

## TABLE DES MATIÈRES

<b>22 Polynômes réels</b>	<b>1</b>
22.1 Définition et règles de calcul	1
22.1.1 Définition	1
22.1.2 Degré d'un polynôme	3
22.1.3 Opérations sur les polynômes	4
22.1.4 Polynôme dérivé	5
22.2 Racines et factorisation	7
22.2.1 Racines réelles d'un polynôme	7
22.2.2 Factorisation	7
22.2.3 Racines multiples	10

## 22.1 Définition et règles de calcul

## 22.1.1 Définition

## Définition 1: Polynôme réel

- Un polynôme réel est une application  $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de la forme

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

où  $n \in \mathbb{N}$  et  $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ .

Les réels  $(a_0, \dots, a_n)$  sont appelés les coefficients du polynôme  $P$ .

On note également le polynôme  $P$  sous la forme  $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$  (ou  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ )

et l'ensemble des polynômes réels se note  $\mathbb{R}[X]$ .

- Un polynôme de la forme  $P(X) = a_n X^n$  est appelé un monôme.
- Un polynôme est dit constant s'il est de la forme  $P(X) = a$ , où  $a \in \mathbb{R}$ . En particulier, si  $a = 0$ , on dit que c'est le polynôme nul et on le note  $0_{\mathbb{R}[X]}$ .

**Exemple 1.** • Les fonctions affines  $P : x \mapsto ax + b$ , où  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  sont des polynômes réels.

• Les fonctions puissances entières  $P : x \mapsto x^n$ , où  $n \in \mathbb{N}$ , étudiées dans le chapitre « Fonctions réelles usuelles » sont des polynômes réels.

### Proposition 1: Unicité de l'écriture du polynôme nul

Soit  $P : x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$ , où  $n \in \mathbb{N}$  et  $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ .

$P$  est le polynôme nul si et seulement si pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $a_k = 0$ .

**Démonstration.** • Si pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $a_k = 0$ , il est clair que  $P$  est le polynôme nul.

• Montrons par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$  la propriété suivante :

« Si pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k = 0$ , alors pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $a_k = 0$ . »

Pour  $n = 0$ , on a pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $P(x) = a_0 = 0$  donc la propriété est vraie au rang  $n = 0$ .  
Soit  $n \in \mathbb{N}$  fixé. On suppose la propriété vraie au rang  $n$ . Montrons qu'elle est vraie au rang  $n + 1$ .

Soient  $(a_0, \dots, a_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+2}$  tels que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $P(x) = \sum_{k=0}^{n+1} a_k x^k = 0$ .

La fonction  $P$  est constante égale à 0 sur  $\mathbb{R}$  donc  $P$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et on a pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$0 = P'(x) = \sum_{k=1}^{n+1} k a_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^n (k+1) a_{k+1} x^k.$$

Par hypothèse de récurrence, on en déduit que pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $(k+1) a_{k+1} = 0$  d'où pour tout  $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ ,  $a_k = 0$ .

Ainsi, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $P(x) = a_0 = 0$ , donc pour tout  $k \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket$ ,  $a_k = 0$ , ce qui prouve la propriété au rang  $n + 1$  et achève la récurrence. ■

### Corollaire 1: Unicité de l'écriture des polynômes

Soient  $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$  et  $Q(X) = \sum_{k=0}^m b_k X^k$  deux polynômes réels où  $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ ,  $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $(b_0, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$  avec  $a_n \neq 0$  et  $b_m \neq 0$ .

Alors  $P = Q$  si et seulement si  $n = m$  et pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $a_k = b_k$ .

**Démonstration.** • Si  $n = m$  et pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $a_k = b_k$ , il est clair que  $P = Q$ .

• Supposons que  $P = Q$ . Montrons que  $n = m$ .

On a  $P(x) \underset{+\infty}{\sim} a_n x^n$  et  $Q(x) \underset{+\infty}{\sim} b_m x^m$ .

Puisque pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $P(x) = Q(x)$ , alors  $P(x) \underset{+\infty}{\sim} Q(x)$  d'où  $a_n x^n \underset{+\infty}{\sim} b_m x^m$  ce qui

implique que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} = 1$ , et ceci n'est possible que si  $n = m$ .

Par ailleurs, puisque  $P = Q$ , alors  $P - Q = 0$ .

On a ainsi pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\sum_{k=0}^n a_k x^k = \sum_{k=0}^n b_k x^k \Leftrightarrow \sum_{k=0}^n (a_k - b_k) x^k = 0$ .

D'après la proposition précédente, ceci implique que pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $a_k - b_k = 0$ , i.e. pour tout  $0 \leq k \leq n$ ,  $a_k = b_k$ . ■

**Remarque 1.** • L'écriture d'un polynôme est donc unique. En particulier, un polynôme est entièrement déterminé par la donnée de ses coefficients.

• Ceci légitime les processus d'identification des coefficients entre deux polynômes.

Par exemple, si pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $P(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 3x^4 - x^2 + 2x + 1$ , on en déduit que

$$\begin{cases} a_4 = 3 \\ a_3 = 0 \\ a_2 = -1 \\ a_1 = 2 \\ a_0 = 1 \end{cases} .$$

### 22.1.2 Degré d'un polynôme

#### Définition 2: Degré d'un polynôme

Soit  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$  où  $n \in \mathbb{N}$  et  $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ .

On suppose que  $P$  n'est pas le polynôme nul, c'est à dire qu'il existe  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , tel que  $a_k \neq 0$ .

Soit  $d = \max\{k \in \llbracket 0, n \rrbracket, a_k \neq 0\}$ , i.e.  $d \in \llbracket 0, n \rrbracket$  et  $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$  avec  $a_d \neq 0$  (et pour tout  $k \in \llbracket d+1, n \rrbracket$ ,  $a_k = 0$ ).

On dit que l'entier naturel  $d$  est le degré du polynôme  $P$  et on note

$$d = \deg(P).$$

Le coefficient  $a_d$  est appelé le coefficient dominant de  $P$ .

**Remarque 2.** • Cette définition est légitime par unicité de l'écriture d'un polynôme.

- Si  $a_n \neq 0$ , alors  $\deg(P) = d = n$  et dans ce cas  $\llbracket d+1, n \rrbracket$  est vide.
- Par convention, le degré du polynôme nul est  $-\infty$ , ce qu'on note  $\deg(0) = -\infty$ .
- Concrètement, le degré d'un polynôme non nul est la plus grande puissance de  $X$  apparaissant dans le polynôme.
  - Les polynômes constants non nuls sont de degré 0.
  - Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'ensemble des polynômes réels de degré inférieur ou égal à  $n$  est noté  $\mathbb{R}_n[X]$ .

**Exemple 2.** • Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\deg(X^n) = n$ .

- $\deg(2X^3 + X - 1) = 3$  et le coefficient dominant de ce polynôme est 2.

## 22.1.3 Opérations sur les polynômes

**Proposition 2: Opérations sur les polynômes**

Soient  $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$  et  $Q(X) = \sum_{k=0}^m b_k X^k$  deux polynômes réels avec  $a_n \neq 0$  et  $b_m \neq 0$ .

1. Pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ ,  $\lambda P$  est un polynôme de degré  $\deg(P)$  et on a

$$\lambda P(X) = \sum_{k=0}^n (\lambda a_k) X^k.$$

2. La somme  $P + Q$  est un polynôme réel et son degré vérifie

$$\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q)).$$

L'inégalité est une égalité si  $\deg(P) \neq \deg(Q)$ .

3. Le produit  $PQ$  est un polynôme réel et on a

$$PQ = \sum_{k=0}^{n+m} \left( \sum_{\substack{i+j=k \\ 0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq m}} a_i b_j \right) X^k.$$

En particulier,  $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$ .

4. La composée  $P \circ Q$  est un polynôme réel et si  $Q$  est non constant, son degré vérifie

$$\deg(P \circ Q) = \deg(P) \deg(Q).$$

**Remarque 3.** • Si  $\lambda = 0$ ,  $\lambda P = 0$ .

- Si  $Q = 0$ , alors  $P + Q = P$  et  $PQ = 0$ .

**Démonstration.**

1. Soit  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ .

On a alors pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda P(x) = \lambda \sum_{k=0}^n a_k x^k = \sum_{k=0}^n (\lambda a_k x^k)$ , avec  $\lambda a_n \neq 0$ , d'où le résultat.

2. • Supposons que  $\deg(P) \neq \deg(Q)$ . Sans perte de généralité, on peut supposer (quitte à échanger  $P$  et  $Q$ ) que  $\deg(Q) < \deg(P)$ , i.e.  $m < n$ .

On pose alors pour tout  $k \in \llbracket m+1, n \rrbracket$ ,  $b_k = 0$ .

On a pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$(P + Q)(x) = P(x) + Q(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + \sum_{k=0}^m b_k x^k = \sum_{k=0}^n (a_k + b_k) x^k,$$

avec  $a_n + b_n = a_n \neq 0$  donc  $\deg(P + Q) = n = \deg(P) = \max(\deg(P), \deg(Q))$ .

- Supposons que  $\deg(P) = \deg(Q)$ , i.e.  $n = m$ . On a comme précédemment pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$(P + Q)(x) = \sum_{k=0}^n (a_k + b_k) x^k.$$

Ainsi,  $\deg(P + Q) = n$  si  $a_n + b_n \neq 0$  et  $\deg(P + Q) < n$  si  $a_n + b_n = 0$  donc dans tous les cas,  $\deg(P + Q) \leq n = \max(\deg(P), \deg(Q))$ .

3. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a

$$PQ(x) = P(x)Q(x) = \left( \sum_{i=0}^n a_i x^i \right) \left( \sum_{j=0}^m b_j x^j \right) = \sum_{k=0}^{n+m} \left( \sum_{\substack{i+j=k \\ 1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} a_i b_j \right) x^k.$$

Pour  $k = n + m$ , on a  $\sum_{\substack{i+j=k \\ 1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} a_i b_j = a_n b_m \neq 0$  donc  $\deg(PQ) = n + m = \deg(P) + \deg(Q)$ .

4. On a pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$P \circ Q(x) = P(Q(x)) = \sum_{k=0}^n a_k Q(x)^k = \sum_{k=0}^n a_k \left( \sum_{i=0}^m b_i x^i \right)^k = \sum_{k=0}^n a_k (b_m^k x^{km} + \dots + b_0^k)$$

donc si  $m \neq 0$ , i.e. si  $Q$  n'est pas constant, on constate que le coefficient dominant de  $P \circ Q$  est  $a_n b_m^n \neq 0$  et est situé devant  $x^{nm}$  d'où le résultat. ■

**Remarque 4.** • Si  $\deg(P) = \deg(Q)$ , on peut avoir  $\deg(P + Q) < \max(\deg(P), \deg(Q))$ .

En effet, si  $P = X + 1$  et  $Q = -X$ , on a  $\deg(P) = \deg(Q) = 1$  donc  $\max(\deg(P), \deg(Q)) = 1$  et  $P + Q = 1$  donc  $\deg(P + Q) = 0 < \max(\deg(P), \deg(Q))$ .

• Si  $Q$  est constant, on peut avoir  $\deg(P \circ Q) \neq \deg(P) \deg(Q)$ . Par exemple, si  $P(X) = X - 1$  et  $Q(X) = 1$ , alors  $P \circ Q(X) = 0$  donc  $\deg(P \circ Q) = -\infty$ , tandis que  $\deg(P) \deg(Q) = 1 \times 0 = 0$ .

**Exemple 3.** • Soit  $P = 2X^3 - X$  et  $Q = 3X^2 + X + 2$ .

Alors

$$PQ = 6X^5 + 2X^4 + X^3 - X^2 - 2X$$

et

$$Q \circ P = 3(2X^3 - X)^2 + 2X^3 - X + 2 = 12X^6 - 12X^4 + 2X^3 + 3X^2 - X + 2.$$

## 22.1.4 Polynôme dérivé

### Définition 3: Polynôme dérivé

Soit  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ , avec  $a_n \neq 0$ .

On appelle polynôme dérivé de  $P$  le polynôme

$$P' = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} X^k.$$

**Remarque 5.** • La fonction  $P' : x \mapsto P'(x)$  est la dérivée sur  $\mathbb{R}$  de la fonction  $P : x \mapsto P(x)$ .

En effet, si pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$  avec  $a_n \neq 0$ , alors pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$P'(x) = \sum_{k=1}^n k a_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} x^k.$$

- Si  $n = 0$ , i.e. si  $P$  est constant, alors  $P' = 0$  (en effet, la somme va de 0 à  $-1$  et est donc vide).
- Le polynôme dérivé du polynôme nul est le polynôme nul.

**Exemple 4.** Si  $P(X) = -2X^5 + X^3 + 3X^2 - 1$ , alors  $P'(X) = -10X^4 + 3X^2 + 6X$ .

### Proposition 3: Degré du polynôme dérivé

Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  de degré  $n \in \mathbb{N}^*$ .  
Alors  $\deg(P') = n - 1$ .

**Démonstration.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$  avec  $a_n \neq 0$  de telle sorte que  $\deg(P) = n$ .

$$\text{Alors } P'(X) = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)a_{k+1}X^k.$$

Le coefficient dominant de  $P'$  est  $na_n \neq 0$  et il est situé devant  $X^{n-1}$  donc

$$\deg(P') = n - 1 \in \mathbb{N}.$$

■

**Remarque 6.** Si  $\deg(P) = 0$ , alors  $\deg(P') = -\infty$ .

### Proposition 4: Dérivée $p$ -ème

Soit  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ , avec  $a_n \neq 0$ , i.e.  $\deg(P) = n$ .

Soit  $p \in \mathbb{N}$ . On note  $P^{(p)}$  la dérivée  $p$ -ème de  $P$ .

Alors

$$P^{(p)} = \begin{cases} \sum_{k=0}^{n-p} \frac{(k+p)!}{k!} a_{k+p} X^k & \text{si } p \leq n \\ 0 & \text{si } p > n \end{cases}$$

En particulier, si  $p \leq n$ ,  $\deg(P^{(p)}) = n - p$ .

**Démonstration.** Soit  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .

On a vu dans le chapitre « Dérivation » que la dérivée  $p$ -ème de  $x \mapsto x^k$  était  $x \mapsto \frac{k!}{(k-p)!} x^{k-p}$  si  $p \in \llbracket 0, k \rrbracket$  et 0 sinon.

Par linéarité de la dérivation, on trouve que si  $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,

$$P^{(p)} = \sum_{k=p}^n a_k \frac{k!}{(k-p)!} X^{k-p} = \sum_{k=0}^{n-p} \frac{(k+p)!}{k!} a_{k+p} X^k$$

et si  $p > n$ ,  $P^{(p)} = 0$ .

■

## 22.2 Racines et factorisation

### 22.2.1 Racines réelles d'un polynôme

#### Définition 4: Racines réelles d'un polynôme

Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$ . Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

On dit que  $\alpha$  est une racine (ou un zéro) de  $P$  si

$$P(\alpha) = 0.$$

**Exemple 5.** • Le polynôme  $P = X + 1$  admet comme unique racine réelle  $\alpha = -1$ .

- Le polynôme  $P = X^2 - 2X + 1 = (X - 1)^2$  admet comme unique racine  $\alpha = 1$ .
- Le polynôme  $P = X^2 - 5X + 6 = (X - 2)(X - 3)$  admet comme racines  $\alpha_1 = 2$  et  $\alpha_2 = 3$ .
- Le polynôme  $P = X^3 - 1$  admet comme unique racine réelle  $\alpha = 1$ .

#### Proposition 5

Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  de degré impair.

Alors  $P$  admet au moins une racine réelle.

**Démonstration.** Soit  $n = \deg(P) \in \mathbb{N}^*$ . Alors il existe  $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$  avec  $a_n \neq 0$  tels que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ .

On a  $P(x) \underset{\pm\infty}{\sim} a_n x^n$ .

Puisque  $n$  est impair, on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$ .

• Si  $a_n > 0$ , on a alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} a_n x^n = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} a_n x^n = -\infty$ , d'où  $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = -\infty$ .

• Si  $a_n < 0$ , on a alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} a_n x^n = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} a_n x^n = +\infty$ , d'où  $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = +\infty$ .

Dans les deux cas, la fonction  $P$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et prend des valeurs positives et négatives.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe nécessairement un réel  $\alpha$  tel que  $P(\alpha) = 0$ . ■

**Remarque 7.** Ce n'est plus nécessairement le cas pour les polynômes de degré pair puisque le polynôme  $P = X^2 + 1$  n'admet pas de racine réelle. En effet, pour tout réel  $x$ ,  $P(x) > 0$ .

### 22.2.2 Factorisation

#### Lemme 1: Division euclidienne

Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$ , soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Il existe un unique polynôme  $Q \in \mathbb{R}[X]$  tel que

$$P = (X - \alpha)Q + P(\alpha).$$

**Démonstration.** Montrons d'abord l'existence de  $Q$ .

- Si  $P$  est un polynôme constant, alors pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $P(x) = P(\alpha)$  donc  $Q = 0$  convient.
- Supposons que  $\deg(P) = n \geq 1$ . Montrons par récurrence sur  $n \geq 1$  le résultat suivant :

« Si  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ , alors il existe  $Q \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $P = (X - \alpha)Q + P(\alpha)$ . »

- Si  $n = 1$ , il existe  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tels que  $P = aX + b$ .

On pose  $Q = a$  et on obtient

$$a(X - \alpha) + P(\alpha) = aX - a\alpha + a\alpha + b = aX + b = P,$$

ce qui prouve la propriété au rang  $n = 1$ .

- Soit  $n \geq 1$  fixé tel que la propriété soit vraie au rang  $n$ . Montrons qu'elle est vraie au rang  $n + 1$ .

Soit  $P = \sum_{k=0}^{n+1} a_k X^k \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$  avec  $a_{n+1} \neq 0$  (sinon  $P \in \mathbb{R}_n[X]$  et la propriété est vérifiée pour  $P$  par hypothèse de récurrence). On a  $\deg(P) = n + 1$ .

Posons  $R = P - a_{n+1}X^n(X - \alpha)$ .

Alors

$$R = \sum_{k=0}^{n+1} a_k X^k - a_{n+1}X^{n+1} + \alpha a_{n+1}X^n = (a_n + \alpha a_{n+1})X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in \mathbb{R}_n[X].$$

Par hypothèse de récurrence, il existe  $S \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $R = (X - \alpha)S + R(\alpha)$ .

Or,  $R(\alpha) = P(\alpha) - a_{n+1}\alpha^n(\alpha - \alpha) = P(\alpha)$  donc on obtient

$$P = R + a_{n+1}X^n(X - \alpha) = (X - \alpha)S + R(\alpha) + a_{n+1}X^n(X - \alpha) = (X - \alpha)(a_{n+1}X^n + S) + P(\alpha).$$

En posant  $Q = a_{n+1}X^n + S$ , on trouve que  $P = (X - \alpha)Q + P(\alpha)$ , ce qui prouve la formule au rang  $n + 1$  et achève la récurrence.

Ainsi, pour tout  $P \in \mathbb{R}[X]$ , il existe  $Q \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $P = (X - \alpha)Q + P(\alpha)$ .

• Montrons maintenant l'unicité de  $Q$ .

Supposons qu'il existe  $(Q_1, Q_2) \in (\mathbb{R}[X])^2$  tels que

$$P = (X - \alpha)Q_1 + P(\alpha) = (X - \alpha)Q_2 + P(\alpha).$$

On a alors  $(X - \alpha)(Q_1 - Q_2) = 0$ .

Si  $Q_1 - Q_2$  n'est pas le polynôme nul, alors  $\deg(Q_1 - Q_2) \geq 0$  et il vient

$$-\infty = \deg(0) = \deg((X - \alpha)(Q_1 - Q_2)) = \deg(X - \alpha) + \deg(Q_1 - Q_2) \geq \deg(X - \alpha) = 1,$$

ce qui est absurde.

Nécessairement  $Q_1 - Q_2 = 0$ , i.e.  $Q_1 = Q_2$ , d'où l'unicité du polynôme  $Q$ . ■

### Corollaire 2: Factorisation d'un polynôme admettant une racine

Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$ , soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Le nombre réel  $\alpha$  est racine de  $P$  si et seulement si il existe un polynôme  $Q \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $P = (X - \alpha)Q$ .

En outre, le polynôme  $Q$  est unique s'il existe.

**Démonstration.** • S'il existe un polynôme  $Q \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $P = (X - \alpha)Q$ , alors

$$P(\alpha) = (\alpha - \alpha)Q(\alpha) = 0,$$

ce qui implique que  $\alpha$  est racine de  $P$ .

• Réciproquement, supposons que  $\alpha$  est racine de  $P$ , i.e.  $P(\alpha) = 0$ .

D'après le lemme précédent, il existe un unique polynôme  $Q \in \mathbb{R}[X]$  tel que

$$P = (X - \alpha)Q + P(\alpha) = (X - \alpha)Q.$$

■

**Exemple 6.** •  $X^3 - 1 = (X - 1)(X^2 + X + 1)$ .

•  $X^3 - X^2 - X + 1 = (X^2 - 2X + 1)(X + 1)$ .

•  $X^3 - 6X^2 + 11X - 6 = (X - 1)(X^2 - 5X + 6)$ .

### Corollaire 3: Factorisation d'un polynôme admettant plusieurs racines

Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  admettant des racines distinctes  $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ .

Alors il existe  $Q \in \mathbb{R}[X]$  tel que

$$P = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \dots (X - \alpha_p)Q.$$

**Démonstration.** D'après la proposition précédente, il existe  $Q_1 \in \mathbb{R}[X]$  tel que

$$P = (X - \alpha_1)Q_1.$$

Puisque  $\alpha_2$  est une racine de  $P$ , on a  $0 = P(\alpha_2) = (\alpha_2 - \alpha_1)Q_1(\alpha_2)$ .

Or,  $\alpha_2 \neq \alpha_1$  donc  $Q_1(\alpha_2) = 0$ .

On en déduit qu'il existe  $Q_2 \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $Q_1 = (X - \alpha_2)Q_2$  d'où  $P = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2)Q_2$ .

On en déduit que  $\alpha_3$  est une racine de  $Q_2$  et ainsi de suite.

A la fin, on obtient bien un polynôme  $Q \in \mathbb{R}[X]$  tel que

$$P = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \dots (X - \alpha_p)Q.$$

■

**Exemple 7.** •  $X^3 - X^2 - X + 1 = (X^2 - 2X + 1)(X + 1) = (X - 1)^2(X + 1)$ .

•  $X^3 - 6X^2 + 11X - 6 = (X - 1)(X^2 - 5X + 6) = (X - 1)(X - 2)(X - 3)$ .

### Corollaire 4: Nombre de racines d'un polynôme non nul

Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  de degré  $n \in \mathbb{N}$ .

Le nombre de racines de  $P$  est inférieur ou égal à  $n$ .

**Démonstration.** Soient  $\alpha_1, \dots, \alpha_p$  des racines distinctes de  $P$ .

D'après le corollaire précédent, il existe un polynôme  $Q \in \mathbb{R}[X]$  tel que

$$P = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \dots (X - \alpha_p)Q.$$

Notons que  $Q$  ne peut pas être le polynôme nul, puisque  $P$  ne l'est pas, donc  $\deg(Q) \geq 0$ . En comparant les degrés, on a

$$n = \deg(P) = p + \deg(Q) \geq p,$$

d'où le résultat. ■

**Remarque 8.** • Le polynôme nul admet une infinité de racines. En fait, si on sait qu'un polynôme  $P$  est de degré inférieur ou égal à  $n$  et qu'il admet un nombre de racines strictement supérieur à  $n$ , alors  $P$  est le polynôme nul.

• Un polynôme constant non nul n'admet pas de racines.

**Exemple 8.** • Le polynôme  $P = X^3 - 1 = (X - 1)(X^2 + X + 1)$  est de degré 3 et admet pour unique racine réelle  $\alpha = 1$  car le polynôme  $Q = X^2 + X + 1$  n'admet pas de racine réelle.

• Le polynôme  $P = X^3 - 6X^2 + 11X - 6$  est de degré 3 et admet 3 racines réelles distinctes : 1, 2 et 3.

Ainsi, un polynôme de degré  $n$  admet au maximum  $n$  racines réelles distinctes. S'il admet exactement  $n$  racines, on connaît sa factorisation :

**Corollaire 5: Factorisation d'un polynôme admettant autant de racines que son degré**

Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  un polynôme de degré  $n \in \mathbb{N}^*$ . On suppose que  $P$  admet  $n$  racines réelles distinctes  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ .

Alors

$$P = a_n(X - \alpha_1) \dots (X - \alpha_n)$$

où  $a_n$  est le coefficient dominant de  $P$ .

**Démonstration.** D'après le Corollaire 3, il existe un polynôme  $Q \in \mathbb{R}[X]$  tel que

$$P = (X - \alpha_1) \dots (X - \alpha_n)Q.$$

En comparant les degrés, on a  $n = \deg(P) = n + \deg(Q)$  donc  $\deg(Q) = 0$ , i.e.  $Q$  est un polynôme constant.

Notons  $Q = a_n \in \mathbb{R}^*$ .

Alors  $P = a_n(X - \alpha_1) \dots (X - \alpha_n)$  et en développant, on remarque que  $a_n$  est le coefficient devant  $X^n$ , donc  $a_n$  est bien le coefficient dominant de  $P$ . ■

**Remarque 9.** On a déjà vu que pour un trinôme du second degré  $P(x) = ax^2 + bx + c$  de discriminant  $\Delta > 0$  admettant deux racines réelles distinctes  $x_1$  et  $x_2$ , on a pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2).$$

**Exemple 9.** Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $2x^2 - 10x + 12 = 2(x - 2)(x - 3)$ .

### 22.2.3 Racines multiples

**Définition 5: Ordre de multiplicité d'une racine**

Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$ , soit  $\alpha \in \mathbb{R}$  une racine de  $P$ .

On appelle ordre de multiplicité de la racine  $\alpha$  le plus grand entier  $m \in \mathbb{N}^*$  tel que  $(X - \alpha)^m$  divise  $P$ , i.e. le plus grand entier  $m \in \mathbb{N}^*$  pour lequel il existe un polynôme  $Q \in \mathbb{R}[X]$  tel que

$$P = (X - \alpha)^m Q.$$

- Si  $m = 1$ , on dit que  $\alpha$  est une racine simple de  $P$ .
- Si  $m = 2$ , on dit que  $\alpha$  est une racine double de  $P$ .
- Si  $m \geq 2$ , on dit que  $\alpha$  est une racine multiple de  $P$ .

**Remarque 10.** • Si  $\alpha$  est une racine d'ordre de multiplicité  $m$  de  $P$ , alors il existe  $Q \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $P = (X - \alpha)^m Q$  et dans ce cas, on a nécessairement  $Q(\alpha) \neq 0$ .

Sinon, on aurait  $Q = (X - \alpha)R$ , d'où  $P = (X - \alpha)^{m+1}R$ , ce qui contredit le fait que  $\alpha$  est une racine d'ordre  $m$  de  $P$ .

- Si  $P$  est de degré  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'ordre de multiplicité  $m$  de toute racine  $\alpha$  de  $P$  vérifie  $m \leq n$ . En effet, si  $P = (X - \alpha)^m Q$ , alors  $\deg(P) = m + \deg(Q) \geq m$ .

**Exemple 10.** Soit  $P = X^3 - X^2 - X + 1 = (X - 1)^2(X + 1)$ . Alors  $P$  admet une racine double qui est 1 et une racine simple qui est  $-1$ .

**Proposition 6: Caractérisation des racines multiples**

Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$ . Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$  une racine de  $P$ .  
Alors  $\alpha$  est une racine multiple de  $P$  si et seulement si  $P'(\alpha) = 0$ .

**Démonstration.** Soit  $m \geq 1$  l'ordre de multiplicité de  $\alpha$  en tant que racine de  $P$ . Par définition, il existe  $Q \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $P = (X - \alpha)^m Q$  avec  $Q(\alpha) \neq 0$ .

On a alors

$$P' = m(X - \alpha)^{m-1}Q + (X - \alpha)^m Q' = (X - \alpha)^{m-1}(mQ + (X - \alpha)Q').$$

Posons  $R = mQ + (X - \alpha)Q'$ .

On a  $R(\alpha) = mQ(\alpha) + (\alpha - \alpha)Q'(\alpha) = mQ(\alpha) \neq 0$  d'où

$$P'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow (\alpha - \alpha)^{m-1} = 0 \Leftrightarrow m > 1,$$

d'où l'équivalence voulue :  $\alpha$  est une racine multiple de  $P$  (i.e.  $m > 1$ ) si et seulement si  $P'(\alpha) = 0$ . ■

**Remarque 11.** En fait, on a montré que si  $\alpha$  est racine d'ordre  $m$  de  $P$ , alors  $\alpha$  est racine d'ordre  $m - 1$  de  $P'$ .

Par récurrence, on en déduit que si  $\alpha$  est racine d'ordre  $m$  de  $P$ , alors

$$\forall k \in \llbracket 0, m - 1 \rrbracket, P^{(k)}(\alpha) = 0 \quad \text{et} \quad P^{(m)}(\alpha) \neq 0.$$

**Exemple 11.** Soit  $P = X^3 - X^2 - X + 1 = (X - 1)^2(X + 1)$ .

On a  $P' = 3X^2 - 2X - 1 = 3(X - 1)(X + \frac{1}{3})$ .

On remarque que puisque 1 est racine double de  $P$ , alors 1 est racine simple de  $P'$ . De même, puisque  $-1$  est racine simple de  $P$ , alors  $-1$  n'est pas racine de  $P'$ .

En revanche,  $-\frac{1}{3}$  est racine de  $P'$  mais  $-\frac{1}{3}$  n'est pas racine de  $P$ .