Liste d'exercices n°22 — Polynômes réels

Exercice 1. Soit $m \in \mathbb{R}\backslash\{-3;0\}$. Résoudre, après avoir trouvé une solution évidente, les équations suivantes :

1. $mx^2 + (2m+1)x + 2 = 0$;
2. $(m+3)x^2 - (m^2+5m)x + 2m^2 = 0$.

Exercice 2. Pour les polynômes proposés, calculer PQ, $P \circ Q$ et $Q \circ P$.

1. $P = 2X^2 - 1$ et $Q = X$.
2. $P = X^2 + 3$ et $Q = X^2 + X + 1$.
3. $P = X^3 + X^2 + X + 1$ et $Q = X - 1$.

Exercice 3. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.
Montrer que la fonction $x \longmapsto P(x)$ est paire (resp. impaire) si et seulement si tous les cœfficients d'indices impairs (resp. pairs) de P sont nuls.

Exercice 4. Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ qui vérifient

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(2x) = P(x).$$

Exercice 5. Soit $P\colon x \longmapsto 2x^3 - 6x + 1$.

1. Montrer que le polynôme P admet trois racines réelles distinctes. Notons-les α, β et γ.
2. Calculer $\alpha + \beta + \gamma$ et $\alpha\beta\gamma$.

Exercice 6. Trouver tous les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(n) = n^2.$$

Exercice 7. Trouver tous les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x^2) = (x^2+1)P(x).$$

Exercice 8. Montrer que tout polynôme périodique de $\mathbb{R}[X]$ est constant.

Exercice 9. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. Soient P, Q et R trois polynômes à coefficients réels. On suppose que, pour tout $x \in [a,b]$, on a $P(x)Q(x) = R(x)Q(x)$.
Montrer que $P = R$ ou $Q = 0$.

Exercice 10. (Polynômes d'interpolation de Lagrange)
Soient $x_0, x_1, ..., x_n$, $n+1$ réels distincts et soient $a_0, \dots, a_n, n+1$ réels (non nécessairement distincts).

1. Soit $i \in [\![0;n]\!]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme L_i de degré au plus n vérifiant
$$\begin{cases} L_i(x_i) = 1 \\ \text{pour tout } j \in [\![0;n]\!] \text{ tel que } j \neq i, L_i(x_j) = 0. \end{cases}$$
2. En déduire qu'il existe un unique polynôme L de degré au plus n vérifiant
$$\forall i \in [\![0;n]\!], L(x_i) = a_i.$$

Exercice 11. Factoriser le polynôme suivant :

$$P(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^3 - x^2 + 3x - 2.$$

Exercice 12. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Trouver deux réels a et b tels que le polynôme $x \longmapsto ax^{n+1} + bx^n + 1$ admette 1 comme racine double.

Exercice 13.

1. Posons $P\colon x \longmapsto 4x^3 - 16x^2 - 19x - 5$.
   Trouver les racines du polynôme P sachant qu'il possède une racine multiple.
2. Considérons les polynômes suivants :

$$Q\colon x \longmapsto x^3 - 9x^2 + 26x - 24 \quad \text{et} \quad R\colon x \longmapsto x^3 - 7x^2 + 7x + 15.$$

   Trouver les racines de Q et de R sachant qu'ils possèdent une racine commune.

Exercice 14.
On définit une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes par : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n n'admet pas de racine multiple.
2. Pour tout entier naturel n, déterminer le nombre de racines réelles de P_n.

Exercice 15. On dit qu'un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ est scindé s'il existe des réels $(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p$ deux à deux distincts et des entiers $(m_1, \ldots, m_p) \in (\mathbb{N}^*)^p$ tels que

$$P = a\prod_{k=1}^{p}(X - x_k)^{m_k},$$

où a est le cœfficient dominant de P.
On dit dans ce cas que P est scindé à racines simples si pour tout $k \in [\![1, p]\!], m_k = 1$.
On suppose que $\deg(P) \geqslant 2$.

1. Montrer que si P est scindé à racines simples, alors P' est scindé à racines simples.
2. Montrer que si P est scindé, alors P' est scindé.

Exercice 16. (Formule de Taylor)
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré n. Soit $a \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X - a)^k$ où $P^{(k)}$ désigne la dérivée k-ème de P.
2. En déduire que a est racine d'ordre m de P si et seulement si $\forall k \in [\![0, m-1]\!], P^{(k)}(a) = 0$ et $P^{(m)}(a) \neq 0$.

Exercice 17. Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que P' divise P.

Exercice 18. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \neq b$.
On suppose que le reste dans la division euclidienne de P par $(X - a)$ vaut 1 et que le reste dans la division euclidienne de P par $(X - b)$ vaut -1.
Déterminer le reste dans la division euclidienne de P par $(X - a)(X - b)$.

Exercice 19. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}, P(x) \geqslant 0$.
Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}, \displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} P^{(k)}(x) \geqslant 0$.