

---

CORRIGÉ DU DEVOIR SURVEILLÉ DE MATHÉMATIQUES N°7  
Samedi 4 avril 2026 (4h00)

---

## Exercice 1 : suite et fonctions

### 1 Etude d'une suite

On considère les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $]0, +\infty[$  par :

$$\forall x \in ]0, +\infty[, \quad f(x) = 2 - \frac{1}{2} \ln(x) \quad \text{et} \quad g(x) = f(x) - x.$$

On considère aussi la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

1. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x).$$

Comme  $\ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty$ , on a  $-\frac{1}{2} \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$  et  $-x \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$ , donc

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty}.$$

De plus,  $g(x) = x\left(\frac{2}{x} - \frac{1}{2x} \ln(x) - 1\right)$ . Comme  $x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$  et que  $\frac{\ln(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$  (croissance comparée), on en déduit que  $\frac{2}{x} - \frac{1}{2x} \ln(x) - 1 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -1$  et donc :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty}.$$

(Un calcul direct aurait en fait fonctionné.)

2. Calculer  $g'(x)$  pour tout  $x \in ]0, +\infty[$  puis dresser le tableau des variations de  $g$  sur  $]0, +\infty[$ .

$g$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  en tant que somme de fonctions dérivables et pour tout  $x > 0$  :

$$g'(x) = -\frac{1}{2x} - 1.$$

Ainsi, pour tout  $x > 0$ ,  $g'(x) < 0$  donc  $g$  est strictement décroissante sur  $]0, +\infty[$ .  
On en déduit le tableau de variations de  $g$  :

$x$	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	
$g(x)$	$+\infty$	$-\infty$

3. Justifier que  $g$  est une bijection de  $]0, +\infty[$  sur un intervalle à préciser.

La fonction  $g$  est continue sur  $]0, +\infty[$  et strictement décroissante sur  $]0, +\infty[$ . De plus,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty.$$

Donc, d'après le théorème de la bijection continue,  $g$  est bijective de  $]0, +\infty[$  sur  $\boxed{g(]0, +\infty[) = \mathbb{R}}$ .

4. Prouver que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution sur  $]0, +\infty[$ .

On la note  $\alpha$ .

Comme  $g$  est continue et strictement décroissante sur  $]0, +\infty[$ . De plus,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ . Donc, d'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation  $g(x) = 0$  a une unique solution, notée  $\boxed{\alpha}$ .

5. Justifier que :

$$\alpha \in [1, e] \quad \text{et} \quad f(\alpha) = \alpha.$$

On calcule

$$g(1) = 2 - \frac{1}{2} \ln(1) - 1 = 1 > 0, \quad g(e) = 2 - \frac{1}{2} \ln(e) - e = 2 - \frac{1}{2} - e = \frac{3}{2} - e < 0.$$

Ainsi,  $g(e) < 0 = g(\alpha) < g(1)$  et donc son unique zéro  $\alpha$  vérifie  $\boxed{\alpha \in [1, e]}$ .

Enfin  $g(\alpha) = 0 \iff f(\alpha) - \alpha = 0 \iff \boxed{f(\alpha) = \alpha}$ .

6. Calculer  $f'(x)$  pour tout  $x \in ]0, +\infty[$  et préciser la monotonie de la fonction  $f$ .

$f$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  et pour tout  $x > 0$  :

$$f'(x) = -\frac{1}{2x}.$$

Ainsi  $f'(x) < 0$  sur  $]0, +\infty[$ , donc  $\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur } ]0, +\infty[}$ .

7. Démontrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq u_n \leq e.$$

Soit la proposition  $P(n) : \forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq u_n \leq e$ .

Initialisation :  $u_0 = 1$ , donc  $1 \leq u_0 \leq e$ .

Hérédité : soit  $n \in \mathbb{N}$  et supposons  $P(n)$  vraie c'est-à-dire  $1 \leq u_n \leq e$ .

Comme  $f$  est décroissante sur  $]0, +\infty[$  :

$$f(e) \leq f(u_n) \leq f(1).$$

Or

$$f(e) = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \geq 1, \quad f(1) = 2 \leq e.$$

Donc  $1 \leq u_{n+1} = f(u_n) \leq e$ . Ainsi  $P(n+1)$  est vraie.

Conclusion : par récurrence,  $\boxed{\forall n, 1 \leq u_n \leq e}$ .

8. Vérifier que :

$$\forall x \in [1, e], \quad |f'(x)| \leq \frac{1}{2}.$$

Sur  $[1, e]$ , on a  $x \geq 1$ , donc

$$|f'(x)| = \frac{1}{2x} \leq \frac{1}{2}.$$

Ainsi  $\boxed{\forall x \in [1, e], |f'(x)| \leq \frac{1}{2}}$ .

9. En déduire, à l'aide du théorème des accroissements finis, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|.$$

On a  $u_{n+1} = f(u_n)$  et  $f(\alpha) = \alpha$ . De plus,  $u_n \in [1, e]$  et  $\alpha \in [1, e]$ . Par le théorème des accroissements finis appliqué à  $f$  entre  $u_n$  et  $\alpha$ , il existe un réel  $c$  compris entre  $u_n$  et  $\alpha$  tel que

$$f(u_n) - f(\alpha) = f'(c)(u_n - \alpha) \Rightarrow |f(u_n) - f(\alpha)| = |f'(c)| |u_n - \alpha|.$$

Avec la question précédente,  $|f'(c)| \leq \frac{1}{2}$ , donc

$$|u_{n+1} - \alpha| = |f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|.$$

10. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leq \frac{e-1}{2^n}.$$

Soit la proposition  $P(n) : \forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \frac{e-1}{2^n}$ . Démontrons  $P(n)$  par récurrence.

Initialisation : comme  $u_0 = 1$  et  $\alpha \in [1, e]$ , on a  $|u_0 - \alpha| \leq e - 1$ , soit  $|u_0 - \alpha| \leq \frac{e-1}{2^0}$ .

Donc  $P(0)$  est vraie.

Hérédité : soit  $n \in \mathbb{N}$  et supposons  $P(n)$  vraie c'est-à-dire  $|u_n - \alpha| \leq \frac{e-1}{2^n}$ .

D'après la question 9),

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{e-1}{2^n} = \frac{e-1}{2^{n+1}}.$$

Donc  $P(n+1)$  est vraie.

Conclusion : par récurrence,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \frac{e-1}{2^n}}.$$

11. Prouver que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge et préciser sa limite.

D'après la question 10),  $|u_n - \alpha| \leq \frac{e-1}{2^n}$  et  $\frac{e-1}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

Donc  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \alpha$ .

Ainsi,  $(u_n)$  converge et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$ .

## Partie 2 : questions d'informatique

12. Écrire deux fonctions Python  $f(x)$  et  $g(x)$  qui retournent respectivement les nombres  $f(x)$  et  $g(x)$  où  $x$  est un nombre donné en paramètre.

### Définition des fonctions $f(x)$ et $g(x)$

```
from math import log

def f(x):
    return 2 - 0.5 * log(x)

def g(x):
    return f(x) - x
```

13. En utilisant un algorithme de dichotomie, écrire une fonction Python  $\alpha(\text{eps})$  qui retourne une valeur approchée de  $\alpha$  à  $\text{eps}$  près.

### Approximation de $\alpha$ par dichotomie

```
from math import exp

def alpha(eps):
    a = 1
    b = exp(1)
    while b - a > 2*eps:
        m = (a + b) / 2
        if g(m) == 0:
            return m
        elif g(a) * g(m) < 0:
            b = m
        else:
            a = m
    return (a + b) / 2
```

14. Écrire une fonction Python itérative  $u\_iter(n)$  qui retourne le terme  $u_n$ .

### Fonction itérative pour calculer $u_n$

```
def u_iter(n):
    u = 1
    for k in range(n):
        u = f(u)
    return u
```

15. Écrire une fonction Python récursive  $u\_recur(n)$  qui retourne le terme  $u_n$ .

### Fonction récursive pour calculer $u_n$

```
def u_recur(n):  
    if n == 0:  
        return 1  
    else:  
        return f(u_recur(n-1))
```

## Exercice 2 : le modèle de Verhulst

### Partie 1 : une fonction logistique

Soit  $a > 0$  et  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \frac{1}{ae^{-x} + 1}.$$

1. Justifier que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et calculer sa dérivée. En déduire le sens de variation de  $f$ .

La fonction  $x \mapsto ae^{-x} + 1$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et ne s'annule pas (car  $ae^{-x} > 0$ ), donc  $f : x \mapsto \frac{1}{ae^{-x} + 1}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ . On a pour  $x > 0$  :

$$f'(x) = \frac{ae^{-x}}{(ae^{-x} + 1)^2}.$$

Comme  $ae^{-x} > 0$ , on a  $f'(x) > 0$  pour tout  $x$ , donc  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

2. Déterminer les limites de  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$  puis en donner une interprétation graphique.

On a  $e^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} +\infty$ , donc  $ae^{-x} + 1 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$  et

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0.$$

On a  $e^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ , donc  $ae^{-x} + 1 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$  et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1.$$

La courbe représentative de  $f$  admet les asymptotes d'équation  $y = 0$  (en  $-\infty$ ) et  $y = 1$  (en  $+\infty$ ).

3. On souhaite calculer la valeur moyenne de  $f$  entre 0 et 1 :  $I = \int_0^1 f(x) dx$ .

(a) Déterminer des réels  $b$  et  $c$  tels que pour tout réel  $x$  strictement positif :

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{b}{x} + \frac{c}{x+1}.$$

On cherche  $b, c$  tels que pour tout  $x > 0$  :

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{b}{x} + \frac{c}{x+1} = \frac{b(x+1) + cx}{x(x+1)} = \frac{(b+c)x + b}{x(x+1)}.$$

Donc  $(b+c) = 0$  et  $b = 1$ , d'où  $b = 1, c = -1$ .

Ainsi, pour tout  $x > 0$  :

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}.$$

(b) Calculer  $I$ . On pourra effectuer le changement de variable  $t = ae^{-x}$ .

Avec  $t = ae^{-x}$ , on a  $dt = -ae^{-x}dx = -t dx$ , donc  $dx = -\frac{dt}{t}$ . Quand  $x = 0$ ,  $t = a$  ; quand  $x = 1$ ,  $t = \frac{a}{e}$ . Ainsi

$$I = \int_0^1 \frac{1}{ae^{-x} + 1} dx = \int_a^{a/e} \frac{1}{t+1} \left(-\frac{dt}{t}\right) = \int_{a/e}^a \frac{1}{t(t+1)} dt.$$

Or, d'après la décomposition précédente,  $\frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}$ , donc

$$I = [\ln t - \ln(t+1)]_{a/e}^a = \ln\left(\frac{a}{a+1}\right) - \ln\left(\frac{a}{a+e}\right) = \ln\left(\frac{a+e}{a+1}\right).$$

Donc  $I = \ln\left(\frac{a+e}{a+1}\right)$ .

## Partie 2 : l'équation de Verhulst

On considère l'équation différentielle

$$(E) : y' = y(1-y),$$

où la fonction inconnue  $y$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ , et vérifie, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$0 < y(x) < 1. \quad (\star)$$

Cette équation différentielle, appelée équation de Verhulst, est utilisée notamment en biologie pour modéliser l'évolution de certaines populations.

4. Soit  $y$  une fonction solution de  $(E)$  et vérifiant l'encadrement  $(\star)$ .

Déterminer le sens de variation de  $y$ .

Pour tout  $x$ ,  $0 < y(x) < 1$  donc  $y(x)(1-y(x)) > 0$ . Comme  $y' = y(1-y)$ , on a  $y'(x) > 0$  pour tout  $x$ , donc  $y$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

5. Soit  $y$  une fonction définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ , vérifiant l'encadrement  $(\star)$ .

On pose, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$z(x) = \frac{1}{y(x)}.$$

- (a) Démontrer que la fonction  $y$  est solution de l'équation  $(E)$  si, et seulement si, la fonction  $z$  est solution de l'équation différentielle

$$(E') : z' + z = 1.$$

Comme  $z = \frac{1}{y}$  et que  $y(x) \neq 0$  pour tout  $x$ ,  $z$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout  $x$  :

$$z'(x) = -\frac{y'(x)}{y(x)^2}.$$

Si  $y$  est solution de  $(E)$ , alors  $y' = y(1 - y)$  et donc

$$z' = -\frac{y'}{y^2} = -\frac{y(1-y)}{y^2} = -\frac{1}{y} + 1 = -z + 1,$$

soit  $z' + z = 1$  :  $z$  est solution de  $(E')$ .

Réciproquement, si  $z$  vérifie  $z' + z = 1$ , alors  $z' = 1 - z$ . Or  $z' = -\frac{y'}{y^2}$  et  $z = \frac{1}{y}$ , donc

$$-\frac{y'}{y^2} = 1 - \frac{1}{y} = \frac{y-1}{y} \Rightarrow -y' = y(y-1) \Rightarrow y' = y(1-y),$$

donc  $y$  est solution de  $(E)$ . Ainsi,  $y$  solution de  $(E) \iff z$  solution de  $(E')$ .

- (b) Résoudre l'équation  $(E')$ .

L'équation  $z' + z = 1$  est linéaire à coefficients constants du premier ordre. Une solution particulière constante est  $z_p = 1$ . La solution générale de l'homogène  $z' + z = 0$  est  $z_h : x \mapsto ae^{-x}$  où  $a \in \mathbb{R}$ .

Donc

$$z : x \mapsto 1 + ae^{-x} \quad (a \in \mathbb{R}).$$

- (c) En déduire les fonctions solutions de l'équation  $(E)$ .

On a  $y = \frac{1}{z}$ , donc

$$y(x) = \frac{1}{1 + ae^{-x}}.$$

Pour que  $0 < y(x) < 1$  pour tout  $x$ , il faut et il suffit que  $1 + ae^{-x} > 1$  pour tout  $x$ , donc  $a > 0$ . Ainsi :

$$\forall a > 0, \quad y(x) = \frac{1}{1 + ae^{-x}} \text{ est solution et vérifie } 0 < y < 1.$$

- (d) Déterminer la solution de  $(E)$  vérifiant la condition initiale  $y(0) = \frac{1}{2}$ .

$$y(0) = \frac{1}{2} \iff \frac{1}{1+a} = \frac{1}{2} \iff 1+a = 2 \iff a = 1.$$

Donc :

$$y : x \mapsto \frac{1}{1 + e^{-x}}.$$

### Exercice 3 : suite d'intégrales et limite d'une somme alternée

1. Montrer que  $I_n$  est bien défini pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . La fonction

$$t \longmapsto (\cos t)^n$$

est continue sur le segment  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  car  $\cos$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , et la puissance entière conserve la continuité. Donc l'intégrale

$$I_n = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n dt$$

existe. Ainsi,  $I_n$  est bien défini pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

2. Calculer  $I_0$ ,  $I_1$  et  $I_2$ .

On calcule :

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} 1 dt = \frac{\pi}{2}.$$

Ensuite,

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \cos t dt = [\sin t]_0^{\pi/2} = 1.$$

Enfin, en utilisant la formule

$$\cos^2 t = \frac{1 + \cos(2t)}{2},$$

on obtient

$$I_2 = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos(2t)) dt = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} + 0 \right) = \frac{\pi}{4}.$$

Donc

$$I_0 = \frac{\pi}{2}, \quad I_1 = 1, \quad I_2 = \frac{\pi}{4}.$$

3. (a) Étudier la monotonie de la suite  $(I_n)_{n \geq 0}$ .  
En déduire que la suite  $(I_n)_{n \geq 0}$  converge.

Pour tout  $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , on a

$$0 \leq \cos t \leq 1.$$

Donc, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$(\cos t)^{n+1} \leq (\cos t)^n.$$

En intégrant sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , on obtient

$$I_{n+1} \leq I_n.$$

La suite  $(I_n)$  est donc décroissante.

De plus, pour tout  $n$ ,

$$(\cos t)^n \geq 0 \quad \text{sur} \quad \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

donc

$$I_n \geq 0.$$

Ainsi,  $(I_n)$  est décroissante et minorée par 0.  
Par le théorème de la limite monotone, la suite  $(I_n)$  converge.

(b) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+2} = (n+1)(I_n - I_{n+2}).$$

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On écrit

$$I_{n+2} = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^{n+2} dt = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^{n+1} \cos t dt.$$

On effectue une intégration par parties avec

$$u(t) = (\cos t)^{n+1} \quad \text{et} \quad v'(t) = \cos t.$$

Alors

$$u'(t) = -(n+1) \sin t (\cos t)^n \quad \text{et} \quad v(t) = \sin t.$$

Ainsi,

$$I_{n+2} = [(\cos t)^{n+1} \sin t]_0^{\pi/2} + (n+1) \int_0^{\pi/2} \sin^2 t (\cos t)^n dt.$$

Le terme entre crochets est nul, car  $\sin 0 = 0$  et  $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ . Donc

$$I_{n+2} = (n+1) \int_0^{\pi/2} \sin^2 t (\cos t)^n dt.$$

Or

$$\sin^2 t = 1 - \cos^2 t,$$

donc

$$I_{n+2} = (n+1) \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 t) (\cos t)^n dt = (n+1) \int_0^{\pi/2} ((\cos t)^n - (\cos t)^{n+2}) dt.$$

Par conséquent,

$$I_{n+2} = (n+1)(I_n - I_{n+2}).$$

On obtient alors :

$$(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n.$$

On en déduit la relation de récurrence

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n.$$

(c) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad I_{2n+1} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}.$$

**Cas des indices pairs.** Pour  $n \geq 1$ ,

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} I_{2n-2} = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} I_{2n-4} = \dots = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} I_0.$$

Comme  $I_0 = \frac{\pi}{2}$ , on obtient

$$I_{2n} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \frac{\pi}{2}.$$

Or

$$2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n) = 2^n n!,$$

et

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) = \frac{(2n)!}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} = \frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

Donc

$$I_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2}.$$

**Cas des indices impairs.** Pour  $n \geq 1$ ,

$$I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} I_{2n-1} = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} I_{2n-3} = \cdots = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)} I_1.$$

Comme  $I_1 = 1$ , on a

$$I_{2n+1} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)}.$$

Or

$$3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1) = \frac{(2n+1)!}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}.$$

Ainsi

$$I_{2n+1} = \frac{2^n n!}{(2n+1)! / (2^n n!)} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Finalement,

$$\boxed{I_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{I_{2n+1} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}}.$$

4. (a) Rappeler un équivalent simple de  $x \mapsto \cos(x) - 1$  et  $u \mapsto \ln(1+u)$  au voisinage de 0.

Au voisinage de 0, on a les équivalents usuels :

$$\cos x - 1 \sim -\frac{x^2}{2} \quad \text{et} \quad \ln(1+u) \sim u.$$

- (b) Montrer que

$$n \ln(\cos(n^{-1/4})) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2} \sqrt{n}.$$

En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\cos(n^{-1/4}))^n$ .

Posons

$$x_n = n^{-1/4}.$$

Alors  $x_n \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

D'après l'équivalent précédent,

$$\cos(x_n) - 1 \sim -\frac{x_n^2}{2} = -\frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Comme  $\cos(x_n) \rightarrow 1$ , on peut écrire

$$\ln(\cos x_n) = \ln(1 + (\cos x_n - 1)).$$

Or  $\cos x_n - 1 \rightarrow 0$ , donc

$$\ln(\cos x_n) \sim \cos x_n - 1 \sim -\frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

En multipliant par  $n$ , on obtient

$$n \ln(\cos(n^{-1/4})) \sim -\frac{1}{2}\sqrt{n}.$$

Comme  $-\frac{1}{2}\sqrt{n} \rightarrow -\infty$ , on en déduit que

$$n \ln(\cos(n^{-1/4})) \rightarrow -\infty.$$

D'où, en revenant à l'écriture exponentielle,

$$(\cos(n^{-1/4}))^n = \exp(n \ln(\cos(n^{-1/4}))) \rightarrow 0.$$

Donc

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} (\cos(n^{-1/4}))^n = 0.}$$

(c) Montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\cos(n^{-2/3}))^n = 1.$$

Posons

$$y_n = n^{-2/3}.$$

Alors  $y_n \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ . Comme précédemment,

$$\cos(y_n) - 1 \sim -\frac{y_n^2}{2} = -\frac{1}{2}n^{-4/3}.$$

Donc

$$\ln(\cos(y_n)) = \ln(1 + (\cos(y_n) - 1)) \sim \cos(y_n) - 1 \sim -\frac{1}{2}n^{-4/3}.$$

En multipliant par  $n$ ,

$$n \ln(\cos(n^{-2/3})) \sim -\frac{1}{2}n^{-1/3} \rightarrow 0.$$

Par continuité de l'exponentielle,

$$(\cos(n^{-2/3}))^n = \exp(n \ln(\cos(n^{-2/3}))) \rightarrow e^0 = 1.$$

Ainsi,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} (\cos(n^{-2/3}))^n = 1.}$$

5. (a) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\int_0^{n^{-1/4}} (\cos t)^n dt \leq n^{-1/4}.$$

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Pour tout  $t \in [0, n^{-1/4}]$ , on a

$$0 \leq (\cos t)^n \leq 1.$$

En intégrant cette inégalité sur  $[0, n^{-1/4}]$ , on obtient

$$0 \leq \int_0^{n^{-1/4}} (\cos t)^n dt \leq \int_0^{n^{-1/4}} 1 dt = n^{-1/4}.$$

Donc

$$\int_0^{n^{-1/4}} (\cos t)^n dt \leq n^{-1/4}.$$

(b) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\int_{n^{-1/4}}^{\pi/2} (\cos t)^n dt \leq \frac{\pi}{2} (\cos(n^{-1/4}))^n.$$

La fonction  $t \mapsto (\cos t)^n$  est décroissante sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$ , car  $\cos y$  est décroissante et positive.

Ainsi, pour tout  $t \in [n^{-1/4}, \frac{\pi}{2}]$ ,

$$(\cos t)^n \leq (\cos(n^{-1/4}))^n.$$

On en déduit

$$\int_{n^{-1/4}}^{\pi/2} (\cos t)^n dt \leq \int_{n^{-1/4}}^{\pi/2} (\cos(n^{-1/4}))^n dt = \left(\frac{\pi}{2} - n^{-1/4}\right) (\cos(n^{-1/4}))^n.$$

Comme

$$\frac{\pi}{2} - n^{-1/4} \leq \frac{\pi}{2},$$

on obtient

$$\int_{n^{-1/4}}^{\pi/2} (\cos t)^n dt \leq \frac{\pi}{2} (\cos(n^{-1/4}))^n.$$

(c) En déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$ .

Pour tout  $n \geq 1$ , on découpe l'intégrale :

$$I_n = \int_0^{n^{-1/4}} (\cos t)^n dt + \int_{n^{-1/4}}^{\pi/2} (\cos t)^n dt.$$

D'après les deux questions précédentes,

$$0 \leq I_n \leq n^{-1/4} + \frac{\pi}{2} (\cos(n^{-1/4}))^n.$$

Or

$$n^{-1/4} \longrightarrow 0 \quad \text{et} \quad (\cos(n^{-1/4}))^n \longrightarrow 0$$

d'après la question 4.b. Par encadrement, on conclut que

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0.}$$

6. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$I_n \geq \int_0^{n^{-2/3}} (\cos t)^n dt \geq n^{-2/3} (\cos(n^{-2/3}))^n.$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a évidemment

$$I_n = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n dt \geq \int_0^{n^{-2/3}} (\cos t)^n dt,$$

car la fonction intégrée est positive.

Ensuite, la fonction  $t \mapsto (\cos t)^n$  est décroissante sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ . Donc, pour tout  $t \in [0, n^{-2/3}]$ ,

$$(\cos t)^n \geq (\cos(n^{-2/3}))^n.$$

En intégrant sur  $[0, n^{-2/3}]$ , on obtient

$$\int_0^{n^{-2/3}} (\cos t)^n dt \geq \int_0^{n^{-2/3}} (\cos(n^{-2/3}))^n dt = n^{-2/3} (\cos(n^{-2/3}))^n.$$

Ainsi,

$$\boxed{I_n \geq \int_0^{n^{-2/3}} (\cos t)^n dt \geq n^{-2/3} (\cos(n^{-2/3}))^n.}$$

7. (a) Montrer que pour tout réel  $t$  de  $] -\pi, \pi[$  :

$$\cos(t) + 1 = \frac{2}{1 + \tan^2\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

Pour tout  $t \in ] -\pi, \pi[$ , on sait que

$$1 + \tan^2\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)}$$

On a déduit que

$$\frac{2}{1 + \tan^2\left(\frac{t}{2}\right)} = 2 \cos^2\left(\frac{t}{2}\right)$$

Or,

$$\cos t = 2 \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) - 1 \quad \text{soit} \quad \cos(t) + 1 = 2 \cos^2\left(\frac{t}{2}\right)$$

Ainsi

$$\boxed{\cos(t) + 1 = \frac{2}{1 + \tan^2\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

(b) À l'aide du changement de variable  $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$ , montrer que :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1 + \cos(t)} = 1.$$

On effectue le changement de variable

$$u = \tan\left(\frac{t}{2}\right).$$

Alors

$$dt = \frac{2 du}{1 + u^2}.$$

D'après la question précédente,

$$1 + \cos t = \frac{2}{1 + u^2}.$$

Par conséquent,

$$\frac{dt}{1 + \cos t} = \frac{\frac{2 du}{1 + u^2}}{\frac{2}{1 + u^2}} = du.$$

Quand  $t = 0$ , on a  $u = 0$ , et quand  $t = \frac{\pi}{2}$ , on a

$$u = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

Ainsi,

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1 + \cos t} = \int_0^1 du = 1.$$

Donc

$$\boxed{\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1 + \cos(t)} = 1.}$$

(c) En permutant somme et intégrale, montrer que pour tout entier  $n$  :

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k I_k = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1 + \cos(t)} - \int_0^{\pi/2} \frac{(-\cos(t))^{n+1}}{1 + \cos(t)} dt.$$

On part de la définition de  $I_k$  :

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k I_k = \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_0^{\pi/2} (\cos t)^k dt.$$

Comme il s'agit d'une somme finie, on peut permuter somme et intégrale :

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k I_k = \int_0^{\pi/2} \sum_{k=0}^n (-\cos t)^k dt.$$

Or, pour tout  $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , on a  $\cos t \in [0, 1]$ , donc  $-\cos t \neq 1$ , et la somme géométrique donne

$$\sum_{k=0}^n (-\cos t)^k = \frac{1 - (-\cos t)^{n+1}}{1 + \cos t}.$$

Ainsi,

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k I_k = \int_0^{\pi/2} \frac{1 - (-\cos t)^{n+1}}{1 + \cos t} dt.$$

En séparant les intégrales,

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k I_k = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1 + \cos(t)} - \int_0^{\pi/2} \frac{(-\cos(t))^{n+1}}{1 + \cos(t)} dt.$$

C'est bien l'égalité demandée.

(d) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| \int_0^{\pi/2} \frac{(-\cos(t))^{n+1}}{1 + \cos(t)} dt \right| \leq I_{n+1}.$$

Pour tout  $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , on a  $1 + \cos t \geq 1$ , donc

$$0 \leq \frac{1}{1 + \cos t} \leq 1.$$

Ainsi,

$$\left| \frac{(-\cos t)^{n+1}}{1 + \cos t} \right| = \frac{(\cos t)^{n+1}}{1 + \cos t} \leq (\cos t)^{n+1}.$$

En intégrant sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , on obtient

$$\left| \int_0^{\pi/2} \frac{(-\cos t)^{n+1}}{1 + \cos t} dt \right| \leq \int_0^{\pi/2} (\cos t)^{n+1} dt = I_{n+1}.$$

Donc

$$\left| \int_0^{\pi/2} \frac{(-\cos(t))^{n+1}}{1 + \cos(t)} dt \right| \leq I_{n+1}.$$

(e) En déduire que la suite  $\left( \sum_{k=0}^n (-1)^k I_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$  converge et déterminer sa limite.

D'après la question 5.c, on sait que

$$I_{n+1} \longrightarrow 0.$$

Or, d'après les deux questions précédentes,

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k I_k = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1 + \cos(t)} - \int_0^{\pi/2} \frac{(-\cos(t))^{n+1}}{1 + \cos(t)} dt$$

et

$$\left| \int_0^{\pi/2} \frac{(-\cos(t))^{n+1}}{1 + \cos(t)} dt \right| \leq I_{n+1} \longrightarrow 0.$$

Le deuxième terme tend donc vers 0.

Par suite,

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k I_k \longrightarrow \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1 + \cos t}.$$

D'après la question 7.b,

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1 + \cos t} = 1.$$

On conclut que la suite des sommes alternées converge, et que sa limite vaut

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k I_k = 1.$$

## Exercice 4 : probabilités discrètes

1. On lance  $n$  fois de suite la pièce. On appelle  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de PILE obtenus au cours de ces  $n$  lancers.

(a) Déterminer la loi de  $X$  (une réponse argumentée est attendue).

Préciser l'ensemble  $X(\Omega)$  ainsi que la valeur de  $P(X = k)$  lorsque  $k \in X(\Omega)$ .

Chaque lancer est un succès « PILE » avec probabilité  $\frac{2}{3}$ , indépendamment des autres. Ainsi,  $X$  compte le nombre de succès sur  $n$  lancers indépendants :  $X$  suit une loi binomiale de paramètres  $(n, \frac{2}{3})$ .

On a  $X(\Omega) = \{0, 1, \dots, n\}$  et, pour tout  $k \in \{0, \dots, n\}$ ,

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{2}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k}.$$

(b) Donner la valeur de l'espérance  $E(X)$  et de la variance  $V(X)$  de la variable aléatoire  $X$ .

Si  $X \sim \mathcal{B}(n, \frac{2}{3})$ , alors

$$E(X) = n \cdot \frac{2}{3} = \frac{2n}{3} \quad \text{et} \quad V(X) = n \cdot \frac{2}{3} \left(1 - \frac{2}{3}\right) = n \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2n}{9}.$$

2. Calculer  $v_2$  et  $v_3$ . Vérifier que :

$$v_3 = \frac{1}{3}v_2 + \frac{2}{9}v_1.$$

Rappelons que l'on a convenu que  $v_1 = 0$ .

On a  $v_2 = P(\text{PILE au 1er et PILE au 2e}) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$ .

Pour  $v_3$ , il faut que le premier double PILE apparaisse au rang 3 : cela impose

lancer 2 = PILE, lancer 3 = PILE, et (1,2) n'est pas un double PILE, donc lancer 1 = FACE.

Ainsi

$$v_3 = P(FPP) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{27}.$$

Enfin, comme  $v_1 = 0$ ,

$$\frac{1}{3}v_2 + \frac{2}{9}v_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} + \frac{2}{9} \cdot 0 = \frac{4}{27} = v_3,$$

ce qui vérifie la relation.

3. Soit  $n \geq 2$ . On suppose qu'au premier lancer, PILE est obtenu et on souhaite la réalisation de l'événement  $D_{n+2}$ . Quel est alors le résultat du second lancer ? À l'issue de ces deux premiers lancers, combien de lancers reste-t-il à effectuer pour que  $D_{n+2}$  puisse se réaliser ?

En déduire que :

$$P_{\overline{F_1}}(D_{n+2}) = \frac{1}{3} v_n.$$

Sachant que le premier lancer est PILE, pour que le premier double PILE n'apparaisse qu'au rang  $n + 2$ , il ne faut pas déjà un double PILE au rang 2. Donc le second lancer doit être **FACE**.

Après les deux premiers lancers (PILE puis FACE), il reste  $n$  lancers (du rang 3 au rang  $n + 2$ ). La condition « premier double PILE au rang  $n + 2$  » se reformule alors comme : « premier double PILE au rang  $n$  » dans la suite des  $n$  lancers restants (mêmes probabilités, **indépendance** des lancers).

Ainsi,

$$P_{\overline{F_1}}(D_{n+2}) = P(2e\ lancer = \text{FACE} \mid 1er = \text{PILE}) \cdot v_n = \frac{1}{3} v_n,$$

soit

$$P_{\overline{F_1}}(D_{n+2}) = \frac{1}{3} v_n.$$

4. Pour  $n \geq 2$ , justifier que :

$$P_{F_1}(D_{n+2}) = v_{n+1}.$$

Sachant l'événement  $F_1$  (premier lancer = FACE), l'événement  $D_{n+2}$  signifie : « le premier double PILE apparaît au rang  $n + 2$  ». Comme le premier lancer est FACE, cela équivaut à dire que, dans la suite des lancers à partir du rang 2, le premier double PILE apparaît au rang  $n + 1$  (on a simplement décalé le comptage d'une unité).

Par indépendance des lancers,

$$P_{F_1}(D_{n+2}) = v_{n+1}.$$

5. À l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que :

$$\forall n \geq 2, \quad v_{n+2} = \frac{1}{3}v_{n+1} + \frac{2}{9}v_n.$$

En outre, d'après la question 2), cette formule est vraie pour  $n = 1$ .

Par la formule des probabilités totales sur le système complet d'événements  $(F_1, \overline{F_1})$  :

$$v_{n+2} = P(D_{n+2}) = P(F_1) P_{F_1}(D_{n+2}) + P(\overline{F_1}) P_{\overline{F_1}}(D_{n+2}).$$

Or  $P(F_1) = \frac{1}{3}$ ,  $P(\overline{F_1}) = \frac{2}{3}$ , et d'après les questions 3) et 4),

$$P_{F_1}(D_{n+2}) = v_{n+1}, \quad P_{\overline{F_1}}(D_{n+2}) = \frac{1}{3}v_n.$$

Donc

$$v_{n+2} = \frac{1}{3}v_{n+1} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}v_n = \frac{1}{3}v_{n+1} + \frac{2}{9}v_n,$$

soit

$$\forall n \geq 2, v_{n+2} = \frac{1}{3}v_{n+1} + \frac{2}{9}v_n.$$

6. Démontrer que :

$$\forall n \geq 1, P(D_n) = \frac{4}{9} \left[ \left( \frac{2}{3} \right)^{n-1} - \left( -\frac{1}{3} \right)^{n-1} \right].$$

On a la récurrence (valable dès  $n = 1$ ) :

$$v_{n+2} = \frac{1}{3}v_{n+1} + \frac{2}{9}v_n, \quad v_1 = 0, v_2 = \frac{4}{9}.$$

On résout la relation linéaire d'ordre 2. L'équation caractéristique est

$$r^2 = \frac{1}{3}r + \frac{2}{9} \iff 9r^2 - 3r - 2 = 0 \iff (3r - 2)(3r + 1) = 0.$$

Les racines sont  $r_1 = \frac{2}{3}$  et  $r_2 = -\frac{1}{3}$ , donc

$$v_n = A \left( \frac{2}{3} \right)^{n-1} + B \left( -\frac{1}{3} \right)^{n-1}.$$

Avec  $v_1 = 0$ , on obtient  $A + B = 0$ , donc  $B = -A$ . Avec  $v_2 = \frac{4}{9}$ ,

$$\frac{4}{9} = v_2 = A \left( \frac{2}{3} \right) + (-A) \left( -\frac{1}{3} \right) = A \left( \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \right) = A.$$

Donc  $A = \frac{4}{9}$  et

$$\forall n \geq 1, v_n = \frac{4}{9} \left[ \left( \frac{2}{3} \right)^{n-1} - \left( -\frac{1}{3} \right)^{n-1} \right].$$

7. Pour tout entier  $n \geq 2$ , on note  $E_n$  l'événement « il n'y a pas eu deux PILE consécutifs au cours des  $n$  premiers lancers ».

Exprimer l'événement  $E_n$  en fonction des événements  $D_2, \dots, D_n$ . En déduire que :

$$P(E_n) = 1 - \sum_{k=2}^n v_k.$$

Les événements  $D_2, \dots, D_n$  sont incompatibles deux à deux (le « premier double PILE » ne peut pas être à deux rangs différents). L'événement « il y a eu au moins un double PILE dans les  $n$  premiers lancers » équivaut à  $\bigcup_{k=2}^n D_k$ .

Donc

$$E_n = \overline{\bigcup_{k=2}^n D_k}.$$

Par conséquent, comme la réunion est disjointe,

$$P(E_n) = 1 - \sum_{k=2}^n P(D_k) = 1 - \sum_{k=2}^n v_k,$$

soit

$$P(E_n) = 1 - \sum_{k=2}^n v_k.$$

8. Calculer la limite de  $P(E_n)$  lorsque  $n$  tend vers l'infini.

Avec l'expression de  $v_k$  (question 6), en posant  $m = k - 1$  :

$$\sum_{k=2}^n v_k = \frac{4}{9} \left( \sum_{m=1}^{n-1} \left(\frac{2}{3}\right)^m - \sum_{m=1}^{n-1} \left(-\frac{1}{3}\right)^m \right).$$

Or

$$\sum_{m=1}^{n-1} \left(\frac{2}{3}\right)^m = \frac{\frac{2}{3}(1 - (\frac{2}{3})^n)}{1 - \frac{2}{3}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = 2 \text{ car } \left|\frac{2}{3}\right| < 1.$$

et

$$\sum_{m=1}^{n-1} \left(-\frac{1}{3}\right)^m = \frac{-\frac{1}{3}(1 - (-\frac{1}{3})^n)}{1 + \frac{1}{3}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}} = -\frac{1}{4} \text{ car } \left|-\frac{1}{3}\right| < 1.$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=2}^n v_k = \frac{4}{9} \left( 2 - \left(-\frac{1}{4}\right) \right) = \frac{4}{9} \cdot \frac{9}{4} = 1.$$

Ainsi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(E_n) = 1 - 1 = 0.$$