

CORRIGÉ DU DEVOIR MAISON N°11  
A RENDRE POUR LE MERCREDI 1 AVRIL 2026

## Exercice

On considère la fonction  $\varphi$  définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par

$$\varphi(x) = e^x - x e^{1/x}.$$

### Partie I – Étude de la fonction $\varphi$

1. Justifier que  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^3$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi'''(x) = e^x + \frac{3x+1}{x^5} e^{1/x}.$$

Sur  $\mathbb{R}_+^*$ , les fonctions  $x \mapsto e^x$ ,  $x \mapsto x$  et  $x \mapsto 1/x$  sont de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ , donc

$$x \mapsto x e^{1/x}$$

est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Par conséquent,  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^3$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

Calculons ses dérivées successives.

Pour tout  $x > 0$ ,

$$\varphi'(x) = e^x - \left( e^{1/x} + x e^{1/x} \left( -\frac{1}{x^2} \right) \right) = e^x - e^{1/x} + \frac{1}{x} e^{1/x}.$$

Ainsi,

$$\varphi'(x) = e^x + \left( \frac{1}{x} - 1 \right) e^{1/x}.$$

On dérive encore :

$$\varphi''(x) = e^x + \left( -\frac{1}{x^2} \right) e^{1/x} + \left( \frac{1}{x} - 1 \right) e^{1/x} \left( -\frac{1}{x^2} \right).$$

D'où

$$\varphi''(x) = e^x - \frac{1}{x^3} e^{1/x}.$$

Enfin, en dérivant une dernière fois,

$$\varphi'''(x) = e^x + 3x^{-4} e^{1/x} - x^{-3} e^{1/x} \left( -\frac{1}{x^2} \right) = e^x + \frac{3}{x^4} e^{1/x} + \frac{1}{x^5} e^{1/x}.$$

Ainsi

$$\varphi'''(x) = e^x + \frac{3}{x^4} e^{1/x} + \frac{1}{x^5} e^{1/x} = e^x + \frac{3x+1}{x^5} e^{1/x}.$$

On a donc bien, pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,

$$\varphi'''(x) = e^x + \frac{3x+1}{x^5}e^{1/x}.$$

2. Déterminer les variations de  $\varphi''$  et calculer  $\varphi''(1)$ .

Pour tout  $x > 0$ ,

$$\varphi'''(x) = e^x + \frac{3x+1}{x^5}e^{1/x}.$$

Comme  $x > 0$ , on a  $e^x > 0$ ,  $e^{1/x} > 0$  et  $\frac{3x+1}{x^5} > 0$ , donc

$$\forall x > 0, \quad \varphi'''(x) > 0.$$

Ainsi,  $\varphi''$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

De plus,

$$\varphi''(1) = e^1 - \frac{1}{1^3}e^{1/1} = e - e = 0.$$

Donc  $\varphi''$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+^*$  et

$$\varphi''(1) = 0.$$

En particulier,

$$\varphi''(x) < 0 \quad \text{si } 0 < x < 1, \quad \varphi''(x) > 0 \quad \text{si } x > 1.$$

3. En déduire les variations de  $\varphi'$  puis, montrer que :  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $\varphi'(x) \geq e$ .

Comme  $\varphi''(x) < 0$  sur  $]0, 1]$  et  $\varphi''(x) > 0$  sur  $[1, +\infty[$ , la fonction  $\varphi'$  est :

- strictement décroissante sur  $]0, 1]$ ;
- strictement croissante sur  $[1, +\infty[$ .

Elle admet donc un minimum en  $x = 1$ .

Or

$$\varphi'(x) = e^x + \left(\frac{1}{x} - 1\right)e^{1/x},$$

donc

$$\varphi'(1) = e + (1 - 1)e = e.$$

Ainsi, pour tout  $x > 0$ ,

$$\varphi'(x) \geq \varphi'(1) = e.$$

4. En déduire les variations de  $\varphi$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

Pour tout  $x > 0$ , on a montré que

$$\varphi'(x) \geq e > 0.$$

Ainsi,  $\varphi$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

De plus,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x - xe^{1/x}).$$

Or  $e^x \rightarrow 1$  et, en posant  $t = 1/x$ , on a par croissances comparées

$$xe^{1/x} = \frac{e^t}{t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty,$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = -\infty.$$

Par ailleurs, lorsque  $x \rightarrow +\infty$ , on a  $e^{1/x} \rightarrow 1$  et, toujours par croissances comparées

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$  donc, par produit des limites, on obtient

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \left(1 - \frac{x}{e^x} e^{1/x}\right) = +\infty.$$

En conclusion,  $\varphi$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ , de  $-\infty$  vers  $+\infty$ .

5. Montrer que, pour tout  $x \geq 3$ , on a

$$\varphi(x) \geq ex.$$

Méthode 1 : théorème des accroissements finis

Soit  $x \geq 3$ . La fonction  $\varphi$  est continue sur  $[3, x]$ , dérivable sur l'intervalle  $]3, x[$  si  $x \geq 3$ , donc, d'après le théorème des accroissements finis, il existe un réel  $c \in ]3, x[$  tel que

$$\varphi(x) - \varphi(3) = \varphi'(c)(x - 3).$$

Or, d'après la question précédente,

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi'(t) \geq e.$$

En particulier,

$$\varphi'(c) \geq e.$$

Comme  $x - 3 \geq 0$ , on en déduit

$$\varphi(x) - \varphi(3) \geq e(x - 3),$$

puis

$$\varphi(x) \geq ex + (\varphi(3) - 3e).$$

Or

$$\varphi(3) - 3e = e^3 - 3e^{1/3} - 3e > 0.$$

Ainsi,

$$\forall x \geq 3, \quad \varphi(x) \geq ex.$$

Méthode 2 : étude de variations

Posons  $g$  la fonction définie pour tout  $x > 0$  par

$$g(x) = \varphi(x) - ex.$$

Alors

$$g'(x) = \varphi'(x) - e.$$

Or on a montré que  $\varphi'(x) \geq e$  pour tout  $x > 0$ , donc

$$g'(x) \geq 0 \quad \text{sur } [3, +\infty[.$$

La fonction  $g$  est donc croissante sur  $[3, +\infty[$ .

Calculons  $g(3)$  :

$$g(3) = e^3 - 3e^{1/3} - 3e > 0.$$

Par croissance de  $g$ , on en déduit que

$$\forall x \geq 3, \quad g(x) \geq g(3) > 0,$$

c'est-à-dire

$$\forall x \geq 3, \quad \varphi(x) \geq ex.$$

## Partie II – Étude d'une suite récurrente

On introduit la suite  $(u_n)$  définie, pour  $n \in \mathbb{N}$  par

$$u_0 = 3, \quad u_{n+1} = \varphi(u_n).$$

6. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n$  est bien défini et que  $u_n \geq 3e^n$ . En déduire la limite de la suite  $(u_n)$ .

Montrons par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq 3e^n.$$

**Initialisation** : pour  $n = 0$ ,

$$u_0 = 3 = 3e^0.$$

**Hérédité** : soit  $n \in \mathbb{N}$  et supposons que

$$u_n \geq 3e^n.$$

Alors en particulier  $u_n \geq 3 > 0$ , donc

$$u_{n+1} = \varphi(u_n) \geq e u_n \geq e \cdot 3e^n = 3e^{n+1}.$$

La propriété est donc vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

En particulier,  $u_n > 0$  pour tout  $n$ , donc chaque terme appartient bien à  $\mathbb{R}_+^*$  ; ainsi la suite est bien définie à tout rang.

Finalement,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \text{ est bien défini et } u_n \geq 3e^n.}$$

Comme

$$3e^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty.$$

On en déduit, d'après le théorème de comparaison,

$$\boxed{u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty.}$$

7. Montrer que la suite  $(u_n)$  est croissante.

Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

D'après la question précédente,  $u_n \geq 3$  donc en utilisant la question 5)

$$u_{n+1} \geq \varphi(u_n) \geq eu_n > u_n.$$

Ainsi,

$(u_n)$  est strictement croissante.

8. Dans cette question, on pourra utiliser la fonction `exp` du module `math` (permettant de calculer l'exponentielle d'un nombre  $x$ ) à condition de l'importer au préalable.

(a) Écrire une fonction Python `phi(x)` qui retourne le nombre  $\varphi(x)$ .

```
from math import exp

def phi(x):
    return exp(x) - x*exp(1/x)
```

(b) Écrire une fonction Python itérative `u_iter(n)` qui retourne le terme  $u_n$ .

```
def u_iter(n):
    u = 3
    for i in range(n):
        u = phi(u)
    return u
```

(c) Écrire une fonction Python récursive `u_recur(n)` qui retourne le terme  $u_n$ .

```
def u_recur(n):
    if n == 0:
        return 3
    return phi(u_recur(n-1))
```

(d) Écrire une fonction Python `seuil(A)` qui retourne le plus petit rang  $n$  à partir duquel  $u_n \geq A$ .

```
def seuil(A):
    n = 0
    u = 3
    while u < A:
        u = phi(u)
        n += 1
    return n
```

Cette fonction renvoie bien le plus petit entier naturel  $n$  tel que  $u_n \geq A$ .

### Partie III – Étude d'une suite implicite

9. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'équation  $\varphi(x) = n$  admet une unique solution, notée  $v_n$  dans  $\mathbb{R}_+^*$ . Préciser la valeur de  $v_0$ .

Comme  $\varphi$  est continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ , avec

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty,$$

elle réalise une bijection de  $\mathbb{R}_+^*$  sur  $\mathbb{R}$ .

Ainsi, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'équation

$$\varphi(x) = n$$

admet une unique solution dans  $\mathbb{R}_+^*$ , notée  $v_n$ .

Or  $v_0$  est l'unique solution de

$$\varphi(x) = 0.$$

Comme

$$\varphi(1) = e - 1 \cdot e = 0,$$

on obtient

$$\boxed{v_0 = 1.}$$

10. Montrer que  $(v_n)$  est croissante et qu'elle diverge vers  $+\infty$ .

Soient  $n \in \mathbb{N}$ . Alors

$$\varphi(v_{n+1}) = n + 1 \quad \text{et} \quad \varphi(v_n) = n.$$

Comme  $\varphi$  est strictement croissante, elle conserve l'ordre, donc

$$\varphi(v_n) < \varphi(v_{n+1}) \implies v_n < v_{n+1}.$$

Ainsi, la suite  $(v_n)$  est strictement croissante.

De plus,

$$\varphi(v_n) = n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty.$$

Comme  $\varphi(x) \rightarrow +\infty$  lorsque  $x \rightarrow +\infty$  et que  $\varphi$  est strictement croissante, on en déduit nécessairement que

$$\boxed{v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty.}$$

11. Justifier que  $0 < v_1 < 2$  et que  $1 < v_n < n$  pour  $n \geq 2$ .

On a déjà  $v_1 \in \mathbb{R}_+^*$ , donc

$$0 < v_1.$$

De plus,

$$\varphi(1) = 0 < 1.$$

Et

$$\varphi(2) = e^2 - 2e^{1/2} > 1.$$

Comme  $\varphi$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ , l'unique solution de  $\varphi(x) = 1$  appartient à l'intervalle  $]1, 2[$ . En particulier,

$$0 < v_1 < 2.$$

Soit maintenant  $n \geq 2$ . Comme  $\varphi(1) = 0 < n$ , et  $\varphi$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ , on obtient

$$v_n > 1.$$

Montrons que  $v_n < n$ . Comme  $\varphi'(t) \geq e$  pour tout  $t > 0$ , on a pour tout  $t \geq 1$  (en intégrant entre 0 et  $x \geq 1$ ) :

$$\varphi(x) - \varphi(1) \geq e(x - 1).$$

Or  $\varphi(1) = 0$ , donc  $\varphi(x) \geq e(x - 1)$ .

En particulier, pour  $x = n \geq 2$ ,  $\varphi(n) \geq e(n - 1) > n$ . Ainsi,

$$\varphi(1) = 0 < n < \varphi(n).$$

Par stricte croissance de  $\varphi$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ , l'unique solution de  $\varphi(x) = n$  vérifie

$$1 < v_n < n.$$

Finalement,

$$\forall n \geq 2, \quad 1 < v_n < n.$$

12. Écrire une fonction Python `dicho_v(n, eps)` qui retourne une valeur approchée de  $v_n$  à  $\text{eps}$  près.

Voici une fonction Python convenable :

```
def dicho_v(n, eps):
    a, b = 1, n
    while b - a > 2*eps:
        m = (a + b) / 2
        if phi(m) < n:
            a = m
        else:
            b = m
    return (a + b) / 2
```

Remarque : Si vous avez écrit `while b - a > eps`: la réponse est acceptée car l'idée y est. La présence du 2 tient au fait que lorsque la condition `b - a > 2*eps` n'est plus vérifiée, on a `b - a <= 2*eps`, donc la valeur retournée `(a + b) / 2` est bien à  $\epsilon$  près car si  $x \in [a, b]$ , on a alors

$$\left| x - \frac{a+b}{2} \right| \leq \max \left( \left| b - \frac{a+b}{2} \right|, \left| a - \frac{a+b}{2} \right| \right) = \max \left( \frac{b-a}{2}, \frac{b-a}{2} \right) \leq \frac{2\epsilon}{2} = \epsilon.$$

13. (a) Vérifier que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\frac{n}{e^{v_n}} = 1 - \frac{v_n}{e^{v_n}} \exp\left(\frac{1}{v_n}\right).$$

Par définition de  $v_n$ , on a

$$\varphi(v_n) = n,$$

soit

$$e^{v_n} - v_n e^{1/v_n} = n.$$

En divisant par  $e^{v_n} > 0$ , on obtient

$$\frac{n}{e^{v_n}} = 1 - \frac{v_n e^{1/v_n}}{e^{v_n}} = 1 - \frac{v_n}{e^{v_n}} \exp\left(\frac{1}{v_n}\right).$$

Ainsi,

$$\boxed{\frac{n}{e^{v_n}} = 1 - \frac{v_n}{e^{v_n}} \exp\left(\frac{1}{v_n}\right)}.$$

(b) En déduire que  $e^{v_n} \sim n$ .

On sait que  $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ . Donc

$$\exp\left(\frac{1}{v_n}\right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1 \quad \text{et} \quad \frac{v_n}{e^{v_n}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \quad (\text{croissances comparées}).$$

Ainsi,

$$\frac{v_n}{e^{v_n}} \exp\left(\frac{1}{v_n}\right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

En utilisant la relation précédente,  $\frac{n}{e^{v_n}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$ . Autrement dit,

$$\boxed{e^{v_n} \sim n}.$$

(c) En déduire un équivalent simple de  $(v_n)$ .

Comme

$$e^{v_n} \sim n \quad \text{et} \quad n \rightarrow +\infty,$$

En prenant le logarithme, on en déduit que :

$$\ln\left(\frac{e^{v_n}}{n}\right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ln(1) = 0.$$

Ainsi  $\ln\left(\frac{e^{v_n}}{n}\right) = v_n - \ln n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$  soit, en divisant par  $v_n > 0$  pour tout  $n$

$$1 - \frac{\ln n}{v_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

d'où

$$\frac{\ln n}{v_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$$

Ainsi :

$$\boxed{v_n \sim \ln n}.$$