DEVOIR MAISON N°12
A RENDRE POUR LE MERCREDI 6 MAI 2026

Problème

Les trois parties de ce problème sont indépendantes, l'objectif étant de déterminer par trois méthodes la matrice A^n, pour n entier naturel, où

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad , \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Partie A – Via une récurrence

Soit $E = \{aA + bI,\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$.

1. Prouver que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. (a) Prouver que la famille $\mathcal{B} = (A, I)$ est une base de E.
   (b) Prouver que $A^2 \in E$ et déterminer ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.
3. Prouver que pour tout entier naturel n, il existe deux réels a_n et b_n tel que $A^n = a_n A + b_n I$.
4. En reconnaissant a_{n+2}, déterminer a_n puis b_n en fonction de n, pour tout entier n.
5. Expliciter la matrice A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Partie B – Via une célèbre formule

6. Exprimer N^2 en fonction de N et en déduire N^n en fonction de N et de n pour tout entier $n \geq 1$. Qu'en est-il pour $n = 0$?
7. Montrer que A est une combinaison linéaire des matrices I et N.
8. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, A^n en fonction de N et de I puis expliciter cette matrice.

Partie C –Via un changement de base

Considérons les vecteurs de $\mathbb{R}^3$:

$$u = (-1, 0, 1), \qquad v = (-3, 2, 0), \qquad w = (0, 1, 0),$$

et la matrice

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

9. Montrer que la famille $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
10. (a) Montrer que P est inversible et déterminer sa matrice inverse.
    (b) Déterminer la matrice $D = P^{-1}AP$.
    (c) En déduire A^n en fonction de D^n puis donner l'expression de A^n en fonction de n.