

Corrigé de la liste d'exercices n°21

Intégration

Exercice 1.

1. La fonction est bien définie si $t^2 + 2t - 3 \neq 0$, i.e. si $t \notin \{1, -3\}$ donc $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3, 1\}$.
2. Pour tout $t \in \mathcal{D}$, on a

$$\frac{t+7}{t^2+2t-3} = \frac{a}{t-1} + \frac{b}{t+3} \Leftrightarrow \frac{t+7}{t^2+2t-3} = \frac{(a+b)t+3a-b}{t^2+2t-3} \Leftrightarrow t+7 = (a+b)t+3a-b.$$

Par identification, on en déduit

$$\begin{cases} a+b &= 1 \\ 3a-b &= 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a &= 2 \\ b &= -1 \end{cases}.$$

3. D'après la question précédente, on a

$$I = \int_{-2}^0 \frac{t+7}{t^2+2t-3} dt = \int_{-2}^0 \left(\frac{2}{t-1} - \frac{1}{t+3} \right) dt.$$

Par linéarité de l'intégrale, on en déduit

$$I = 2 \int_{-2}^0 \frac{dt}{t-1} - \int_{-2}^0 \frac{dt}{t+3} = 2[\ln(|t-1|)]_{-2}^0 - [\ln(|t+3|)]_{-2}^0 = -2\ln(3) - \ln(3) = -3\ln(3).$$

Exercice 2. La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}}$ est définie sur $[1, +\infty[$.

On a pour tout $x \geq 1$, $f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{x+1 - (x-1)} = \frac{\sqrt{x+1}}{2} - \frac{\sqrt{x-1}}{2}$.

Une primitive de f sur $[1, +\infty[$ est alors $F : x \mapsto \frac{(x+1)^{\frac{3}{2}} - (x-1)^{\frac{3}{2}}}{3}$.

Exercice 3.

1. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\cos^2(2t) = \frac{\cos(4t) + 1}{2}$ donc par linéarité de l'intégrale, on obtient :

$$\int_0^\pi \cos^2(2t) dt = \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos(4t) dt + \frac{1}{2} \int_0^\pi dt = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(4t)}{4} \right]_0^\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

2. On a pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\sin^3(t) = \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \right)^3 = -\frac{1}{8i} (e^{3it} - 3e^{it} + 3e^{-it} - e^{-3it}) = -\frac{1}{8i} (2i \sin(3t) - 6i \sin(t)) = \frac{3 \sin(t) - \sin(3t)}{4}.$$

Par linéarité de l'intégrale, on obtient :

$$\int_0^\pi \sin^3(t) dt = \frac{3}{4} \int_0^\pi \sin(t) dt - \frac{1}{4} \int_0^\pi \sin(3t) dt = \frac{3}{4} [-\cos(t)]_0^\pi - \frac{1}{4} \left[-\frac{\cos(3t)}{3} \right]_0^\pi = \frac{3}{2} - \frac{1}{6} = \frac{4}{3}.$$

3. On a pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
 \cos^3(t) \sin^4(t) &= \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right)^3 \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \right)^4 \\
 &= \frac{1}{128} (e^{3it} + 3e^{it} + 3e^{-it} + e^{-3it}) (e^{4it} - 4e^{2it} + 6 - 4e^{-2it} + e^{-4it}) \\
 &= \frac{1}{128} (2 \cos(7t) - 2 \cos(5t) - 6 \cos(3t) + 6 \cos(t)) \\
 &= \frac{1}{64} (\cos(7t) - \cos(5t) - 3 \cos(3t) + 3 \cos(t)).
 \end{aligned}$$

Par linéarité de l'intégrale, on obtient

$$\begin{aligned}
 \int_0^\pi \cos^3(t) \sin^4(t) dt &= \frac{1}{64} \left(\int_0^\pi \cos(7t) dt - \int_0^\pi \cos(5t) dt - 3 \int_0^\pi \cos(3t) dt + 3 \int_0^\pi \cos(t) dt \right) \\
 &= \frac{1}{64} \left(\left[\frac{\sin(7t)}{7} \right]_0^\pi - \left[\frac{\sin(5t)}{5} \right]_0^\pi - 3 \left[\frac{\sin(3t)}{3} \right]_0^\pi + 3 \left[\sin(t) \right]_0^\pi \right) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Autre méthode :

$$\int_0^\pi \cos^3(t) \sin^4(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(t) \sin^4(t) dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \cos^3(t) \sin^4(t) dt.$$

Dans la deuxième intégrale, on réalise le changement de variable $u = \pi - t$ et on obtient

$$\begin{aligned}
 \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \cos^3(t) \sin^4(t) dt &= - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^3(\pi - u) \sin^4(\pi - u) du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos^3(u) \sin^4(u) du \\
 &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(u) \sin^4(u) du
 \end{aligned}$$

$$\text{donc } \int_0^\pi \cos^3(t) \sin^4(t) dt = 0.$$

4. On a pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
 \cos^2(t) \sin^4(t) &= \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right)^2 \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \right)^4 \\
 &= \frac{1}{64} (e^{2it} + 2 + e^{-2it}) (e^{4it} - 4e^{2it} + 6 - 4e^{-2it} + e^{-4it}) \\
 &= \frac{1}{64} (2 \cos(6t) - 4 \cos(4t) - 2 \cos(2t) + 4) \\
 &= \frac{1}{32} \cos(6t) - \frac{1}{16} \cos(4t) - \frac{1}{32} \cos(2t) + \frac{1}{16}.
 \end{aligned}$$

Par linéarité de l'intégrale, on obtient

$$\begin{aligned}
 \int_0^\pi \cos^2(t) \sin^4(t) dt &= \frac{1}{32} \int_0^\pi \cos(6t) dt - \frac{1}{16} \int_0^\pi \cos(4t) dt - \frac{1}{32} \int_0^\pi \cos(2t) dt + \frac{1}{16} \int_0^\pi dt \\
 &= \frac{1}{32} \left[\frac{\sin(6t)}{6} \right]_0^\pi - \frac{1}{16} \left[\frac{\sin(4t)}{4} \right]_0^\pi - \frac{1}{32} \left[\frac{\sin(2t)}{2} \right]_0^\pi + \frac{\pi}{16} \\
 &= \frac{\pi}{16}.
 \end{aligned}$$

Exercice 4. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \int_0^x f(t)dt$. Puisque f est continue sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème de l'analyse, F est l'unique primitive de f qui s'annule en 0. En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = f(x)$ et puisque f est continue sur $\mathbb{R}$, on en déduit que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

D'après la relation de Chasles, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$G(x) = \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x^2+1} f(t)dt = \frac{1}{2} \left(\int_0^{x^2+1} f(t)dt - \int_0^{x-1} f(t)dt \right) = \frac{1}{2} (F(x^2+1) - F(x-1)).$$

La fonction G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$G'(x) = \frac{1}{2} (2xF'(x^2+1) - F'(x-1)) = \frac{1}{2} (2xf(x^2+1) - f(x-1)) = xf(x^2+1) - \frac{f(x-1)}{2}.$$

Exercice 5.

1. On considère

$$\varphi(t) = \frac{t}{1+t+t^2+t^3}.$$

Pour $t > 0$, on a $1+t+t^2+t^3 = (1+t)(1+t^2) > 0$, donc φ est continue sur $]0, +\infty[$. Pour $x > 0$, les bornes $1/x$ et x appartiennent à $]0, +\infty[$, et l'intégrale $\int_{1/x}^x \varphi(t) dt$ est bien définie (au sens des intégrales orientées).

De plus, les fonctions $a(x) = 1/x$ et $b(x) = x$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, et φ est continue sur $]0, +\infty[$. Par la formule de Leibniz (dérivation d'une intégrale à bornes variables), I est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et

$$I'(x) = \varphi(b(x)) b'(x) - \varphi(a(x)) a'(x) = \varphi(x) - \varphi(1/x) \left(-\frac{1}{x^2} \right) = \varphi(x) + \frac{\varphi(1/x)}{x^2}.$$

2. Soit $x > 0$. Calculons $\varphi(1/x)$:

$$\varphi(1/x) = \frac{1/x}{1+1/x+1/x^2+1/x^3} = \frac{1/x}{(x^3+x^2+x+1)/x^3} = \frac{x^2}{x^3+x^2+x+1}.$$

Ainsi,

$$\frac{\varphi(1/x)}{x^2} = \frac{1}{x^3+x^2+x+1} = \frac{1}{1+x+x^2+x^3}.$$

D'autre part,

$$\varphi(x) = \frac{x}{1+x+x^2+x^3}.$$

On en déduit

$$I'(x) = \frac{x}{1+x+x^2+x^3} + \frac{1}{1+x+x^2+x^3} = \frac{1+x}{1+x+x^2+x^3}.$$

Or $1+x+x^2+x^3 = (1+x)(1+x^2)$, donc

$$I'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Par intégration,

$$I(x) = \arctan(x) + C.$$

Comme $I(1) = \int_1^1 \varphi(t) dt = 0$, on obtient

$$0 = \arctan(1) + C = \frac{\pi}{4} + C \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{\pi}{4}.$$

Finalement, pour tout $x > 0$,

$$I(x) = \arctan(x) - \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 6.

1. Si $x > 0$, alors pour tout $t \in [x, 2x]$ on a $e^x \leq e^t \leq e^{2x}$, donc

$$e^x \int_x^{2x} \frac{dt}{t} \leq \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt \leq e^{2x} \int_x^{2x} \frac{dt}{t},$$

c'est-à-dire

$$e^x \ln 2 \leq f(x) \leq e^{2x} \ln 2.$$

En faisant tendre $x \rightarrow 0^+$ on obtient $f(x) \rightarrow \ln 2$. De même, si $x < 0$, en écrivant l'intégrale comme intégrale orientée on obtient également $f(x) \rightarrow \ln 2$ lorsque $x \rightarrow 0^-$. On prolonge donc f par continuité en posant

$$f(0) = \ln 2.$$

2. Sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction $t \mapsto \frac{e^t}{t}$ est continue donc admet une primitive F . Alors, pour $x > 0$,

$$f(x) = F(2x) - F(x),$$

d'où f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$f'(x) = 2F'(2x) - F'(x) = 2\frac{e^{2x}}{2x} - \frac{e^x}{x} = \frac{e^{2x} - e^x}{x}.$$

Un raisonnement identique vaut sur $\mathbb{R}_-^*$, donc f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et

$$\forall x \neq 0, \quad f'(x) = \frac{e^{2x} - e^x}{x}.$$

Enfin,

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x - 1)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1,$$

donc f' se prolonge par continuité en 0 en posant $f'(0) = 1$. On conclut que f ainsi prolongée est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7. Posons pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \int_1^x \frac{t^2}{1+t^2} dt$. Puisque la fonction $f : t \mapsto \frac{t^2}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème fondamental de l'analyse, F est l'unique primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 1, i.e. pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = f(x)$ et $F(1) = 0$.

On alors

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \int_1^x \frac{t^2}{1+t^2} dt = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x) - F(1)}{x-1} = F'(1) = f(1) = \frac{1}{2}.$$

Exercice 8.

1. Soit $I = \int_0^1 x^3 e^{3x} dx$.

On réalise une intégration par parties en posant $u(x) = x^3, v'(x) = e^{3x}, u'(x) = 3x^2, v(x) = \frac{1}{3}e^{3x}$ et on obtient

$$I = \left[\frac{1}{3} x^3 e^{3x} \right]_0^1 - \int_0^1 x^2 e^{3x} dx = \frac{e^3}{3} - \int_0^1 x^2 e^{3x} dx.$$

On réalise une nouvelle intégration par parties en posant $u(x) = x^2, v'(x) = e^{3x}, u'(x) = 2x, v(x) = \frac{1}{3}e^{3x}$ et on obtient

$$I = \frac{e^3}{3} - \left[\frac{1}{3} x^2 e^{3x} \right]_0^1 + \frac{2}{3} \int_0^1 x e^{3x} dx = \frac{2}{3} \int_0^1 x e^{3x} dx.$$

Enfin, on effectue une dernière intégration par parties en posant $u(x) = x, v'(x) = e^{3x}, u'(x) = 1, v(x) = \frac{1}{3}e^{3x}$ et on obtient

$$I = \frac{2}{3} \left[\frac{1}{3} x e^{3x} \right]_0^1 - \frac{2}{3} \int_0^1 \frac{1}{3} e^{3x} dx = \frac{2}{9} e^3 - \frac{2}{27} [e^{3x}]_0^1 = \frac{2}{9} e^3 - \frac{2}{27} e^3 + \frac{2}{27} = \frac{4}{27} e^3 + \frac{2}{27}.$$

2. Soit $I = \int_0^1 e^{-x} \sin(x) dx$.

On réalise une intégration par parties en posant $u'(x) = e^{-x}, v(x) = \sin(x), u(x) = -e^{-x}, v'(x) = \cos(x)$ et on obtient

$$I = [-\sin(x)e^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x} \cos(x) dx = -\sin(1)e^{-1} + \int_0^1 e^{-x} \cos(x) dx.$$

On effectue une nouvelle intégration par parties en posant $u'(x) = e^{-x}, v(x) = \cos(x), u(x) = -e^{-x}, v'(x) = -\sin(x)$ et on obtient

$$I = -\sin(1)e^{-1} + [-e^{-x} \cos(x)]_0^1 - \int_0^1 e^{-x} \sin(x) dx = -\sin(1)e^{-1} - e^{-1} \cos(1) + 1 - I$$

d'où

$$2I = 1 - e^{-1}(\cos(1) + \sin(1))$$

et finalement $I = \frac{1 - e^{-1}(\cos(1) + \sin(1))}{2}$.

3. Soit $I = \int_0^1 t^2 \arctan(t) dt$.

On réalise une intégration par parties en posant $u'(t) = t^2, v(t) = \arctan(t), u(t) = \frac{t^3}{3}, v'(t) = \frac{1}{1+t^2}$ et on obtient

$$I = \left[\frac{t^3 \arctan(t)}{3} \right]_0^1 - \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{t^3}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{12} - \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{t^3}{1+t^2} dt.$$

Par ailleurs, pour tout $t \in [0, 1]$, $\frac{t^3}{1+t^2} = t \times \frac{t^2}{1+t^2} = t \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) = t - \frac{t}{1+t^2}$ donc par linéarité de l'intégrale, on obtient

$$\int_0^1 \frac{t^3}{1+t^2} dt = \int_0^1 t dt - \int_0^1 \frac{t}{1+t^2} dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 - \left[\frac{1}{2} \ln(1+t^2)\right]_0^1 = \frac{1 - \ln(2)}{2}$$

donc

$$I = \frac{\pi}{12} + \frac{\ln(2) - 1}{6}.$$

Exercice 9.

1. D'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction $F : x \mapsto \int_1^x \ln^2(t) dt$ est l'unique primitive de $x \mapsto \ln^2(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ qui s'annule en 1.

On effectue une intégration par parties en posant $u(t) = \ln(t)$, $v'(t) = \ln(t)$, $u'(t) = \frac{1}{t}$, $v(t) = t \ln(t) - t$ et on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned} F(x) &= [\ln(t)(t \ln(t) - t)]_1^x - \int_1^x (\ln(t) - 1) dt \\ &= \ln(x)(x \ln(x) - x) - \int_1^x \ln(t) dt + x - 1 \\ &= x \ln(x)(\ln(x) - 1) - [t \ln(t) - t]_1^x + x - 1 \\ &= x \ln(x)(\ln(x) - 1) - x \ln(x) + x - 1 + x - 1 \\ &= x \ln(x)(\ln(x) - 2) + 2x - 2. \end{aligned}$$

2. D'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction $F : x \mapsto \int_0^x \sin(\sqrt[3]{t}) dt$ est l'unique primitive de $x \mapsto \sin(\sqrt[3]{x})$ sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0. On effectue un changement de variables en posant $u = \sqrt[3]{t} \Leftrightarrow t = u^3$ d'où $dt = 3u^2 du$. On obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = 3 \int_0^{\sqrt[3]{x}} u^2 \sin(u) du.$$

On effectue une intégration par parties en posant $x(u) = u^2$, $y'(u) = \sin(u)$, $x'(u) = 2u$, $y(u) = -\cos(u)$ et on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = 3[-u^2 \cos(u)]_0^{\sqrt[3]{x}} + 6 \int_0^{\sqrt[3]{x}} u \cos(u) du = -3x^{\frac{2}{3}} \cos(\sqrt[3]{x}) + 6 \int_0^{\sqrt[3]{x}} u \cos(u) du.$$

On effectue une nouvelle intégration par parties en posant $x(u) = u$, $y'(u) = \cos(u)$, $x'(u) = 1$, $y(u) = \sin(u)$ et on obtient

$$F(x) = -3x^{\frac{2}{3}} \cos(\sqrt[3]{x}) + 6[u \sin(u)]_0^{\sqrt[3]{x}} - 6 \int_0^{\sqrt[3]{x}} \sin(u) du = -3x^{\frac{2}{3}} \cos(\sqrt[3]{x}) + 6\sqrt[3]{x} \sin(\sqrt[3]{x}) - 6[-\cos(u)]_0^{\sqrt[3]{x}}$$

d'où pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = -3x^{\frac{2}{3}} \cos(\sqrt[3]{x}) + 6\sqrt[3]{x} \sin(\sqrt[3]{x}) + 6 \cos(\sqrt[3]{x}) - 6$.

3. D'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction $F : x \mapsto \int_1^x t \ln(t) dt$ est l'unique primitive de $x \mapsto x \ln(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ qui s'annule en 1.

On effectue une intégration par parties en posant $u(t) = \ln(t)$, $v'(t) = t$, $u'(t) = \frac{1}{t}$, $v(t) = \frac{t^2}{2}$ et on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$F(x) = \left[\frac{t^2 \ln(t)}{2}\right]_1^x - \int_1^x \frac{t}{2} dt = \frac{x^2 \ln(x)}{2} - \left[\frac{t^2}{4}\right]_1^x = \frac{x^2}{4}(2 \ln(x) - 1) + \frac{1}{4}.$$

4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 2x + 5 \neq 0$ car le discriminant de ce trinôme du second degré est strictement négatif. Posons pour tout réel x , $f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 5}$.

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ donc d'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction $F : x \mapsto \int_0^x \frac{dt}{t^2 + 2t + 5}$ est l'unique primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

$$\text{On a pour tout } x \in \mathbb{R}, F(x) = \int_0^x \frac{dt}{(t+1)^2 + 4} = \frac{1}{4} \int_0^x \frac{dt}{(\frac{t+1}{2})^2 + 1}.$$

On effectue un changement de variable en posant $u = \frac{t+1}{2}$ d'où $du = \frac{dt}{2}$ ou encore $dt = 2du$ et on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \frac{1}{4} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{x+1}{2}} \frac{2du}{u^2 + 1} = \frac{1}{2} [\arctan(u)]_{\frac{1}{2}}^{\frac{x+1}{2}} = \frac{\arctan(\frac{x+1}{2}) - \arctan(\frac{1}{2})}{2}.$$

5. (a) La fonction $f : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ est continue sur $[-1, 1]$. D'après le théorème fondamental de l'analyse, l'unique primitive de f sur $[-1, 1]$ qui s'annule en 0 est

$$F : x \mapsto \int_0^x \sqrt{1-t^2} dt.$$

On effectue le changement de variable $u = \arccos(t) \Leftrightarrow t = \cos(u)$ d'où $dt = -\sin(u)du$.

Ainsi, on a pour tout $x \in [-1, 1]$,

$$F(x) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\arccos(x)} -\sqrt{1-\cos^2(u)} \sin(u) du = \int_{\arccos(x)}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^2(u)} \sin(u) du.$$

Or, pour tout $x \in [-1, 1]$, $\arccos(x) \in [0, \pi]$ et pour tout $u \in [0, \pi]$, $\sin(u) \geq 0$ donc $\sqrt{\sin^2(u)} = |\sin(u)| = \sin(u)$ d'où pour tout $x \in [-1, 1]$,

$$F(x) = \int_{\arccos(x)}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(u) du = \frac{1}{2} \int_{\arccos(x)}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos(2u)) du = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arccos(x) - \frac{1}{4} [\sin(2u)]_{\arccos(x)}^{\frac{\pi}{2}}$$

d'où

$$F(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} \sin(2 \arccos(x)) - \frac{1}{2} \arccos(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \sin(\arccos(x)) \cos(\arccos(x)) - \frac{1}{2} \arccos(x)$$

donc finalement pour tout $x \in [-1, 1]$, $F(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2} \arccos(x)$.

- (b) La fonction $g : x \mapsto \sqrt{9-4x^2}$ est définie si $9-4x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq \frac{9}{4} \Leftrightarrow x \in [-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$.

Ainsi, g est définie et continue sur $[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$ et d'après le théorème fondamental de l'analyse, $G : x \mapsto \int_0^x \sqrt{9-4t^2} dt$ est l'unique primitive de g qui s'annule en 0.

On a pour tout $x \in [-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$, $G(x) = 3 \int_0^x \sqrt{1-\frac{4}{9}t^2} dt$. On effectue un changement de variable en posant $u = \frac{2}{3}t$ d'où $du = \frac{2}{3}dt$, puis $dt = \frac{3}{2}du$ et on obtient pour tout $x \in [-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$,

$$G(x) = \frac{9}{2} \int_0^{\frac{2}{3}x} \sqrt{1-u^2} du = \frac{9}{2} F\left(\frac{2}{3}x\right) = \frac{9\pi}{8} + \frac{3}{2} x \sqrt{1-\frac{4}{9}x^2} - \frac{9}{4} \arccos\left(\frac{2}{3}x\right).$$

Exercice 10.

1. Supposons que f est impaire.

Posons pour tout $x \in \mathbb{R}$, $G(x) = F(x) - F(-x)$.

La fonction G est dérivable sur $\mathbb{R}$ (car F l'est) et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$G'(x) = F'(x) + F'(-x) = f(x) + f(-x) = 0$$

car f est impaire.

Ainsi, G est constante sur $\mathbb{R}$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $G(x) = G(0) = F(0) - F(0) = 0$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(-x) = F(x)$, ce qui implique que F est paire.

2. Supposons que f est paire.

Posons pour tout $x \in \mathbb{R}$, $G(x) = F(x) + F(-x)$.

La fonction G est dérivable sur $\mathbb{R}$ (car F l'est) et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$G'(x) = F'(x) - F'(-x) = f(x) - f(-x) = 0$$

car f est paire.

Ainsi, G est constante sur $\mathbb{R}$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $G(x) = G(0) = F(0) + F(0) = 2F(0)$ i.e. pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) + F(-x) = 2F(0)$.

On a donc les équivalences :

$$F \text{ est impaire} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, F(x) + F(-x) = 0 \Leftrightarrow F(0) = 0.$$

3. Supposons que f est T -périodique.

Posons pour tout $x \in \mathbb{R}$, $G(x) = F(x+T) - F(x)$.

La fonction G est dérivable sur $\mathbb{R}$ (car F l'est) et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$G'(x) = F'(x+T) - F'(x) = f(x+T) - f(x) = 0$$

car f est T -périodique.

Ainsi, G est constante sur $\mathbb{R}$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $G(x) = G(0) = F(T) - F(0)$, i.e. pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x+T) - F(x) = F(T) - F(0)$.

On a donc les équivalences :

$$F \text{ est } T\text{-périodique} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, F(x+T) - F(x) = 0 \Leftrightarrow F(T) - F(0) = 0 \Leftrightarrow \int_0^T f(x) dx = 0.$$

Exercice 11.

1. Tout d'abord, notons que les deux intégrales sont bien définies car pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\cos(t) + \sin(t) \neq 0$. En effet, on a

$$\cos(t) + \sin(t) = 0 \Leftrightarrow \cos(t) = -\sin(t) \Leftrightarrow \cos(t) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right) \Leftrightarrow t \equiv \frac{\pi}{2} + t[2\pi] \text{ ou } t \equiv -\frac{\pi}{2} - t[2\pi]$$

d'où $t \equiv -\frac{\pi}{4}[\pi]$, ce qui est impossible pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Posons le changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - t$ d'où $du = -dt$ dans l'intégrale C . On obtient

$$C = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\cos(\frac{\pi}{2} - u)}{\cos(\frac{\pi}{2} - u) + \sin(\frac{\pi}{2} - u)} du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(u)}{\sin(u) + \cos(u)} du = S.$$

2. Par linéarité de l'intégrale, on a $C + S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t) + \sin(t)}{\cos(t) + \sin(t)} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2}$.

Or, $C = S$ donc $\frac{\pi}{2} = C + S = 2C$ d'où $C = S = \frac{\pi}{4}$.

3. (a) Tout d'abord, $t \mapsto \sqrt{1-t^2}$ est bien définie si $1-t^2 \geq 0 \Leftrightarrow t^2 \leq 1 \Leftrightarrow t \in [-1, 1]$.
Par ailleurs, vérifions que pour tout $t \in [-1, 1]$, $t + \sqrt{1-t^2} \neq 0$. On a

$$t + \sqrt{1-t^2} = 0 \Rightarrow \sqrt{1-t^2} = -t \Rightarrow 1-t^2 = t^2 \Rightarrow t^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow t = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Or, pour $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $t + \sqrt{1-t^2} = \sqrt{2} \neq 0$ et pour $t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $t + \sqrt{1-t^2} = 0$ donc la fonction $t \mapsto \sqrt{1-t^2}$ est définie sur $[-1, 1] \setminus \{-\frac{\sqrt{2}}{2}\}$. A fortiori, elle est définie et continue sur $[0, 1]$ donc l'intégrale I est bien définie.

- (b) Posons $u = \arcsin(t) \Leftrightarrow t = \sin(u)$ d'où $dt = \cos(u)du$. On obtient

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(u)}{\sin(u) + \sqrt{1-\sin^2(u)}} du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(u)}{\sin(u) + \sqrt{\cos^2(u)}} du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(u)}{\sin(u) + |\cos(u)|} du.$$

Or, pour tout $u \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\cos(u) \geq 0$ donc $|\cos(u)| = \cos(u)$ donc $I = C = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 12. Tout d'abord, notons que les deux intégrales de cet exercice sont bien définies car pour tout réel x , $3 + 2\cos(2x) = 0 \Leftrightarrow \cos(2x) = -\frac{3}{2} \notin [-1, 1]$, ce qui est impossible.

1. On a $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sin(x)}{3 + 2\cos(2x)} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sin(x)}{1 + 4\cos^2(x)} dx$

On pose $u = \cos(x)$ d'où $du = -\sin(x)dx$ et on obtient

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sin(x)}{3 + 2\cos(2x)} dx = - \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{du}{1 + 4u^2} = \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{du}{1 + (2u)^2}.$$

On pose maintenant $t = 2u$, d'où $dt = 2du$ et on obtient

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sin(x)}{3 + 2\cos(2x)} dx = \frac{1}{2} \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{1}{2} [\arctan(t)]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} = \arctan(\sqrt{2})$$

car $\arctan(-\sqrt{2}) = -\arctan(\sqrt{2})$ par imparité de $\arctan$.

2. On a $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x)}{3 + 2\cos(2x)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x)}{5 - 4\sin^2(x)} dx$.

On pose $u = \sin(x)$ d'où $du = \cos(x)dx$ et on obtient

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x)}{3 + 2\cos(2x)} dx = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{du}{5 - 4u^2}.$$

Or, pour tout $u \in [0, \frac{\sqrt{2}}{2}]$, on a $\frac{1}{5 - 4u^2} = \frac{1}{(\sqrt{5} - 2u)(\sqrt{5} + 2u)} = \frac{1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1}{\sqrt{5} + 2u} + \frac{1}{\sqrt{5} - 2u} \right)$ donc

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x)}{3 + 2\cos(2x)} dx &= \frac{1}{2\sqrt{5}} \left(\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{du}{\sqrt{5} + 2u} + \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{du}{\sqrt{5} - 2u} \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{5}} \left(\left[\frac{1}{2} \ln(\sqrt{5} + 2u) \right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} - \left[\frac{1}{2} \ln(\sqrt{5} - 2u) \right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \right) \\ &= \frac{\ln(\sqrt{5} + \sqrt{2}) - \ln(\sqrt{5} - \sqrt{2})}{4\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

Exercice 13.

1. Notons que l'intégrale est bien définie car pour tout $t \in \mathbb{R}$, $1 + t^2 + t^4 > 0$. La fonction

$$t \mapsto \frac{t^3}{1 + t^2 + t^4} \text{ est impaire donc } \int_{-1}^1 \frac{t^3}{1 + t^2 + t^4} dt = 0.$$

2. Notons que pour tout $\theta \in [0, \frac{\pi}{3}]$, $1 + \sin(\theta) \neq 0$ donc l'intégrale est bien définie.

$$\text{Posons } t = \tan(\frac{\theta}{2}) \text{ d'où } dt = \frac{1}{2}(1 + \tan^2(\frac{\theta}{2}))d\theta = \frac{1}{2}(1 + t^2)d\theta, \text{ i.e. } d\theta = \frac{2dt}{1 + t^2}.$$

On sait qu'alors $\sin(\theta) = \frac{2t}{1 + t^2}$ (cf. TD Trigonométrie) et on obtient

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1 + \sin(\theta)} d\theta = 2 \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{1 + \frac{2t}{1+t^2}} = 2 \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{dt}{1 + t^2 + 2t} = 2 \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{dt}{(1 + t)^2} = 2 \left[-\frac{1}{1 + t} \right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

d'où

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1 + \sin(\theta)} d\theta = 2 \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}} \right) = 2 \times \frac{3 + \sqrt{3} - 3}{3 + \sqrt{3}} = \frac{2}{1 + \sqrt{3}} = \sqrt{3} - 1.$$

3. La fonction $x \mapsto \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ est définie sur $] -\infty, -1] \cup]1, +\infty[$. En particulier, elle est définie et continue sur $[2, 3]$ donc l'intégrale est bien définie.

$$\text{Posons } u = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \Rightarrow u^2 = \frac{x+1}{x-1} \Rightarrow (x-1)u^2 = x+1 \Rightarrow x = \frac{1+u^2}{u^2-1} \text{ donc}$$

$$dx = \frac{2u(u^2-1) - 2u(1+u^2)}{(u^2-1)^2} du = -\frac{4u}{(u^2-1)^2} du$$

et on obtient

$$\int_2^3 \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} dx = - \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{2}} \frac{4u^2}{(u^2-1)^2} du = 4 \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{u^2}{(u^2-1)^2} du.$$

Réalisons une intégration par parties en posant $x(u) = u, y'(u) = \frac{u}{(u^2-1)^2}, x'(u) = 1, y(u) = -\frac{1}{2(u^2-1)}$ et on obtient

$$\begin{aligned} \int_2^3 \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} dx &= 4 \left(\left[-\frac{u}{2(u^2-1)} \right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{du}{u^2-1} \right) \\ &= 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{2} + \frac{1}{2} \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1} \right) du \right) \\ &= 2\sqrt{2} - \sqrt{3} + [\ln(u-1) - \ln(u+1)]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \\ &= 2\sqrt{2} - \sqrt{3} + \ln(\sqrt{3}-1) - \ln(\sqrt{3}+1) - \ln(\sqrt{2}-1) + \ln(\sqrt{2}+1). \end{aligned}$$

Exercice 14. On sait que f est continue sur le segment $[0, 1]$. D'après le théorème des bornes atteintes, la fonction f est bornée sur le segment $[0, 1]$ donc il existe un réel positif M tel que pour tout $x \in [0, 1], |f(x)| \leq M$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq |I_n| = \left| \int_0^1 x^n f(x) dx \right| \leq \int_0^1 x^n |f(x)| dx \leq M \int_0^1 x^n dx = M \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{M}{n+1}.$$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{M}{n+1} = 0$.

D'après le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} |I_n| = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

Exercice 15. • Si $\int_a^b f(x)dx \geq 0$, alors l'hypothèse implique que $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b |f(x)|dx$

d'où par linéarité de l'intégrale $\int_a^b (|f(x)| - f(x))dx = 0$.

Or, pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \leq |f(x)|$ donc $|f(x)| - f(x) \geq 0$. Par ailleurs, la fonction $x \mapsto |f(x)| - f(x)$ est continue sur $[a, b]$ car f et la fonction valeur absolue le sont.

La fonction $x \mapsto |f(x)| - f(x)$ est donc une fonction continue sur $[a, b]$, à valeurs positives et d'intégrale nulle sur $[a, b]$. On en déduit qu'elle est identiquement nulle sur $[a, b]$, i.e. pour tout $x \in [a, b]$, $|f(x)| - f(x) = 0$ d'où pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) = |f(x)|$.

A fortiori, la fonction f est positive sur $[a, b]$.

• Si $\int_a^b f(x)dx \leq 0$, alors l'hypothèse implique que $-\int_a^b f(x)dx = \int_a^b |f(x)|dx$ d'où par

linéarité de l'intégrale $\int_a^b (|f(x)| + f(x))dx = 0$.

Or, pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \geq -|f(x)|$ donc $|f(x)| + f(x) \geq 0$.

Comme dans le premier cas, la fonction $x \mapsto |f(x)| + f(x)$ est une fonction continue, à valeurs positive et d'intégrale nulle sur $[a, b]$. Elle y est donc identiquement nulle, i.e. pour tout $x \in [a, b]$, $|f(x)| + f(x) = 0$, d'où pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) = -|f(x)|$.

A fortiori, la fonction f est négative sur $[a, b]$.

Dans tous les cas, la fonction f garde un signe constant sur $[a, b]$.

Exercice 16.

1. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$$

où $a = 0, b = 1$ et $f : x \mapsto x \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.

On reconnaît une somme de Riemann et puisque f est continue sur $[0, 1]$, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \int_0^1 x \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx = \left[-\frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) x\right]_0^1 + \frac{2}{\pi} \int_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx = \frac{4}{\pi^2} \left[\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]_0^1 = \frac{4}{\pi^2}.$$

2. On sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{n} = 0$ et $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$ donc par composition, on en déduit que $\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \sim \frac{\pi}{n}$ d'où

$$v_n \sim \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \left(2 + \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)^2 = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$$

où $a = 0, b = \pi$ et $f : x \mapsto (2 + \cos(x))^2$. On reconnaît une somme de Riemann et puisque f est continue sur $[0, \pi]$, on en déduit que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n &= \int_0^\pi (2 + \cos(x))^2 dx \\ &= \int_0^\pi (4 + 4 \cos(x) + \cos^2(x)) dx \\ &= \int_0^\pi 4 dx + \int_0^\pi 4 \cos(x) dx + \frac{1}{2} \int_0^\pi (\cos(2x) + 1) dx \\ &= 4\pi + 4[\sin(x)]_0^\pi + \frac{1}{4}[\sin(2x)]_0^\pi + \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{9\pi}{2}. \end{aligned}$$

Exercice 17. Posons

$$I = \int_{1/a}^a \frac{x \ln(x)}{(1+x^2)^2} dx, \quad (a > 0).$$

On effectue le changement de variable

$$y = \frac{1}{x} \iff x = \frac{1}{y}, \quad dx = -\frac{1}{y^2} dy.$$

Quand $x = \frac{1}{a}$, on a $y = a$, et quand $x = a$, on a $y = \frac{1}{a}$.

Ainsi,

$$I = \int_a^{1/a} \frac{\frac{1}{y} \ln\left(\frac{1}{y}\right)}{\left(1 + \frac{1}{y^2}\right)^2} \left(-\frac{1}{y^2}\right) dy.$$

Or

$$\left(1 + \frac{1}{y^2}\right)^2 = \frac{(1+y^2)^2}{y^4}, \quad \ln\left(\frac{1}{y}\right) = -\ln y,$$

donc l'intégrande se simplifie en

$$\frac{\frac{1}{y} \ln(1/y)}{\left(1 + \frac{1}{y^2}\right)^2} \left(-\frac{1}{y^2}\right) = \frac{y \ln y}{(1+y^2)^2}.$$

On obtient donc

$$I = \int_a^{1/a} \frac{y \ln y}{(1+y^2)^2} dy.$$

En renommant la variable muette y en x ,

$$I = \int_a^{1/a} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx = - \int_{1/a}^a \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx = -I.$$

Donc

$$2I = 0 \implies I = 0.$$

$$\int_{1/a}^a \frac{x \ln(x)}{(1+x^2)^2} dx = 0 \quad (a > 0).$$

Exercice 18. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = \int_0^x \sin(x-t) f(t) dt,$$

où $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue.

1. On utilise l'identité trigonométrique

$$\sin(x-t) = \sin x \cos t - \cos x \sin t.$$

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = \int_0^x (\sin x \cos t - \cos x \sin t) f(t) dt = \sin x \int_0^x \cos t f(t) dt - \cos x \int_0^x \sin t f(t) dt.$$

On pose

$$A(x) = \int_0^x \cos t f(t) dt, \quad B(x) = \int_0^x \sin t f(t) dt.$$

Comme f est continue, les fonctions $t \mapsto \cos t f(t)$ et $t \mapsto \sin t f(t)$ sont continues, donc A et B sont dérivables et

$$A'(x) = \cos x f(x), \quad B'(x) = \sin x f(x)$$

(théorème fondamental de l'analyse).

Avec ces notations,

$$\varphi(x) = \sin x A(x) - \cos x B(x).$$

On dérive par la règle du produit :

$$\varphi'(x) = \cos x A(x) + \sin x A'(x) + \sin x B(x) - \cos x B'(x).$$

En remplaçant $A'(x)$ et $B'(x)$,

$$\varphi'(x) = \cos x A(x) + \sin x (\cos x f(x)) + \sin x B(x) - \cos x (\sin x f(x)).$$

Les deux termes en $f(x)$ se simplifient, d'où

$$\varphi'(x) = \cos x A(x) + \sin x B(x).$$

On dérive encore :

$$\varphi''(x) = -\sin x A(x) + \cos x A'(x) + \cos x B(x) + \sin x B'(x).$$

Donc, en remplaçant $A'(x)$ et $B'(x)$,

$$\varphi''(x) = -\sin x A(x) + \cos x B(x) + (\cos^2 x + \sin^2 x) f(x).$$

Comme $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$,

$$\varphi''(x) = -\sin x A(x) + \cos x B(x) + f(x).$$

Or, d'après $\varphi(x) = \sin x A(x) - \cos x B(x)$, on a

$$-\sin x A(x) + \cos x B(x) = -\varphi(x).$$

Ainsi,

$$\varphi''(x) = f(x) - \varphi(x), \quad \text{soit} \quad \boxed{\varphi''(x) + \varphi(x) = f(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.}$$

2. Déterminer toutes les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Soit y une solution de

$$(E) : y'' + y = f(x).$$

Posons

$$u = y - \varphi.$$

Alors

$$u'' + u = (y'' + y) - (\varphi'' + \varphi) = f - f = 0.$$

Donc u est solution de l'équation homogène

$$u'' + u = 0.$$

Les solutions réelles de cette équation sont

$$u(x) = A \cos x + B \sin x, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Par conséquent,

$$\boxed{y(x) = \varphi(x) + A \cos x + B \sin x}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{y(x) = \int_0^x \sin(x-t)f(t) dt + A \cos x + B \sin x \quad (A, B \in \mathbb{R}).}$$

Exercice 19. Dans cet exercice, pour $x \in \mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$, on pose

$$\varphi(x) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^x} dt.$$

Remarque. Pour $x = 0$, la valeur de t^0 en $t = 0$ est sans influence sur l'intégrale (car un point est de mesure nulle) ; sur $]0, 1]$, on a $t^0 = 1$.

1. On a

$$\varphi(0) = \int_0^1 \frac{1}{1+1} dt = \frac{1}{2}.$$

Ensuite

$$\varphi(1) = \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln 2.$$

Enfin

$$\varphi(2) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = [\arctan t]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

$\varphi(0) = \frac{1}{2}, \quad \varphi(1) = \ln 2, \quad \varphi(2) = \frac{\pi}{4}.$

2. Soient $x, y \in \mathbb{R}_+$ avec $x \leq y$. Pour tout $t \in [0, 1]$, on a

$$t^x \geq t^y$$

(car la fonction $u \mapsto t^u$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ lorsque $0 \leq t \leq 1$).

Donc

$$\frac{1}{1+t^x} \leq \frac{1}{1+t^y} \quad (t \in [0, 1]).$$

En intégrant sur $[0, 1]$, on obtient

$$\varphi(x) \leq \varphi(y).$$

Ainsi, φ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

3. Comme φ est croissante $\mathbb{R}_+$ (question précédente), si $x \leq y$ alors

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| = \varphi(y) - \varphi(x).$$

Or

$$\varphi(y) - \varphi(x) = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+t^y} - \frac{1}{1+t^x} \right) dt = \int_0^1 \frac{t^x - t^y}{(1+t^x)(1+t^y)} dt.$$

Comme $(1+t^x)(1+t^y) \geq 1$, on a

$$0 \leq \frac{t^x - t^y}{(1+t^x)(1+t^y)} \leq t^x - t^y,$$

d'où

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \int_0^1 (t^x - t^y) dt.$$

Par ailleurs,

$$\int_0^1 (t^x - t^y) dt = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{y+1} = \frac{y-x}{(x+1)(y+1)} \leq y-x.$$

4. Pour $x, y \in \mathbb{R}_+$, en échangeant éventuellement les rôles de x et y , la question précédente donne

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq |x - y|.$$

Ainsi φ est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$, donc continue sur $\mathbb{R}_+$.

5.

$$1 - \varphi(x) = \int_0^1 \frac{t^x}{1 + t^x} dt.$$

On écrit simplement

$$1 - \frac{1}{1 + t^x} = \frac{t^x}{1 + t^x}.$$

En intégrant sur $[0, 1]$,

$$1 - \varphi(x) = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1 + t^x}\right) dt = \int_0^1 \frac{t^x}{1 + t^x} dt.$$

6. Pour $x \geq 0$ et $t \in [0, 1]$,

$$0 \leq \frac{t^x}{1 + t^x} \leq t^x.$$

Donc

$$0 \leq 1 - \varphi(x) \leq \int_0^1 t^x dt = \frac{1}{x + 1}.$$

Comme $\frac{1}{x+1} \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow +\infty$, le théorème des gendarmes donne

$$1 - \varphi(x) \rightarrow 0,$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 1.}$$

7. Soit d'abord $x > 0$. Pour $\varepsilon \in]0, 1[$, on fait une intégration par parties sur $[\varepsilon, 1]$ avec

$$u(t) = \frac{1}{1 + t^x}, \quad dv = dt.$$

Alors

$$du(t) = -\frac{x t^{x-1}}{(1 + t^x)^2} dt, \quad v(t) = t.$$

D'où

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{1 + t^x} dt = \left[\frac{t}{1 + t^x} \right]_{\varepsilon}^1 + x \int_{\varepsilon}^1 \frac{t^x}{(1 + t^x)^2} dt.$$

En faisant tendre $\varepsilon \rightarrow 0^+$, on a

$$\frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon^x} \rightarrow 0,$$

et, par convergence monotone (l'intégrande est positive),

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{t^x}{(1 + t^x)^2} dt \rightarrow \int_0^1 \frac{t^x}{(1 + t^x)^2} dt.$$

On obtient donc

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} + x \int_0^1 \frac{t^x}{(1 + t^x)^2} dt \quad (x > 0).$$

Pour $x = 0$, le membre de droite vaut $\frac{1}{2}$, qui est bien $\varphi(0)$. La formule est donc vraie pour tout $x \geq 0$.

8. On cherche la dérivée à droite en 0 :

$$\varphi'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}.$$

D'après la question précédente et $\varphi(0) = \frac{1}{2}$,

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} = \int_0^1 \frac{t^x}{(1+t^x)^2} dt.$$

Pour tout $t \in (0, 1]$, quand $x \rightarrow 0^+$,

$$t^x \rightarrow 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{t^x}{(1+t^x)^2} \rightarrow \frac{1}{4}.$$

De plus, pour tout $z \geq 0$,

$$0 \leq \frac{z}{(1+z)^2} \leq \frac{1}{4},$$

donc

$$0 \leq \frac{t^x}{(1+t^x)^2} \leq \frac{1}{4} \quad (t \in [0, 1], x \geq 0).$$

Par convergence dominée,

$$\varphi'_+(0) = \int_0^1 \frac{1}{4} dt = \frac{1}{4}.$$

La pente de la demi-tangente en $x = 0$ est $\frac{1}{4}$.

9. On a montré que :

— φ est continue et croissante sur $[0, +\infty[$,

— $\varphi(0) = \frac{1}{2}$,

— $\varphi(1) = \ln 2$, $\varphi(2) = \frac{\pi}{4}$,

— $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 1$,

— la demi-tangente en 0 a pour pente $\frac{1}{4}$.

La courbe part donc du point $(0, \frac{1}{2})$, monte de façon monotone, et admet l'asymptote horizontale

$$y = 1 \quad \text{quand } x \rightarrow +\infty.$$

10. **Trouver un équivalent de $\varphi(x) - 1$ au voisinage de $+\infty$.**

À partir de la question 5,

$$1 - \varphi(x) = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t^x} dt.$$

Effectuons le changement de variable $u = t^x$ (avec $x > 0$) :

$$t = u^{1/x}, \quad dt = \frac{1}{x} u^{1/x-1} du.$$

Alors

$$1 - \varphi(x) = \frac{1}{x} \int_0^1 \frac{u^{1/x}}{1+u} du.$$

Posons $\alpha = \frac{1}{x}$. Lorsque $x \rightarrow +\infty$, on a $\alpha \rightarrow 0^+$, et

$$1 - \varphi(x) = \alpha \int_0^1 \frac{u^\alpha}{1+u} du.$$

On intègre par parties (sur $[0, 1]$) :

$$\int_0^1 \frac{u^\alpha}{1+u} du = [u^\alpha \ln(1+u)]_0^1 - \alpha \int_0^1 u^{\alpha-1} \ln(1+u) du.$$

Donc

$$\int_0^1 \frac{u^\alpha}{1+u} du = \ln 2 - \alpha \int_0^1 u^{\alpha-1} \ln(1+u) du.$$

Or, pour $u \in [0, 1]$, on a $0 \leq \ln(1+u) \leq u$, donc

$$0 \leq \alpha \int_0^1 u^{\alpha-1} \ln(1+u) du \leq \alpha \int_0^1 u^\alpha du = \frac{\alpha}{\alpha+1} \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0^+} 0.$$

Ainsi

$$\int_0^1 \frac{u^\alpha}{1+u} du = \ln 2 + o(1) \quad (\alpha \rightarrow 0^+),$$

et par suite

$$1 - \varphi(x) = \frac{\ln 2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

On en déduit

$$\boxed{\varphi(x) - 1 \sim -\frac{\ln 2}{x} \quad (x \rightarrow +\infty).}$$

Exercice 20.

1. Comme f est décroissante, pour tout entier $k \geq 1$ et tout $x \in [k, k+1]$,

$$f(k+1) \leq f(x) \leq f(k).$$

En intégrant sur $[k, k+1]$, on obtient

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq f(k).$$

2. En sommant de $k = 1$ à n ,

$$\sum_{k=1}^n f(k+1) \leq \int_1^{n+1} f(x) dx \leq \sum_{k=1}^n f(k).$$

Donc

$$\int_1^{n+1} f(x) dx \leq \sum_{k=1}^n f(k) = S_n.$$

Pour la majoration, on écrit

$$S_n = f(1) + \sum_{k=2}^n f(k).$$

Or, pour $k \geq 2$ et $x \in [k-1, k]$, la décroissance donne $f(x) \geq f(k)$, donc

$$\int_{k-1}^k f(x) dx \geq f(k).$$

En sommant de $k = 2$ à n :

$$\int_1^n f(x) dx \geq \sum_{k=2}^n f(k),$$

d'où

$$S_n \leq f(1) + \int_1^n f(x) dx.$$

Finalement,

$$\boxed{\int_1^{n+1} f(x) dx \leq S_n \leq f(1) + \int_1^n f(x) dx}$$

3. On calcule

$$\int_1^n \frac{1}{\sqrt{x}} dx = [2\sqrt{x}]_1^n = 2(\sqrt{n} - 1),$$

et

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2(\sqrt{n+1} - 1).$$

En reportant dans l'encadrement :

$$2(\sqrt{n+1} - 1) \leq S_n \leq 1 + 2(\sqrt{n} - 1),$$

soit

$$\boxed{2\sqrt{n+1} - 2 \leq S_n \leq 2\sqrt{n} - 1}$$

On divise par $2\sqrt{n}$:

$$\frac{2\sqrt{n+1} - 2}{2\sqrt{n}} \leq \frac{S_n}{2\sqrt{n}} \leq \frac{2\sqrt{n} - 1}{2\sqrt{n}}.$$

Or,

$$\frac{2\sqrt{n+1} - 2}{2\sqrt{n}} = \sqrt{1 + \frac{1}{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 1, \quad \frac{2\sqrt{n} - 1}{2\sqrt{n}} = 1 - \frac{1}{2\sqrt{n}} \rightarrow 1.$$

Par le théorème des gendarmes,

$$\frac{S_n}{2\sqrt{n}} \rightarrow 1,$$

c'est-à-dire

$$\boxed{S_n \sim 2\sqrt{n} \quad (n \rightarrow +\infty)}$$

4. Soit $\alpha \in]0, 1[$ et

$$S_n^{(\alpha)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}.$$

On considère la fonction $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^{-\alpha}$. Elle est positive, continue, et décroissante sur $[1, +\infty[$.

Par comparaison série-intégrale (fonction décroissante), on a :

$$\int_1^{n+1} x^{-\alpha} dx \leq \sum_{k=1}^n k^{-\alpha} \leq 1 + \int_1^n x^{-\alpha} dx.$$

On calcule, puisque $\alpha \neq 1$:

$$\int_1^n x^{-\alpha} dx = \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_1^n = \frac{n^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha},$$

et

$$\int_1^{n+1} x^{-\alpha} dx = \frac{(n+1)^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha}.$$

Ainsi,

$$\frac{(n+1)^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha} \leq S_n^{(\alpha)} \leq 1 + \frac{n^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha} = \frac{n^{1-\alpha} - \alpha}{1-\alpha}.$$

On divise par $\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ (strictement positif) :

$$\frac{(n+1)^{1-\alpha} - 1}{n^{1-\alpha}} \leq \frac{(1-\alpha)S_n^{(\alpha)}}{n^{1-\alpha}} \leq \frac{n^{1-\alpha} - \alpha}{n^{1-\alpha}}.$$

Or,

$$\frac{(n+1)^{1-\alpha} - 1}{n^{1-\alpha}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1-\alpha} - \frac{1}{n^{1-\alpha}} \longrightarrow 1 - 0 = 1,$$

et

$$\frac{n^{1-\alpha} - \alpha}{n^{1-\alpha}} = 1 - \frac{\alpha}{n^{1-\alpha}} \longrightarrow 1.$$

Par le théorème des gendarmes,

$$\frac{(1-\alpha)S_n^{(\alpha)}}{n^{1-\alpha}} \longrightarrow 1,$$

c'est-à-dire

$$S_n^{(\alpha)} \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha},$$

ce qu'il fallait démontrer.