} = 0$ donc $cf'(c) - f(c) = 0$, i.e. $f'(c) = \frac{f(c)}{c}$, car $c \neq 0$.

Exercice 17. Soient l et l' deux réels tels que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = l'$.

Supposons par l'absurde que $l' \neq 0$. Dans un premier temps, on suppose $l' > 0$.

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = l' > 0$, il existe $A > 0$ tel que pour tout $x > A$, $f'(x) > \frac{l'}{2}$.

Soit $x > A$. Puisque f est continue sur $[A, x]$ et dérivable sur $]A, x[$, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]A, x[$ tel que $f(x) - f(A) = f'(c)(x - A) > \frac{l'}{2}(x - A)$.

Ainsi, pour tout $x > A$, $f(x) > f(A) + \frac{l'}{2}(x - A)$. Puisque $l' > 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(A) + \frac{l'}{2}(x - A) = +\infty$, donc par comparaison, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, ce qui contredit notre hypothèse de départ.

De même, si $l' < 0$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} -f'(x) = -l' > 0$ donc d'après ce qui précède, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} -f(x) = +\infty$, d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, ce qui est de nouveau absurde.

Il est donc absurde de supposer $l' \neq 0$.

On a donc nécessairement $l' = 0$, i.e. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$.

Exercice 18. Posons pour tout $x \in [a, b]$, $g(x) = f(c)(x - a)(x - b) - (c - a)(c - b)f(x)$. Puisque $f \in \mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{R})$, on a également $g \in \mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{R})$.

On a $g(a) = g(c) = g(b) = 0$. En appliquant le théorème de Rolle sur $[a, c]$ et sur $[c, b]$, on en déduit qu'il existe $\alpha \in]a, c[$ et $\beta \in]c, b[$ tels que $g'(\alpha) = g'(\beta) = 0$.

Puisque g' est continue sur $[\alpha, \beta]$ et dérivable sur $] \alpha, \beta [$, on peut de nouveau appliquer le théorème de Rolle sur $[\alpha, \beta]$ et on en déduit qu'il existe $\gamma \in] \alpha, \beta [\subset] a, b [$ tel que $g''(\gamma) = 0$.

Or, pour tout $x \in [a, b]$,

$$g'(x) = f(c)(2x - (a + b)) - (c - a)(c - b)f'(x) \quad \text{et} \quad g''(x) = 2f(c) - (c - a)(c - b)f''(x)$$

donc

$$g''(\gamma) = 0 \Leftrightarrow f(c) = \frac{(c - a)(c - b)}{2} f''(\gamma).$$

Exercice 19.

1. (a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -\frac{2}{5}x$. On a donc le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
f	$-\infty$	$\frac{4}{5}$	$+\infty$

La fonction f est continue et décroissante sur $[0, 1]$ donc

$$f([0, 1]) = [f(1), f(0)] = \left[\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right] \subset [0, 1].$$

(b) On a

$$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{1}{5}(4 - x^2) = x \Leftrightarrow x^2 + 5x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5 - \sqrt{41}}{2} \text{ ou } x = \frac{-5 + \sqrt{41}}{2}.$$

(c) On a pour tout $x \in [0, 1]$, $|f'(x)| = \left| -\frac{2}{5}x \right| = \frac{2}{5}|x| \leq \frac{2}{5}$.

2. (a) $l = \frac{\sqrt{41} - 5}{2}$.

(b) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 1]$.

•**Initialisation** : $u_0 \in [0, 1]$ donc $P(0)$ est vraie.

•**Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n \in [0, 1]$.

On a $u_{n+1} = f(u_n) \in f([0, 1]) \subset [0, 1]$ donc $u_{n+1} \in [0, 1]$ ce qui prouve la propriété au rang $n + 1$ et achève la récurrence.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 1]$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $|u_{n+1} - l| = |f(u_n) - f(l)|$.

Puisque $u_n \in [0, 1]$ et $l \in [0, 1]$, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]0, 1[$ tel que $f(u_n) - f(l) = f'(c)(u_n - l)$ i.e. $|u_{n+1} - l| = |f'(c)||u_n - l|$.

Or, puisque $c \in]0, 1[$, on a $|f'(c)| \leq \frac{2}{5}$, d'où $|u_{n+1} - l| \leq \frac{2}{5}|u_n - l|$, et ce pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(d) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - l| \leq \left(\frac{2}{5}\right)^n$.

Initialisation : Pour $n = 0$, puisque $u_0 \in [0, 1]$ et que $l \in [0, 1]$, $|u_0 - l| \leq 1 = \left(\frac{2}{5}\right)^0$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - l| \leq \left(\frac{2}{5}\right)^n$.

D'après la question précédente, $|u_{n+1} - l| \leq \frac{2}{5}|u_n - l| \leq \frac{2}{5} \left(\frac{2}{5}\right)^n = \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}$, ce qui prouve la propriété au rang $n + 1$ et achève la récurrence.

(e) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq |u_n - l| \leq \left(\frac{2}{5}\right)^n$. Puisque $\left|\frac{2}{5}\right| < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$.

D'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - l| = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$.

(f) D'après la question d, il suffit que

$$\left(\frac{2}{5}\right)^n \leq 10^{-10} \Leftrightarrow e^{n \ln\left(\frac{2}{5}\right)} \leq 10^{-10} \Leftrightarrow n \ln\left(\frac{2}{5}\right) \leq -10 \ln(10) \Leftrightarrow n \geq -\frac{10 \ln(10)}{\ln\left(\frac{2}{5}\right)}$$

car $\ln\left(\frac{2}{5}\right) < 0$.

Puisque $-\frac{10 \ln(10)}{\ln\left(\frac{2}{5}\right)} \simeq 25,12$, le n_0 cherché est $n_0 = 26$.

Sinon, on peut aussi utiliser le script suivant en Python :

```
n=0
while (2/5)**n>10**(-10):
    n+=1
print(n)
```

Exercice 20. On pose

$$g(x) = x^2 - x + 1 \quad \text{et} \quad f(x) = \sqrt{g(x)}.$$

1. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = x^2 - x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = x^2 - x + 1.$$

L'égalité demandée est donc vérifiée.

- (b) D'après la question précédente,

$$g(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} > 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R}).$$

Ainsi, la racine carrée est toujours définie, donc f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

Montrons alors que (u_n) est bien définie : $u_0 \in [0, 1] \subset \mathbb{R}$, puis si $u_n \in \mathbb{R}$, alors

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

est bien défini car f est définie sur $\mathbb{R}$. Par récurrence, tous les u_n sont bien définis.

- (c) Soit $x \in [0, 1]$. Alors

$$x(x-1) \leq 0 \implies x^2 - x + 1 \leq 1.$$

De plus, $x^2 - x + 1 \geq 0$ (même $\geq \frac{3}{4}$ d'après 1.a). Donc

$$0 \leq f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1} \leq 1.$$

Ainsi $f(x) \in [0, 1]$ pour tout $x \in [0, 1]$.

- (d) On raisonne par récurrence.

Initialisation : $u_0 \in [0, 1] \subset [0, 1]$.

Hérédité : si $u_n \in [0, 1]$, alors par la question précédente

$$u_{n+1} = f(u_n) \in [0, 1].$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n \in [0, 1].$$

2. (a) La fonction g est polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$, et $g(x) > 0$ pour tout x . La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $(0, +\infty)$, donc la composée f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}} = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}.$$

Comme le dénominateur est strictement positif, le signe de $f'(x)$ est celui de $2x-1$. Sur $[0, 1]$:

$$f'(x) < 0 \text{ si } x < \frac{1}{2}, \quad f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \quad f'(x) > 0 \text{ si } x > \frac{1}{2}.$$

Donc f est décroissante sur $[0, \frac{1}{2}]$ puis croissante sur $[\frac{1}{2}, 1]$.

Valeurs utiles :

$$f(0) = 1, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad f(1) = 1.$$

Tableau de variations sur $[0, 1]$:

x	0	$\frac{1}{2}$	1
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

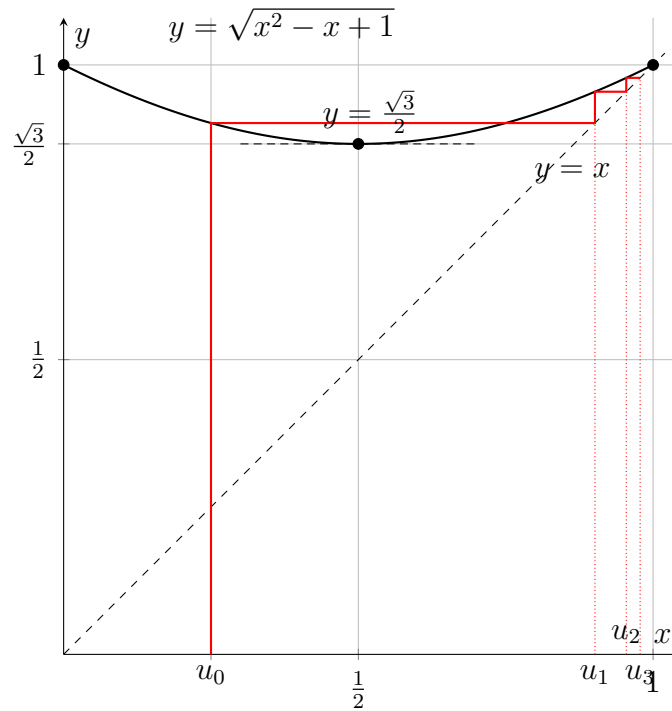
(b) Soit $x \in [0, 1]$. Comme $f(x) \geq 0$ et $x \geq 0$, on peut comparer les carrés :

$$f(x) \geq x \iff f(x)^2 \geq x^2 \iff x^2 - x + 1 \geq x^2 \iff 1 - x \geq 0.$$

Cette dernière inégalité est vraie sur $[0, 1]$, donc

$$\forall x \in [0, 1], \quad f(x) \geq x.$$

(c) On a :



Si $u_0 = \frac{1}{4}$, la construction graphique (méthode de l'escalier avec la courbe $y = f(x)$ et la droite $y = x$) donne une suite croissante vers 1. Numériquement :

$$u_0 = \frac{1}{4}, \quad u_1 = \frac{\sqrt{13}}{4} \approx 0.9014, \quad u_2 \approx 0.9545, \quad u_3 \approx 0.9781.$$

(d) Pour $x \in [0, 1]$,

$$|2x - 1| \leq 1 \quad \text{et} \quad x^2 - x + 1 \geq \frac{3}{4}.$$

Donc

$$|f'(x)| = \frac{|2x - 1|}{2\sqrt{x^2 - x + 1}} \leq \frac{1}{2\sqrt{3/4}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Ainsi,

$$\forall x \in [0, 1], \quad |f'(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

3. (a)

$$f(1) = \sqrt{1^2 - 1 + 1} = 1.$$

(b) D'après la question 1.(d), pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_n \in [0, 1].$$

Ainsi, u_n et 1 appartiennent à $[0, 1]$.

La fonction f est continue sur $[0, 1]$ et dérivable sur $]0, 1[$. On peut donc appliquer l'égalité des accroissements finis à f entre u_n et 1.

Il existe donc un réel c_n compris entre u_n et 1 tel que

$$f(u_n) - f(1) = f'(c_n)(u_n - 1).$$

Or $u_{n+1} = f(u_n)$ et, d'après la question 3.a, $f(1) = 1$. Donc

$$u_{n+1} - 1 = f'(c_n)(u_n - 1).$$

En prenant les valeurs absolues, on obtient

$$|u_{n+1} - 1| = |f'(c_n)| |u_n - 1|.$$

Comme $c_n \in [0, 1]$, la question 2.d donne

$$|f'(c_n)| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Par suite,

$$|u_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{\sqrt{3}} |u_n - 1|.$$

Autrement dit,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |1 - u_{n+1}| \leq \frac{1}{\sqrt{3}} |1 - u_n|.$$

(c) Par récurrence immédiate (ou itération de l'inégalité précédente), on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |1 - u_n| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n |1 - u_0|.$$

(d) Comme $\frac{1}{\sqrt{3}} < 1$, on a

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n |1 - u_0| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Par encadrement,

$$|1 - u_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

donc

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

La suite (u_n) est donc convergente et sa limite vaut

$$\boxed{1}.$$

Exercice 21. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$f_n(x) = \frac{\sin x}{2 - \cos x} - \frac{x}{n}, \quad x \in \mathbb{R},$$

et

$$f_0(x) = \frac{\sin x}{2 - \cos x}.$$

I) Généralités sur f_n

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\cos x \in [-1, 1]$, donc

$$2 - \cos x \in [1, 3],$$

en particulier $2 - \cos x \neq 0$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est définie sur tout $\mathbb{R}$:

$$D = \mathbb{R}.$$

2. La fonction $x \mapsto \sin x$ est impaire, et $x \mapsto 2 - \cos x$ est paire. Donc

$$x \mapsto \frac{\sin x}{2 - \cos x}$$

est impaire. De plus $x \mapsto x/n$ est impaire (pour $n \geq 1$).

Par conséquent, pour $n \geq 1$,

$$f_n(-x) = -f_n(x),$$

et f_n est impaire. Pour $n = 0$, f_0 est aussi impaire.

3. On a :

- Pour $n = 0$, f_0 est 2π -périodique (quotient de fonctions trigonométriques 2π -périodiques).
- Pour $n \geq 1$,

$$f_n(x + 2\pi) = \frac{\sin x}{2 - \cos x} - \frac{x + 2\pi}{n} = f_n(x) - \frac{2\pi}{n}.$$

Donc f_n n'est pas 2π -périodique.

4. Pour $n \geq 1$, on dispose de :

$$f_n(-x) = -f_n(x) \quad (\text{symétrie centrale par rapport à l'origine}),$$

et

$$f_n(x + 2\pi) = f_n(x) - \frac{2\pi}{n} \quad (\text{translation du graphe par le vecteur } (2\pi, -2\pi/n)).$$

Ainsi, la connaissance de la courbe sur $[0, \pi]$ permet d'obtenir celle sur $[-\pi, 0]$ par impaireté, puis sur tout $\mathbb{R}$ par translations de pas 2π .

Pour $n = 0$, on remplace la relation de translation ci-dessus par la périodicité

$$f_0(x + 2\pi) = f_0(x),$$

et l'argument est identique.

II) Étude de la fonction f_0

5. Comme $2 - \cos x \neq 0$ pour tout x , f_0 est C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Par quotient :

$$f'_0(x) = \frac{\cos x(2 - \cos x) - \sin x(\sin x)}{(2 - \cos x)^2} = \frac{2 \cos x - \cos^2 x - \sin^2 x}{(2 - \cos x)^2} = \frac{2 \cos x - 1}{(2 - \cos x)^2}.$$

Donc

$$f'_0(x) = \frac{2 \cos x - 1}{(2 - \cos x)^2}.$$

6. Sur $[0, \pi]$, le dénominateur $(2 - \cos x)^2$ est strictement positif. Le signe de $f'_0(x)$ est donc celui de

$$2 \cos x - 1.$$

On a

$$2 \cos x - 1 = 0 \iff \cos x = \frac{1}{2} \iff x = \frac{\pi}{3} \quad (\text{sur } [0, \pi]).$$

Ainsi :

$$f'_0(x) > 0 \text{ sur } [0, \pi/3[, \quad f'_0(\pi/3) = 0, \quad f'_0(x) < 0 \text{ sur }]\pi/3, \pi].$$

7. On calcule :

$$f_0(0) = 0, \quad f_0\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sin(\pi/3)}{2 - \cos(\pi/3)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2 - \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad f_0(\pi) = 0.$$

Donc f_0 est croissante sur $[0, \pi/3]$, puis décroissante sur $[\pi/3, \pi]$, avec maximum $\sqrt{3}/3$ atteint en $\pi/3$.

Tableau de variations sur $[0, \pi]$:

x	0	$\frac{\pi}{3}$	π
$f'_0(x)$	+	0	-
$f_0(x)$	0	$\nearrow \frac{\sqrt{3}}{3} \searrow$	0

Allure sur $\mathbb{R}$. La fonction f_0 est impaire et 2π -périodique : sa courbe est donc obtenue par répétition périodique de l'arc sur $[0, \pi]$, puis symétrie centrale.

8. D'après la question précédente, sur $[0, \pi]$,

$$0 \leq f_0(x) \leq \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Par imparité, le minimum global vaut

$$-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

et le maximum global vaut

$$\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Comme f_0 est 2π -périodique, ce sont bien les extrêmes sur tout $\mathbb{R}$.

Ainsi :

$$\max_{\mathbb{R}} f_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \min_{\mathbb{R}} f_0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Et donc

$$\max_{x \in \mathbb{R}} |f_0(x)| = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,577.$$

III) Primitive de f_0 et équation différentielle

9. On remarque que

$$\frac{d}{dx}(2 - \cos x) = \sin x.$$

Donc

$$\int \frac{\sin x}{2 - \cos x} dx = \ln(2 - \cos x) + C$$

(car $2 - \cos x \geq 1 > 0$).

Une primitive de f_0 sur $\mathbb{R}$ est donc

$$\boxed{F(x) = \ln(2 - \cos x).}$$

Alors

$$\int_0^{\pi/3} \frac{\sin t}{2 - \cos t} dt = F\left(\frac{\pi}{3}\right) - F(0) = \ln\left(2 - \frac{1}{2}\right) - \ln(1) = \ln\left(\frac{3}{2}\right).$$

Donc

$$\boxed{\int_0^{\pi/3} \frac{\sin t}{2 - \cos t} dt = \ln\left(\frac{3}{2}\right).}$$

On considère l'équation différentielle

$$(E) : y'(x) + \frac{\sin x}{2 - \cos x} y(x) = 2 \sin x.$$

10. Résolution de l'équation homogène (H).

L'équation homogène associée est

$$(H) : y'(x) + \frac{\sin x}{2 - \cos x} y(x) = 0.$$

Elle s'écrit, pour $y \neq 0$,

$$y(x) = C \exp(-\ln(2 - \cos x))$$

Finalement, toutes les solutions de (H) sont

$$\boxed{y_h(x) = \frac{C}{2 - \cos x} \quad (C \in \mathbb{R}).}$$

11. Cherchons une solution particulière de la forme $y_p(x) = a \cos x + b$.

Alors

$$y'_p(x) = -a \sin x.$$

En remplaçant dans (E),

$$-a \sin x + \frac{\sin x}{2 - \cos x}(a \cos x + b) = 2 \sin x.$$

En multipliant par $2 - \cos x$,

$$-a \sin x(2 - \cos x) + \sin x(a \cos x + b) = 2 \sin x(2 - \cos x).$$

Donc

$$\sin x(-2a + 2a \cos x + b) = \sin x(4 - 2 \cos x).$$

On identifie les coefficients en 1 et $\cos x$:

$$2a = -2 \quad \Rightarrow \quad a = -1,$$

puis

$$-2a + b = 4 \quad \Rightarrow \quad 2 + b = 4 \quad \Rightarrow \quad b = 2.$$

Ainsi,

$$\boxed{y_p(x) = 2 - \cos x.}$$

La solution générale de (E) est donc

$$\boxed{y(x) = 2 - \cos x + \frac{C}{2 - \cos x} \quad (C \in \mathbb{R}).}$$

12. On impose

$$h(0) = 2 - \cos 0 + \frac{C}{2 - \cos 0} = 1 + \frac{C}{1} = 1.$$

Donc $C = 0$. Ainsi

$$\boxed{h(x) = 2 - \cos x.}$$

IV) Étude de la fonction g

On considère

$$g(x) = \frac{\sin x}{x(2 - \cos x)}.$$

13. Comme $2 - \cos x \neq 0$ pour tout x , le seul problème vient du facteur x au dénominateur. Donc le domaine de définition de g est

$$\boxed{D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}.}$$

14. On a

$$g(x) = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{2 - \cos x}.$$

Quand $x \rightarrow 0$,

$$\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1 \quad \text{et} \quad 2 - \cos x \rightarrow 1.$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1.$$

Ainsi g admet une limite finie en 0, égale à

$$\boxed{l = 1.}$$

On prolonge par continuité en posant $g(0) = 1$.

On admet maintenant que g est dérivable sur $]0, \pi]$ et que $g'(x) < 0$ sur $]0, \pi]$.

15. g est strictement décroissante et continue sur tout $[0, \pi]$.

Or

$$g(0) = 1, \quad g(\pi) = \frac{\sin \pi}{\pi(2 - \cos \pi)} = 0.$$

Ainsi l'image de $[0, \pi]$ par g est

$$I = [0, 1].$$

La fonction g est donc une bijection de $[0, \pi]$ sur I , et sa réciproque

$$h : I \rightarrow [0, \pi]$$

est bien définie.

$$\boxed{I = [0, 1].}$$

V) Étude d'une suite qui annule f_n

16. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a > 0$ tel que $f_n(a) = 0$. Alors

$$\frac{\sin a}{2 - \cos a} = \frac{a}{n},$$

soit

$$f_0(a) = \frac{a}{n}.$$

Comme $a > 0$, le membre de droite est positif. D'après la question 8,

$$f_0(a) \leq \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Donc

$$\frac{a}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad a \leq \frac{n}{\sqrt{3}}.$$

Ainsi

$$a \in \left[0, \frac{n}{\sqrt{3}}\right].$$

17. Pour $x \neq 0$,

$$f_n(x) = \frac{\sin x}{2 - \cos x} - \frac{x}{n} = x \left(\frac{\sin x}{x(2 - \cos x)} - \frac{1}{n} \right) = x \left(g(x) - \frac{1}{n} \right).$$

Or $1/n \in [0, 1] = I$. Comme $g : [0, \pi] \rightarrow [0, 1]$ est bijective, il existe un unique

$$x_n = h\left(\frac{1}{n}\right) \in [0, \pi]$$

tel que

$$g(x_n) = \frac{1}{n}.$$

Alors $f_n(x_n) = 0$. De plus :

- si $n = 1$, $x_1 = h(1) = 0$;
- si $n \geq 2$, $1/n < 1$, donc $x_n \in]0, \pi]$, et c'est l'unique zéro non nul de f_n dans $[0, \pi]$.

18. On a

$$x_n = h\left(\frac{1}{n}\right), \quad \frac{1}{n} \longrightarrow 0.$$

Comme h est la réciproque d'une bijection continue strictement monotone, h est continue sur $[0, 1]$. Donc

$$x_n \longrightarrow h(0).$$

Or $g(\pi) = 0$, donc $h(0) = \pi$. Ainsi

$$x_n \longrightarrow \pi.$$