Liste d'exercices n°23 Espaces vectoriels

Exercice 1. Les ensembles suivants sont-ils des $\mathbb{R}$-sous-espaces vectoriels ? des $\mathbb{C}$-sous-espaces vectoriels ?

1. $F = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$
2. $F = \{(2x+3y, x, y-x) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$
3. $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x| \geqslant 2y\}$
4. $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid xyz = 0\}$
5. $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+z = 0\}$
6. $F = \{x+iy \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } x = y\}$
7. $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y^2 = 0\}$
8. $F = \{(2z+3y, x) \mid (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\}$
9. $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y = 12\}$
10. $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y = z\}$
11. $F = \{z \in \mathbb{C} \mid iz + \bar{z} = 0\}$

Exercice 2. Soit $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 \mid x+iy-z = 0\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^3$.
2. Soient les vecteurs $e = (1, -i, 2)$ et $f = (1, -2i, 3)$.
   (a) Montrer que les vecteurs e et f appartiennent à F.
   (b) Soient les vecteurs $u = (1,0,1)$, $v = (0,1,1)$ et $w = (-1,1,0)$. Le vecteur u est-il combinaison linéaire
      i. des vecteurs e et f ?
      ii. des vecteurs v et w ?
   (c) Soit $a \in F$. Le vecteur a est-il combinaison linéaire des vecteurs e et f ?

Exercice 3. Soit $F = \{(-a, a, b, -b, -6a) \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$.
2. Donner un système d'équations cartésiennes de F.

Exercice 4. Soit E un espace vectoriel. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Exercice 5. Pour chacune des familles suivantes, préciser si la famille est libre, génératrice de $\mathbb{R}^3$ et si c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

1. $((9,-3,7);(27,-9,21))$
2. $((9,-3,7);(27,-9,21);(5,-5,1))$
3. $((1,2,2);(5,6,6);(0,0,0))$
4. $((0,4,2);(2,-2,-3))$
5. $((1,-1,0);(0,1,-1);(1,1,0))$
6. $((1,0,-2);(2,3,1);(7,9,5);(1,0,1))$

Exercice 6. Soient

$$F = \{(4s, -5s, -s, -2s) \mid s \in \mathbb{R}\} \text{ et } G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y-5z+2t = 0\}.$$

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$.
2. Montrer que F est inclus dans G.
3. Construire une base de G en ajoutant des vecteurs à une base de F.

Exercice 7. Dans les trois cas suivants, montrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel.
Déterminer alors une base de E, de F puis de $E \cap F$.

1. $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + y - z = 0\}$ et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + z = y\}$
2. $E = \{(x, y, 2y) \,|\, (x, y) \in \mathbb{C}^2\}$ et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \,|\, x = 0 \text{ et } y = 2iz\}$
3. $E = \{(x, y, z, t, u, v) \in \mathbb{R}^6 \,|\, x + y + z = t - y + 3u = 2u + v - x = 2v + t\}$
   et $F = \{(a + c, a + b - c, a + c, b + a, c - a + 2b, b) \,|\, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$

Exercice 8. On pose $\mathcal{B} = ((1, -1, -2); (1, -1, -3); (0, 1, -2))$ et $\mathcal{B}' = ((1, 1, 1); (1, 2, 4); (1, 3, 9))$.

1. Montrer que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont des bases de $\mathbb{R}^3$.
2. (a) Quelles sont les coordonnées du vecteur $(1, 2, 3)$ dans la base $\mathcal{B}$?
   (b) Soit $u = (x, y, z)$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$. Déterminer les coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$.
3. Soit $u \in \mathbb{R}^3$ un vecteur tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Ecrire la matrice du vecteur u dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 9. Donner une base du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs suivants :

1. $a = (1, 1, 0, 1), b = (1, -1, 1, 0), c = (2, 0, 1, 1)$ et $d = (0, -2, 1, -1)$.
2. $u = (3, -6, 3, -9)$ et $v = (-2, 4, -2, 6)$.

Exercice 10. Soient E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ et $(e_1, e_2, \cdots, e_p)$ une famille libre de E. Les familles suivantes sont-elles libres ?

1. $(e_1 - e_2, e_2 - e_3, \ldots, e_{p-1} - e_p, e_p - e_1)$.
2. $(e_1, e_1 + e_2, \ldots, e_1 + \cdots + e_p)$.

Exercice 11. Soient E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ et (e_1, e_2, e_3) une base de E. On définit les vecteurs suivants :

$$f_1 = e_1 + e_2, f_2 = e_3, f_3 = e_1 - e_2, f_4 = e_3 - e_1 \text{ et } f_5 = e_3 + 2e_2.$$

Les familles suivantes sont-elles libres ?

1. (f_1, f_2, f_3)
2. (f_1, f_4, f_5)
3. (f_1, f_2, f_3, f_4)

Exercice 12. Soient a et b deux réels.
Trouver la dimension de l'espace vectoriel engendré par les vecteurs suivants :

$$(a, 1, 1), (1, a, 1) \text{ et } (1, 1, a).$$

Exercice 13. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs

$$e_1 = (1, -2, 5, -3), e_2 = (2, 3, 1, -4) \text{ et } e_3 = (3, 8, -3, -5).$$

1. Trouver une base et la dimension de F.
2. Compléter cette base de F en une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 14. Posons $F = \text{Vect}\{(1,3,-1),(1,-3,2)\}$ et $G = \text{Vect}\{(1,9,-4),(0,2,-1)\}$. A-t-on $F \subset G$? $G \subset F$? $F = G$?

Exercice 15. Quel est le rang des familles de vecteurs suivantes ?

1. $((1,-2,3,1);(4,5,6,7);(1,0,2,3))$.
2. $((1,3,1,-2,-3);(1,4,3,-1,-4);(2,3,-4,-7,-3);(3,8,1,-7,-8))$.

Exercice 16.

1. Evaluer la dimension de $\mathbb{C}^4$ vu comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
2. Déterminer le rang de la famille suivante (dans $\mathbb{C}^4$ vu comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel) :
$$((1,i,1+i,-i);(-i,0,2-i,1+i);(0,-1,0,1);(3i,-2-i,3i,-5-i)).$$
3. Recommencer les deux questions précédentes en considérant $\mathbb{C}^4$ comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exercice 17. Soient $x_0, x_1, ..., x_n$, $n+1$ réels distincts.
Pour tout $i \in [\![0;n]\!]$, on note L_i l'unique polynôme de degré au plus n vérifiant
$$\begin{cases} L_i(x_i) = 1 \\ \text{pour tout } j \in [\![0;n]\!] \text{ tel que } j \neq i, L_i(x_j) = 0. \end{cases}$$
Montrer que la famille $(L_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 18. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
On appelle **somme** de F et G l'ensemble suivant :
$$F + G = \{x + y \,|\, (x,y) \in F \times G\}.$$

1. Montrer que $F+G$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. Montrer que $\dim(F+G) \leqslant \dim(F) + \dim(G)$.
3. On suppose maintenant que $F \cap G = \{0_E\}$ (on dit alors que les sous-espaces vectoriels F et G sont en **somme directe**).
Montrer que $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G)$.

Exercice 19. On considère l'espace vectoriel $M_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels. On définit :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \; ; \; (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

1. Rappeler la dimension de l'espace vectoriel $M_2(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$ et que (A,B,C) est une base de $\mathcal{E}$. Quelle est la dimension de $\mathcal{E}$?
3. Établir que $\mathcal{E}$ est stable par multiplication, c'est–à–dire :
$$\forall (M,N) \in \mathcal{E}^2, \quad MN \in \mathcal{E}.$$
4. Montrer que, pour toute matrice M de $\mathcal{E}$, si M est inversible, alors $M^{-1} \in \mathcal{E}$.

Exercice 20. Déterminer si les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $M_2(\mathbb{R})$:

1. $E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \ : \ ad - bc = 1 \right\}$.
2. $E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \ : \ x_1 + x_2 = x_4 \right\}$.
3. $E_3 = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \ : \ A^T = A\}$.

Exercice 21. Soit $E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ muni des opérations usuelles (addition et produit par un scalaire). Dire si, dans chacun des cas, la partie $V \subset E$ est un sous-espace vectoriel :

1. V est l'ensemble des fonctions bornées.
2. V est l'ensemble des fonctions majorées.
3. V est l'ensemble des fonctions paires.
4. V est l'ensemble des fonctions paires ou impaires.

Exercice 22. On considère l'espace vectoriel $M_3(\mathbb{R})$ des matrices 3×3 réelles et l'ensemble

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \ ; \ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$.
2. Donner une base de E et en déduire $\dim(E)$.
3. Soit $M \in E$. Exprimer M comme combinaison linéaire des vecteurs de la base trouvée.
4. Déterminer la condition sur (a, b, c) pour que M soit inversible.

Exercice 23. On note $\mathcal{S}$ l'espace vectoriel des suites réelles $(u_n)_{n \geq 0}$, muni des opérations usuelles. Pour chacun des ensembles suivants, dire s'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}$.

1. $A = \{(u_n) \in \mathcal{S} \, ; \ \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, \ \forall n \geq 0, \ u_n = an + b\}$.
2. $B = \{(u_n) \in \mathcal{S} \, ; \ u_0 = 0\}$.
3. $C = \{(u_n) \in \mathcal{S} \, ; \ \forall n \geq 0, \ u_{n+1} = 2u_n\}$.
4. $D = \{(u_n) \in \mathcal{S} \, ; \ \exists M \geq 0, \ \forall n \geq 0, \ |u_n| \leq M\}$.
5. $E = \{(u_n) \in \mathcal{S} \, ; \ \forall n \geq 0, \ u_n \geq 0\}$.
6. $F = \{(u_n) \in \mathcal{S} \, ; \ u_0 = 1\}$.
7. $G = \{(u_n) \in \mathcal{S} \, ; \ \forall n \geq 0, \ u_n \neq 0\}$.
8. $H = \{(u_n) \in \mathcal{S} \, ; \ \forall n \geq 0, \ u_n \leq 1\}$.
9. $I = \{(u_n) \in \mathcal{S} \, ; \ \forall n \geq 0, \ u_{n+1} \geq u_n\}$.
10. $J = \{(u_n) \in \mathcal{S} \, ; \ \exists N \in \mathbb{N}, \ \forall n \geq N, \ u_n = 0\}$ (suites à support fini).