

Liste d'exercices n°21

Intégration

Exercice 1.

1. Donner le domaine de définition $\mathcal{D}$ de la fonction $t \mapsto \frac{t+7}{t^2+2t-3}$.
2. Trouver deux réels a et b tels que pour tout $t \in \mathcal{D}$, on ait

$$\frac{t+7}{t^2+2t-3} = \frac{a}{t-1} + \frac{b}{t+3}.$$

3. En déduire la valeur de l'intégrale suivante :

$$I = \int_{-2}^0 \frac{t+7}{t^2+2t-3} dt.$$

Exercice 2.

Trouver une primitive de la fonction suivante :

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}}.$$

Exercice 3.

Calculer les intégrales suivantes.

1. $\int_0^\pi \cos^2(2t) dt$
2. $\int_0^\pi \sin^3(t) dt$
3. $\int_0^\pi \cos^3(t) \sin^4(t) dt$
4. $\int_0^\pi \cos^2(t) \sin^4(t) dt$

Exercice 4.

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et soit G la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$G: x \mapsto \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x^2+1} f(t) dt.$$

Montrer que la fonction G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

Exercice 5.

Pour $x > 0$, on pose

$$I(x) = \int_{1/x}^x \frac{t}{1+t+t^2+t^3} dt.$$

1. Montrer que la fonction I est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.
2. Calculer $I'(x)$ et en déduire une expression simple de $I(x)$ pour tout $x > 0$.

Exercice 6.

On introduit sur $\mathbb{R}^*$ la fonction

$$f: x \mapsto \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt.$$

1. Prolonger f par continuité en 0.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7. Calculer, si elle existe, la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \int_1^x \frac{t^2}{1+t^2} dt.$$

Exercice 8. Calculer les intégrales suivantes.

1. $\int_0^1 x^3 e^{3x} dx$
2. $\int_0^1 e^{-x} \sin(x) dx$
3. $\int_0^1 t^2 \arctan(t) dt$

Exercice 9. Trouver une primitive des fonctions suivantes.

1. $x \mapsto \ln^2(x)$
2. $t \mapsto \sin(\sqrt[3]{t})$
3. $t \mapsto t \ln(t)$.
4. $x \mapsto \frac{1}{x^2 + 2x + 5}$
5. (a) $t \mapsto \sqrt{1-t^2}$
(b) $x \mapsto \sqrt{9-4x^2}$

Exercice 10. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

1. Supposons que f est impaire. Montrer que F est paire.
2. Supposons que f est paire. Montrer que F est impaire si et seulement si $F(0) = 0$.
3. Supposons que f est T -périodique avec $T > 0$. Montrer que F est T -périodique si et seulement si $F(T) = F(0)$ (ce qui équivaut à dire que $\int_0^T f(x) dx = 0$).

Exercice 11.

Considérons les intégrales suivantes :

$$C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{\cos(t) + \sin(t)} dt \quad \text{et} \quad S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{\cos(t) + \sin(t)} dt.$$

1. A l'aide d'un changement de variable affine, montrer que $C = S$.
2. Calculer $C + S$, puis en déduire les valeurs de C et de S .
3. Considérons l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^1 \frac{dt}{t + \sqrt{1-t^2}}.$$

- (a) Vérifier que l'intégrale I est bien définie.
- (b) A l'aide d'un changement de variable, calculer l'intégrale I .

Exercice 12. Calculer les intégrales suivantes.

1. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sin(x)}{3 + 2\cos(2x)} dx$
On pourra faire le changement de variable $u = \cos(x)$.
2. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x)}{3 + 2\cos(2x)} dx$
On pourra faire le changement de variable $u = \sin(x)$.

Exercice 13. Calculer les intégrales suivantes.

1. $\int_{-1}^1 \frac{t^3}{1+t^2+t^4} dt$
2. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1+\sin(\theta)} d\theta$, avec le changement de variable $t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$.
3. $\int_2^3 \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} dx$, avec le changement de variable $u = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$.

Exercice 14. Soit f une fonction continue sur $[0; 1]$. Pour tout entier naturel n , on pose :

$$I_n = \int_0^1 x^n f(x) dx.$$

Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

Exercice 15. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue telle que $\left| \int_a^b f(x) dx \right| = \int_a^b |f(x)| dx$.
Montrer que f garde un signe constant sur $[a, b]$.

Exercice 16. Calculer les limites, si elles existent, des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies par :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$;
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \sum_{k=1}^n \left(2 + \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)^2$.

Exercice 17. A l'aide du changement de variable $y = \frac{1}{x}$, calculer $\int_{\frac{1}{a}}^a \frac{x \ln(x)}{(1+x^2)^2} dx$ ($a > 0$).

Exercice 18. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, et $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\varphi(x) = \int_0^x \sin(x-t) f(t) dt \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que φ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$(E) : y'' + y = f(x).$$

2. Déterminer toutes les fonctions réelles solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 19. Dans cette partie on pose, pour $x \in \mathbb{R}_+$,

$$\varphi(x) = \int_0^1 f_x(t) dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t^x} dt.$$

1. Calculer $\varphi(0)$, $\varphi(1)$ et $\varphi(2)$.
2. Sans utiliser de dérivée, montrer que φ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.
3. Montrer que si x et y sont dans $\mathbb{R}_+$ avec $x \leq y$:

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \int_0^1 (t^x - t^y) dt \leq y - x.$$

4. En déduire que φ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
5. Montrer que pour $x \geq 0$, on a

$$1 - \varphi(x) = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t^x} dt.$$

6. En majorant l'intégrale $\int_0^1 \frac{t^x}{1+t^x} dt$, en déduire que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 1.$$

7. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour $x \geq 0$:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} + x \int_0^1 \frac{t^x}{(1+t^x)^2} dt.$$

8. Déterminer la pente de la demi-tangente au point d'abscisse 0 pour la courbe représentant φ .
9. Esquisser l'allure de la courbe représentant φ sur $[0, +\infty[$.
10. En utilisant l'expression de la question 6) et une intégration par parties, trouver un équivalent de $\varphi(x) - 1$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice 20. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

1. En comparant l'aire sous la courbe d'équation $y = f(x)$ avec l'aire des rectangles de hauteur $f(k)$ sur $[k, k+1]$, montrer que pour tout entier $k \geq 1$:

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq f(k).$$

2. Établir les inégalités

$$\int_1^{n+1} f(x) dx \leq \sum_{k=1}^n f(k) \leq f(1) + \int_1^n f(x) dx.$$

3. En déduire un encadrement explicite de S_n en fonction de $\sqrt{n}$, puis conclure que $S_n \sim 2\sqrt{n}$.
4. De la même manière, montrer que, pour $\alpha \in]0, 1[$:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$