

## Corrigé de la liste d'exercices n°22

## Polynômes réels

### Exercice 1.

1.  $-2$  est une racine évidente. On a donc  $mx^2 + (2m+1)x + 2 = m(x+2)(x-\alpha)$ . On doit avoir égalité des coefficients constants :  $2 = -2m\alpha$  d'où  $\alpha = -\frac{1}{m}$  ( $m \neq 0$ ).

Ainsi  $mx^2 + (2m+1)x + 2 = m(x+2)(x + \frac{1}{m})$ . Ainsi  $S = \left\{ -2, -\frac{1}{m} \right\}$ .

2.  $(m+3)x^2 - (m^2+5m)x + 2m^2 = 0$ .

$m$  est une racine évidente car  $m^3 - 3m^2 - m^3 + 5m^2 + 2m^2 = 0$ .

On a donc  $(m+3)x^2 - (m^2+5m)x + 2m^2 = (m+3)(x-m)(x-\alpha)$ . On doit avoir égalité des coefficients constants :  $2m^2 = m(m+3)\alpha$  d'où  $\alpha = \frac{m}{m+3}$  ( $m \neq -3$ ).

Ainsi  $(m+3)x^2 - (m^2+5m)x + 2m^2 = (m+3)(x-m)(x - \frac{m}{m+3})$ . Ainsi  $S = \left\{ m, \frac{m}{m+3} \right\}$ .

### Exercice 2.

1.  $P = 2X^2 - 1$  et  $Q = X$

$$PQ = 2X^3 - X$$

$$P \circ Q = 2X^2 - 1$$

$$Q \circ P = 2X^2 - 1$$

2.  $P = X^2 + 3$  et  $Q = X^2 + X + 1$

$$PQ = X^4 + X^3 + 4X^2 + 3X + 3$$

$$P \circ Q = X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 2X + 4$$

$$Q \circ P = X^4 + 7X^2 + 13$$

3.  $P = X^3 + X^2 + X + 1$  et  $Q = X - 1$ .

$$PQ = X^4 - 1$$

$$P \circ Q = X^3 - 2X^2 + 2X$$

$$Q \circ P = X^3 + X^2 + X$$

**Exercice 3.** • Si  $P$  est le polynôme nul, alors la fonction  $x \mapsto P(x)$  est à la fois paire et impaire et tous les coefficients de  $P$  sont nuls.

• On suppose dorénavant que  $P$  n'est pas le polynôme nul.

Soit  $n = \deg(P) \in \mathbb{N}$  et  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ , où  $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, a_k \in \mathbb{R}$ .

Supposons que  $x \mapsto P(x)$  est paire, i.e. pour tout réel  $x, P(x) = P(-x)$  d'où

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^n a_k x^k = \sum_{k=0}^n a_k (-x)^k = \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k x^k.$$

Par unicité de l'écriture d'un polynôme, on en déduit que pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket, a_k = (-1)^k a_k$ , ce qui implique que si  $k$  est impair,  $a_k = -a_k$  d'où  $a_k = 0$ .

Ainsi, si  $x \mapsto P(x)$  est paire, tous les coefficients d'indice impair de  $P$  sont nuls.

L'autre cas se traite de manière analogue.

**Exercice 4.** • Il est clair que le polynôme nul vérifie la condition voulue.

• Supposons qu'il existe un polynôme  $P \in \mathbb{R}[X]$  non nul tel que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $P(2x) = P(x)$ .

Soit  $n = \deg(P) \in \mathbb{N}$  et  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ , ou  $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, a_k \in \mathbb{R}$ .

On a alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(2x) = P(x) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^n 2^k a_k x^k = \sum_{k=0}^n a_k x^k.$$

Par unicité de l'écriture d'un polynôme, ceci implique que pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket, 2^k a_k = a_k$ , i.e.  $(2^k - 1)a_k = 0$ .

Si  $k \neq 0$ , alors  $2^k - 1 \neq 0$  donc pour tout  $k \neq 0, a_k = 0$ . Ainsi,  $P = a_0$  est forcément constant.

• Réciproquement, tous les polynômes constants vérifient bien pour tout réel  $x, P(2x) = P(x)$ .

Finalement, les polynômes cherchés sont les polynômes constants.

**Exercice 5.**

1. On a pour tout  $x \in \mathbb{R}, P'(x) = 6x^2 - 6 = 6(x - 1)(x + 1)$ .

La fonction  $x \mapsto P(x)$  admet donc le tableau de variation suivant :

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$+\infty$			
$P'(x)$		+	0	-	0	+	
$P$	$-\infty$		$5$		$-3$		$+\infty$

Puisque  $P$  est continue, strictement croissante sur  $] - \infty, -1[$  et que  $0 \in P(] - \infty, -1[)$ , on déduit du théorème des valeurs intermédiaires que  $P$  admet une unique racine  $\alpha \in ] - \infty, -1[$ .

On montre de même que  $P$  admet une unique racine  $\beta \in ] - 1, 1[$  et une unique racine  $\gamma \in ]1, +\infty[$ .

2. Ainsi, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$P(x) = 2(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) = 2x^3 - 2(\alpha + \beta + \gamma)x^2 + 2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)x - \alpha\beta\gamma.$$

Par unicité des coefficients d'un polynôme, on en déduit que  $\alpha + \beta + \gamma = 0$  et que  $\alpha\beta\gamma = -1$ .

**Exercice 6.** Soit  $P$  un polynôme de  $\mathbb{R}[X]$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}, P(n) = n^2$ , i.e. pour tout  $n \in \mathbb{N}, P(n) - n^2 = 0$ .

Ainsi, le polynôme  $P(X) - X^2$  admet une infinité de racines, ce qui assure que  $P(X) - X^2 = 0$ , d'où  $P(X) = X^2$ .

**Exercice 7.** Raisonnons par analyse-synthèse.

• **Analyse :** Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  tel que pour tout  $x \in \mathbb{R}, P(x^2) = (x^2 + 1)P(x)$ .

Si  $P$  est constant égal à  $a \in \mathbb{R}$ , alors l'égalité pour  $x = 1$  donne  $a = 2a$  d'où  $a = 0$ . Ainsi, le seul polynôme constant à vérifier cette condition est le polynôme nul.

Si  $P$  n'est pas un polynôme constant, soit  $n = \deg(P) \in \mathbb{N}^*$  et  $P = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ .

Pour tout  $x \in \mathbb{R}, P(x^2) = \sum_{k=0}^n a_k x^{2k}$  donc le polynôme  $P(X^2)$  est de degré  $2n$ .

Par ailleurs, le polynôme  $(X^2 + 1)P(X)$  est de degré  $n + 2$  donc on a nécessairement  $2n = n + 2$  d'où  $n = 2$ .

Ainsi, il existe  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  tel que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $P(x) = ax^2 + bx + c$ .

La condition devient donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, ax^4 + bx^2 + c = (x^2 + 1)(ax^2 + bx + c) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, ax^4 + bx^2 + c = ax^4 + bx^3 + (a+c)x^2 + bx + c.$$

Par unicité des coefficients d'un polynôme, on obtient :

$$\begin{cases} b &= 0 \\ a + c &= b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b &= 0 \\ c &= -a \end{cases}$$

donc pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $P(x) = ax^2 - a = a(x^2 - 1)$  où  $a \in \mathbb{R}$ .

• **Synthèse** : Soit  $a \in \mathbb{R}$ , soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $P(X) = a(X^2 - 1)$ .

Alors  $(X^2 + 1)P(X) = a(X^2 + 1)(X^2 - 1) = a(X^4 - 1) = P(X^2)$ .

Finalement, les polynômes cherchés sont les polynômes de la forme  $P(X) = a(X^2 - 1)$ , où  $a \in \mathbb{R}$ .

**Exercice 8.** Si  $P \in \mathbb{R}[X]$  est un polynôme constant de période  $T$ , alors  $P(\mathbb{R}) = P([0, T])$ . Puisque  $P$  est continu et que  $[0, T]$  est un segment, d'après le théorème des bornes atteintes, on en déduit que  $P([0, T])$  est un segment donc  $P(\mathbb{R}) = P([0, T])$  est un segment, ce qui implique que  $P$  est borné.

Supposons par l'absurde que  $P$  n'est pas constant. Soit  $n = \deg(P) \in \mathbb{N}^*$ .

Alors  $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$  avec  $a_n \neq 0$  et  $P(x) \underset{+\infty}{\sim} a_n x^n$  donc, puisque  $n \neq 0$ ,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } a_n > 0 \\ -\infty & \text{si } a_n < 0 \end{cases},$$

ce qui contredit le fait que  $P$  est borné.

Nécessairement, si  $P$  est périodique, alors  $P$  est constant.

**Exercice 9.** • Si  $Q = 0$ , on a bien pour tout  $x \in [a, b]$ ,  $P(x)Q(x) = R(x)Q(x)$ .

• On suppose dorénavant que  $Q \neq 0$ . Alors  $Q$  s'annule au maximum un nombre fini de fois sur l'intervalle  $[a, b]$ . Notons  $x_1, \dots, x_n$  les racines éventuelles de  $Q$  sur l'intervalle  $[a, b]$ .

On a pour tout  $x \in [a, b]$ ,  $Q(x)(P(x) - R(x)) = 0$ .

Ainsi, pour tout  $x \in [a, b] \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$ ,  $P(x) - R(x) = 0$ .

Puisque  $a < b$ , l'intervalle  $[a, b]$  est infini donc l'ensemble  $[a, b] \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$  est infini. Ainsi, le polynôme  $P - R$  s'annule une infinité de fois, ce qui implique que  $P - R$  est le polynôme nul, i.e.  $P = R$ .

**Exercice 10.**

1. Soit  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .

Construisons un polynôme  $L_i$  de degré inférieur ou égal à  $n$  tel que pour tout  $j \in$

$\llbracket 0, n \rrbracket \setminus \{i\}$ ,  $L_i(x_j) = 0$ . Alors  $L_i$  est factorisable par  $\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^i (X - x_j)$ . Puisque ce produit est

de degré  $n$  et que  $\deg(L_i) \leq n$ , nécessairement  $L_i$  est de degré  $n$  et il existe un réel  $\lambda$  tel

que  $L_i = \lambda \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^i (X - x_j)$ .

Par ailleurs, pour avoir  $L_i(x_i) = 1$ , il vient  $1 = \lambda \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^i (x_i - x_j)$ . Puisque les réels  $x_0, \dots, x_n$

sont deux à deux distincts, on a pour tout  $j \neq i, x_i - x_j \neq 0$  donc  $\lambda = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^i \frac{1}{x_i - x_j}$ , ce

qui implique que  $L_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^i \frac{X - x_j}{x_i - x_j}$ .

On voit dès lors que le polynôme  $L_i$  est uniquement déterminé. Montrons-le néanmoins. Supposons qu'il existe un autre polynôme  $T_i$  de degré inférieur ou égal à  $n$  tel que  $T_i(x_i) = 1$  et pour tout  $j \neq i, T_i(x_j) = 0$ .

Alors pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket, (L_i - T_i)(x_k) = 0$ .

Or,  $\deg(L_i - T_i) \leq \max(\deg(L_i), \deg(T_i)) \leq n$  donc  $L_i - T_i$  est un polynôme de degré inférieur ou égal à  $n$  admettant  $n + 1$  racines distinctes. Nécessairement,  $L_i - T_i = 0$ , i.e.  $L_i = T_i$ , ce qui assure l'unicité du polynôme  $L_i$ .

## 2. • Existence :

Posons  $L = \sum_{k=0}^n a_k L_k$ . Puisque pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \deg(L_k) \leq n$ , alors  $\deg(L) \leq n$ .

De plus, pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket, L(x_i) = \sum_{k=0}^n a_k L_k(x_i) = \sum_{k=0}^n a_k \delta_{i,k} = a_i$ .

Le polynôme  $L$  convient donc.

## • Unicité :

Supposons qu'il existe un autre polynôme  $T \in \mathbb{R}[X]$  avec  $\deg(T) \leq n$  tel que pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket, T(x_i) = a_i$ . Alors pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket, (L - T)(x_i) = 0$  donc  $L - T$  est un polynôme de degré inférieur ou égal à  $n$  admettant  $n + 1$  racines, ce qui prouve que  $L - T = 0$ , i.e.  $L = T$ .

Le polynôme  $L = \sum_{k=0}^n a_k L_k$  est donc bien l'unique polynôme de degré inférieur ou égal à  $n$  tel que pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket, L(x_i) = a_i$ .

## Exercice 11.

On vérifie aisément que  $P(1) = 0$  donc  $P$  est factorisable par  $X - 1$  et on a pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$P(x) = (x - 1)(x^4 - 2x^3 - x + 2).$$

De même, 1 est racine du polynôme  $X^4 - 2X^3 - X + 2$  donc on peut de nouveau factoriser par  $x - 1$  :

$$P(x) = (x - 1)(x - 1)(x^3 - x^2 - x - 2).$$

On remarque que 2 est racine du polynôme  $X^3 - X^2 - X - 2$  donc

$$P(x) = (x - 1)^2(x - 2)(x^2 + x + 1).$$

Enfin, les racines de  $X^2 + X + 1$  sont  $j = e^{\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$  et  $\bar{j} = e^{-\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$  donc

$$P(x) = (x - 1)^2(x - 2)(x - j)(x - \bar{j}).$$

**Exercice 12.** Soit  $P : x \mapsto ax^{n+1} + bx^n + 1$ . Le polynôme  $P$  admet 1 comme racine double si et seulement si  $P(1) = P'(1) = 0$  et  $P''(1) \neq 0$ .

On a pour tout  $x \in \mathbb{R}, P'(x) = (n + 1)ax^n + nbx^{n-1}$  et  $P''(x) = n(n + 1)ax^{n-1} + n(n - 1)bx^{n-2}$  si  $n \neq 1$  et  $P''(x) = 2a$  si  $n = 1$ .

- Si  $n = 1$ , 1 est racine double de  $P$  si et seulement si  $\begin{cases} a + b + 1 = 0 \\ 2a + b = 0 \\ 2a \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases}$

Pour  $n = 1$ ,  $a = 1$  et  $b = -2$  on a bien  $P(X) = X^2 - 2X + 1 = (X - 1)^2$ .

- Si  $n > 1$ , 1 est racine double de  $P$  si et seulement si  $\begin{cases} a + b + 1 = 0 \\ (n + 1)a + nb = 0 \\ n(n + 1)a + n(n - 1)b \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} a = n \\ b = -n - 1 \\ n^2(n + 1) - n(n - 1)(n + 1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = n \\ b = -n - 1 \\ n(n + 1) \neq 0 \end{cases}$$

Finalement, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'unique polynôme qui satisfait la condition voulue est

$$P(X) = nX^{n+1} - (n + 1)X^n + 1.$$

### Exercice 13.

1. Soit  $\alpha$  une racine multiple de  $P$ . Alors  $P(\alpha) = P'(\alpha) = 0$ .

Or,  $P'(X) = 12X^2 - 32X - 19 = 12(X + \frac{1}{2})(X - \frac{19}{6})$ .

On constate que  $\alpha = -\frac{1}{2}$  est racine de  $P'$  et de  $P$  donc  $-\frac{1}{2}$  est racine double de  $P$ . Ainsi,  $P$  est factorisable par  $4(X + \frac{1}{2})^2 = (2X + 1)^2$ .

On obtient :

$$P(X) = (2X + 1)(2X^2 - 9X - 5) = (2X + 1)^2(X - 5).$$

Les racines de  $P$  sont donc  $-\frac{1}{2}$  (racine double) et 5 (racine simple).

2. On constate que  $-1$  est racine de  $R$  donc

$$R(X) = (X + 1)(X^2 - 8X + 15) = (X + 1)(X - 3)(X - 5).$$

Les racines de  $R$  sont donc  $-1, 3$  et  $5$ .

On constate que 3 est racine de  $Q$  donc

$$Q(X) = (X - 3)(X^2 - 6X + 8) = (X - 3)(X - 4)(X - 2).$$

Les racines de  $Q$  sont donc 2, 3 et 4.

### Exercice 14.

1. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  (si  $n = 0$ ,  $P_0 = 1$ ). Supposons par l'absurde que  $P_n$  admette une racine multiple  $\alpha$ .

Alors  $P_n(\alpha) = P'_n(\alpha) = 0$ . Or,  $P'_n = P_{n-1}$  donc  $P_n(\alpha) = P_{n-1}(\alpha) = 0$ .

On en déduit que  $P_n(\alpha) - P_{n-1}(\alpha) = 0$ . Or,  $P_n - P_{n-1} = \frac{X^n}{n!}$  donc  $\frac{\alpha^n}{n!} = 0$ , ce qui implique que  $\alpha = 0$ . Mais, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $P_n(0) = 1 \neq 0$ .

Ainsi,  $P_n$  n'admet pas de racine multiple.

2. Notons que pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ ,  $P_n(x) \geq 1 > 0$  donc les racines éventuelles de  $P_n$  sont strictement négatives.

Montrons par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$  le résultat suivant :  $P_{2n}$  n'admet pas de racine réelle et  $P_{2n+1}$  admet une unique racine réelle.

•**Initialisation** : Pour  $n = 0$ ,  $P_0 = 1$  n'admet pas de racine réelle et  $P_1 = 1 + X$  admet une seule racine réelle :  $-1$ .

•**Hérédité** : Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons la propriété vraie au rang  $n$  et montrons-la au rang  $n + 1$ .

Montrons que  $P_{2n+2}$  n'admet pas de racine réelle.

On a pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $P'_{2n+2}(x) = P_{2n+1}(x)$ . Par hypothèse de récurrence,  $P_{2n+1}$  admet une unique racine réelle  $\alpha < 0$ .

Par ailleurs, on a  $\lim_{x \rightarrow -\infty} P_{2n+1}(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} P_{2n+1}(x) = +\infty$ , et  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} P_{2n+2}(x) = +\infty$ , ce qui nous fournit le tableau de variation suivant :

$x$	$-\infty$	$\alpha$	$+\infty$
$P_{2n+1}(x)$		-	+
$P_{2n+2}$	$+\infty$	$P_{2n+2}(\alpha)$	$+\infty$

Or,  $P_{2n+2}(\alpha) = P_{2n+1}(\alpha) + \frac{\alpha^{2n+2}}{(2n+2)!} = \frac{\alpha^{2n+2}}{(2n+2)!} > 0$  car  $\alpha < 0$ . On en déduit que  $P_{2n+2}$  n'admet pas de racine réelle et que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $P_{2n+2} > 0$ .

Il s'ensuit que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $P'_{2n+3}(x) = P_{2n+2}(x) > 0$  donc la fonction  $x \mapsto P_{2n+3}(x)$  est strictement croissante et continue sur  $\mathbb{R}$  avec  $\lim_{x \rightarrow -\infty} P_{2n+3}(x) = -\infty$  et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P_{2n+3}(x) = +\infty.$$

D'après le théorème de la bijection,  $P_{2n+3}$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}$  et a fortiori,  $P_{2n+3}$  s'annule une seule fois.

On a donc bien montré par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $P_{2n}$  n'admet pas de racine réelle et  $P_{2n+1}$  admet une unique racine réelle.

### Exercice 15.

- Supposons que  $P$  est scindé à racines simples, i.e.  $P(x) = a \prod_{k=1}^p (X - x_k)$ , où  $p = \deg(P)$ .

Quitte à renuméroter les  $x_k$ , on peut supposer que  $x_1 < \dots < x_p$ .

Pour tout  $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$ ,  $P$  est continu sur  $[x_k, x_{k+1}]$ , dérivable sur  $]x_k, x_{k+1}[$  et  $P(x_k) = P(x_{k+1}) = 0$ .

D'après le théorème de Rolle, il existe un réel  $\alpha_k \in ]x_k, x_{k+1}[$  tel que  $P'(\alpha_k) = 0$ .

Ainsi,  $P'$  admet  $p-1$  racines distinctes  $\alpha_1 < \dots < \alpha_{p-1}$  et est de degré  $p-1$ . On en déduit que  $P'$  est bien scindé à racines simples.

Remarque : le résultat n'est plus vrai sur  $\mathbb{C}[X]$ .

Le polynôme  $P(X) = X^3 - 1 = (X-1)(X-j)(X-\bar{j})$  est scindé à racines simples mais son polynôme dérivé  $P'(X) = 3X^2$  ne l'est pas (0 est racine double).

- Supposons que  $P$  est scindé, i.e.  $P(x) = a \prod_{k=1}^p (X - x_k)^{m_k}$ , avec  $x_1 < \dots < x_p$  et pour

tout  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ,  $m_k \in \mathbb{N}^*$ . On a alors  $\deg(P) = \sum_{k=1}^p m_k$  donc  $\deg(P') = \sum_{k=1}^p m_k - 1$ .

La même preuve que celle en question précédente montre que  $P'$  admet  $p-1$  racines distinctes  $\alpha_1 < \dots < \alpha_{p-1}$  telles que pour tout  $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$ ,  $\alpha_k \in ]x_k, x_{k+1}[$ .

Par ailleurs, pour tout  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , puisque  $x_k$  est racine de  $P$  d'ordre  $m_k$ , alors  $x_k$  est racine de  $P'$  d'ordre  $m_k - 1$  (avec éventuellement  $m_k - 1 = 0$ ).

Ainsi,  $P'$  est divisible par  $\prod_{k=1}^{p-1} (X - \alpha_k) \prod_{k=1}^p (X - x_k)^{m_k - 1}$ . Or, ce dernier polynôme est de

$$\text{degré } p-1 + \sum_{k=1}^p (m_k - 1) = \sum_{k=1}^p m_k - p + p - 1 = \sum_{k=1}^p m_k - 1 = \deg(P').$$

Par égalité des degrés, on en déduit qu'il existe une constante  $c \in \mathbb{R}^*$  telle que

$$P' = c \prod_{k=1}^{p-1} (X - \alpha_k) \prod_{k=1}^p (X - x_k)^{m_k-1},$$

ce qui prouve que  $P'$  est scindé.

Remarque : Cette question n'a pas d'intérêt sur  $\mathbb{C}[X]$  car tout polynôme de degré  $\geq 1$  est scindé (théorème de d'Alembert-Gauss).

### Exercice 16.

1. Raisonnons par récurrence sur  $n = \deg(P)$ .

• **Initialisation** : Si  $n = 0$ ,  $P$  est un polynôme constant et on a alors

$$P(X) = P(a) = \sum_{k=0}^0 \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^k,$$

donc la propriété est vraie au rang  $n = 0$ .

• **Hérédité** : Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons la propriété vraie au rang  $n$  et montrons-la au rang  $n + 1$ .

Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  de degré  $n + 1$ . Alors  $P'$  est de degré  $n$  donc par hypothèse de récurrence, on a pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$P'(t) = \sum_{k=0}^n \frac{P'^{(k)}(a)}{k!} (t - a)^k = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k+1)}(a)}{k!} (t - a)^k.$$

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . En intégrant l'égalité qu'on vient d'obtenir entre  $a$  et  $x$ , on trouve :

$$\int_a^x P'(t) dt = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k+1)}(a)}{k!} \int_a^x (t - a)^k dt \Leftrightarrow P(x) - P(a) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k+1)}(a)}{k!} \left[ \frac{(t - a)^{k+1}}{k+1} \right]_a^x$$

d'où  $P(x) = P(a) + \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k+1)}(a)}{(k+1)!} (x - a)^{k+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k$ , ce qui prouve la formule au rang  $n + 1$  et achève la récurrence.

2. • Le sens direct a été vu en cours.

• Réciproquement, supposons que pour tout  $k \in \llbracket 0, m - 1 \rrbracket$ ,  $P^{(k)}(a) = 0$  et  $P^{(m)}(a) \neq 0$  (ce qui implique que  $n \geq m$  car  $P^{(n+1)} = 0$ ).

D'après la formule de Taylor établie à la question précédente, on a alors

$$P(X) = \sum_{k=m}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^k = (X - a)^m \sum_{k=m}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^{k-m}.$$

Posons  $Q(X) = \sum_{k=m}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^{k-m}$ .

On a alors  $P(X) = (X - a)^m Q(X)$  avec  $Q(a) = \frac{P^{(m)}(a)}{m!} \neq 0$  par hypothèse.

Par définition, ceci signifie que  $a$  est racine de  $P$  d'ordre  $m$ .

**Exercice 17.** • Si  $P = 0$ , alors  $P' = 0$  divise  $P$ .

• Si  $P$  est un polynôme constant non nul, alors  $P' = 0$  ne divise pas  $P$ .

• Supposons désormais que  $P$  est un polynôme de degré  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $P'$  divise  $P$ . Puisque  $P'$  est de degré  $n - 1 \in \mathbb{N}$ , il existe deux réels  $\lambda$  et  $a$  tels que  $P(X) = \lambda(X - a)P'(X)$ .

D'après la formule de Taylor établie dans l'exercice précédent, on a  $P(X) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^k$

$$\text{et } P'(X) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{P^{(k+1)}(a)}{k!} (X - a)^k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{P^{(k+1)}(a)}{k!} (X - a)^k.$$

On a alors

$$\begin{aligned} P(X) = \lambda(X - a)P'(X) &\Leftrightarrow \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^k = \lambda \sum_{k=0}^{n-1} \frac{P^{(k+1)}(a)}{k!} (X - a)^{k+1} \\ &\Leftrightarrow \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^k = \lambda \sum_{k=1}^n \frac{P^{(k)}(a)}{(k-1)!} (X - a)^k \\ &\Leftrightarrow P(a) + \sum_{k=1}^n \frac{P^{(k)}(a)}{(k-1)!} \left( \frac{1}{k} - \lambda \right) (X - a)^k = 0. \end{aligned}$$

Par unicité des coefficients du polynôme nul, tous les coefficients sont nuls, en particulier le coefficient dominant, qui est  $\frac{P^{(n)}(a)}{(n-1)!} \left( \frac{1}{n} - \lambda \right)$ . Or, le polynôme  $P^{(n)}$  est une constante non nulle puisque  $P$  est de degré  $n$ , donc  $P^{(n)}(a) \neq 0$ . Nécessairement, cela implique que  $\lambda = \frac{1}{n}$ .

$$\text{Il reste alors } P(a) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{P^{(k)}(a)}{(k-1)!} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{n} \right) (X - a)^k = 0.$$

En raisonnant de même, le coefficient dominant de ce polynôme est nul, i.e.  $\frac{P^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} \left( \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = 0$ , donc  $P^{(n-1)}(a) = 0$  et par récurrence descendante, on obtient que pour tout  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ ,  $P^{(k)}(a) = 0$ .

Finalement  $P(X) = \frac{P^{(n)}(a)}{n!} (X - a)^n$ , c'est à dire  $P$  est de la forme  $P = c(X - a)^n$ , où  $c \in \mathbb{R}^*$ .

• Réciproquement, si  $P$  est de la forme  $P = c(X - a)^n$ , où  $a$  et  $c$  sont deux réels avec  $c \in \mathbb{R}^*$  et  $n \geq 1$ , alors  $P' = nc(X - a)^{n-1}$  et  $P = \frac{1}{n}(X - a)P'$  donc  $P'$  divise bien  $P$ .

Finalement, les polynômes de  $\mathbb{R}[X]$  divisibles par leur polynôme dérivé sont les polynômes de la forme  $P = c(X - a)^n$  où  $(a, c, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{N}^*$  (si  $c = 0$ , on retrouve le polynôme nul).

**Exercice 18.** Par hypothèse, il existe deux polynômes  $Q$  et  $R$  tels que

$$P = (X - a)Q + 1 = (X - b)R - 1.$$

Ceci implique que  $P(a) = 1$  et  $P(b) = -1$ .

La division euclidienne de  $P$  par  $(X - a)(X - b)$  s'écrit  $P(X) = (X - a)(X - b)S(X) + \alpha X + \beta$ , où  $S \in \mathbb{R}[X]$  et  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ .

En évaluant cette dernière égalité en  $a$  et en  $b$ , on trouve  $P(a) = \alpha a + \beta$  et  $P(b) = \alpha b + \beta$  d'où

$$\begin{cases} \alpha a + \beta = 1 \\ \alpha b + \beta = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{2}{a-b} \\ \beta = 1 - \frac{2a}{a-b} = -\frac{a+b}{a-b} \end{cases},$$

ce qui est possible car  $a \neq b$ .

Finalement, le reste dans la division euclidienne de  $P$  par  $(X - a)(X - b)$  est  $\frac{1}{a-b}(2X - a - b)$ .

**Exercice 19.** Notons  $Q = \sum_{k \in \mathbb{N}} P^{(k)} = \sum_{k=0}^{\deg(P)} P^{(k)}$ , qui est également un polynôme de même degré que  $P$ .

- Si  $\deg(P) = 0$ , le résultat est évident car alors  $Q = P$ .
- On suppose dorénavant que  $\deg(P) \geq 1$ . Notons  $n = \deg(P) \geq 1$  et  $a_n$  le coefficient dominant de  $P$ . On a alors  $P(x) \underset{\pm\infty}{\sim} a_n x^n$ . L'hypothèse implique donc que  $a_n > 0$  (et que  $n$  est pair pour que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} a_n x^n = +\infty$ ).

Par ailleurs, on a également  $Q(x) \underset{\pm\infty}{\sim} a_n x^n$  donc  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} Q(x) = +\infty$ .

Ainsi, d'après un exercice vu dans le TD sur les limites et la continuité, puisque  $Q$  est une fonction continue sur  $\mathbb{R}$ , il en découle que  $Q$  admet un minimum sur  $\mathbb{R}$ , atteint en un réel  $\alpha$ . Puisque c'est un minimum global sur  $\mathbb{R}$ , on en déduit que  $Q'(\alpha) = 0$ .

Or,  $Q' = Q - P$  donc  $0 = Q'(\alpha) = Q(\alpha) - P(\alpha)$ , ce qui implique que  $Q(\alpha) = P(\alpha) \geq 0$  par hypothèse.

On en conclut que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $Q(x) \geq Q(\alpha) \geq 0$ .