Lycée Fénelon
Année 2025–2026

BCPST1
A. Wassfi

Devoir surveillé de mathématiques n°7

Samedi 4 avril 2026 (4h00)

L'énoncé est constitué de quatre exercices et comporte 6 pages.

Les questions d'informatique (exercice 1 : questions 12 à 15) sont à rendre sur une copie séparée.

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, la précision et la concision de la rédaction. Le soin de la copie ainsi que l'orthographe entreront également pour une part importante dans l'appréciation du travail rendu.

Les résultats doivent être encadrés.

Si un candidat repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Lorsqu'un raisonnement utilise le résultat d'une question précédente, il est demandé au candidat d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.

Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1 : suite et fonctions

On considère les fonctions f et g définies sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \qquad f(x) = 2 - \frac{1}{2}\ln(x) \quad \text{et} \quad g(x) = f(x) - x.$$

On considère aussi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

Partie 1 : étude d'une suite

1. Calculer les limites suivantes :
$$\lim_{x\to 0^+} g(x) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x).$$
2. Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in]0,+\infty[$ puis dresser le tableau des variations de g sur $]0,+\infty[$.
3. Justifier que g est une bijection de $]0,+\infty[$ sur un intervalle à préciser.
4. Prouver que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0,+\infty[$.
On la note α.
5. Justifier que :
$$\alpha \in [1,e] \qquad \text{et} \qquad f(\alpha) = \alpha.$$
6. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]0,+\infty[$ et préciser la monotonie de la fonction f.
7. Démontrer par récurrence que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq u_n \leq e.$$
8. Vérifier que :
$$\forall x \in [1,e], \quad |f'(x)| \leq \frac{1}{2}.$$
9. En déduire, à l'aide du théorème des accroissements finis, que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|.$$
10. Démontrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leq \frac{e-1}{2^n}.$$
11. Prouver que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

Partie 2 : questions d'informatique

Pour les questions d'informatique, **qui sont à rendre sur une copie séparée**, on pourra utiliser les fonctions `log` (logarithme népérien) ou `exp` (fonction exponentielle) du module `math` à condition de les importer au préalable.

12. Écrire deux fonctions Python `f(x)` et `g(x)` qui retournent respectivement les nombres $f(x)$ et $g(x)$ où `x` est un nombre donné en paramètre.
13. En utilisant un algorithme de dichotomie, écrire une fonction Python `alpha(eps)` qui retourne une valeur approchée de α à `eps` près.
14. Écrire une fonction Python itérative `u_iter(n)` qui retourne le terme u_n.
15. Écrire une fonction Python récursive `u_recur(n)` qui retourne le terme u_n.

Exercice 2 : le modèle de Verhulst

Partie 1 : une fonction logistique

Soit $a > 0$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{1}{ae^{-x} + 1}.$$

1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée. En déduire le sens de variation de f.
2. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$ puis en donner une interprétation graphique.
3. On souhaite calculer la valeur moyenne de f entre 0 et 1 : $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.
   (a) Déterminer des réels b et c tels que pour tout réel x strictement positif :
   $$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{b}{x} + \frac{c}{x+1}.$$
   (b) Calculer l'intégrale I. *On pourra effectuer le changement de variable $t = ae^{-x}$.*

Partie 2 : l'équation de Verhulst

On considère l'équation différentielle

$$(E) \ : \ y' = y(1 - y),$$

où la fonction inconnue y est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et vérifie, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$0 < y(x) < 1. \qquad (\star)$$

Cette équation différentielle, appelée équation de Verhulst, est utilisée notamment en biologie pour modéliser l'évolution de certaines populations.

4. Soit y une fonction solution de (E) et vérifiant l'encadrement $(\star)$.
   Déterminer le sens de variation de y.
5. Soit y une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, vérifiant l'encadrement $(\star)$.
   On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$z(x) = \frac{1}{y(x)}.$$
   (a) Démontrer que la fonction y est solution de l'équation (E) si, et seulement si, la fonction z est solution de l'équation différentielle
   $$(E') \ : \ z' + z = 1.$$
   (b) Résoudre l'équation (E').
   (c) En déduire les fonctions solutions de l'équation (E).
   (d) Déterminer la solution de (E) vérifiant la condition initiale $y(0) = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 3 : suite d'intégrales et limite d'une somme alternée

On considère la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n \, dt.$$

1. Montrer que I_n est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Calculer I_0, I_1 et I_2.
3. (a) Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n\geq 0}$.
   En déduire que la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ converge.

   (b) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+2} = (n+1)\big(I_n - I_{n+2}\big).$$

   Montrer alors que :

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n.$$

   (c) En déduire que :

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \, \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad I_{2n+1} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}.$$

4. (a) Rappeler un équivalent simple de $x \mapsto \cos(x) - 1$ et $u \mapsto \ln(1+u)$ au voisinage de 0.

   (b) Montrer que

   $$n \ln\big(\cos(n^{-1/4})\big) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2}\sqrt{n}.$$

   En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \big(\cos(n^{-1/4})\big)^n$.

   (c) Montrer que :

   $$\lim_{n\to+\infty} \big(\cos(n^{-2/3})\big)^n = 1.$$

5. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

   $$\int_0^{n^{-1/4}} (\cos t)^n \, dt \leq n^{-1/4}.$$

   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

   $$\int_{n^{-1/4}}^{\pi/2} (\cos t)^n \, dt \leq \frac{\pi}{2} \big(\cos(n^{-1/4})\big)^n.$$

   (c) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$I_n \geq \int_0^{n^{-2/3}} (\cos t)^n \, dt \geq n^{-2/3} \big(\cos(n^{-2/3})\big)^n.$$

7. (a) Montrer que pour tout réel t de $]-\pi,\pi[$:

$$\cos(t)+1=\frac{2}{1+\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

(b) À l'aide du changement de variable $u=\tan\left(\frac{t}{2}\right)$, montrer que :

$$\int_0^{\pi/2}\frac{dt}{1+\cos(t)}=1.$$

(c) En permutant somme et intégrale, montrer que pour tout entier n :

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k I_k=\int_0^{\pi/2}\frac{dt}{1+\cos(t)}-\int_0^{\pi/2}\frac{\left(-\cos(t)\right)^{n+1}}{1+\cos(t)}\,dt.$$

(d) Montrer que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad\left|\int_0^{\pi/2}\frac{\left(-\cos(t)\right)^{n+1}}{1+\cos(t)}\,dt\right|\leq I_{n+1}.$$

(e) En déduire que la suite $\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k I_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 4 : probabilités discrètes

On effectue des lancers successifs et indépendants d'une pièce de monnaie pour laquelle la probabilité d'obtenir PILE vaut $\frac{2}{3}$.
On suppose donnée un espace probabilisé muni d'une probabilité P modélisant cette expérience.
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On dit qu'il y a apparition d'un double PILE au rang n si on obtient PILE au $(n-1)$-ième lancer et PILE au n-ième lancer.
On note les événements suivants :

- pour tout entier $n \geq 1$, F_n : « on obtient FACE au n-ième lancer » ;
- pour tout entier $n \geq 2$, D_n : « on obtient un double PILE au rang n pour la première fois » ;
- pour tout entier $n \geq 2$, $v_n = P(D_n)$. On conviendra que $v_1 = 0$.

Par exemple, si les lancers donnent successivement : « PILE, FACE, FACE, FACE, PILE, FACE, PILE, PILE » alors l'événement D_8 est réalisé.

1. On lance n fois de suite la pièce. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de PILE obtenus au cours de ces n lancers.
   (a) Déterminer la loi de X (une réponse argumentée est attendue).
   Préciser l'ensemble $X(\Omega)$ ainsi que la valeur de $P(X = k)$ lorsque $k \in X(\Omega)$.
   (b) Donner la valeur de l'espérance $E(X)$ et de la variance $V(X)$ de la variable aléatoire X.
2. Calculer v_2 et v_3. Vérifier que :
$$v_3 = \frac{1}{3}v_2 + \frac{2}{9}v_1.$$
   Rappelons que l'on a convenu que $v_1 = 0$.
3. Soit $n \geq 2$. On suppose qu'au premier lancer, PILE est obtenu et on souhaite la réalisation de l'événement D_{n+2}. Quel est alors le résultat du second lancer ? À l'issue de ces deux premiers lancers, combien de lancers reste-t-il à effectuer pour que D_{n+2} puisse se réaliser ?
   En déduire que :
$$P_{\overline{F_1}}(D_{n+2}) = \frac{1}{3}\,v_n.$$
4. Pour $n \geq 2$, justifier que :
$$P_{F_1}(D_{n+2}) = v_{n+1}.$$
5. À l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que :
$$\forall n \geq 2, \quad v_{n+2} = \frac{1}{3}v_{n+1} + \frac{2}{9}v_n.$$
   En outre, d'après la question 2), cette formule est vraie pour $n = 1$.
6. Démontrer que :
$$\forall n \geq 1, \quad P(D_n) = \frac{4}{9}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right].$$
7. Pour tout entier $n \geq 2$, on note E_n l'événement « il n'y a pas eu deux PILE consécutifs au cours des n premiers lancers ».
   Exprimer l'événement E_n en fonction des événements $D_2, \ldots, D_n$. En déduire que :
$$P(E_n) = 1 - \sum_{k=2}^{n} v_k.$$
8. Calculer la limite de $P(E_n)$ lorsque n tend vers l'infini.