

---

DEVOIR MAISON N°13  
A RENDRE POUR LE MERCREDI 6 MAI 2026

---

## Exercice 1 : une suite de polynômes

On considère la suite  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  de polynômes à coefficients réels définie par :

$$\begin{cases} P_0 = 2 \\ P_1 = X \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n \end{cases}$$

- Déterminer les polynômes  $P_2, P_3, P_4$  et  $P_5$ . Donner également la forme factorisée de  $P_2, P_3$  et  $P_4$ .
- Conjecturer le degré et le coefficient dominant de  $P_n$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . Démontrer ce résultat.
- Soit  $\theta \in \mathbb{R}$  fixé. Montrer par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_n(2 \cos \theta) = 2 \cos(n\theta)$ .
- Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que, pour tout  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ ,  $2 \cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)$  est racine de  $P_n$ .
- Pour tout  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ , on pose  $x_k = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}$ . Montrer que les  $x_k$  ainsi définis appartiennent à  $[0, \pi]$  et qu'ils vérifient :  $\forall k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket, \quad x_k < x_{k+1}$ .
- En déduire que pour  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ , les nombres  $2 \cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)$  sont deux à deux distincts.
- En déduire une factorisation de  $P_n$  en produit de polynômes de degré 1.
- Factorisation de  $P_5$ .**
  - On pose  $Q = X^2 - 5X + 5$ . Factoriser  $Q$ . En déduire une factorisation de  $P_5$  en produit de polynômes de degré 1 (on pourra commencer par exprimer  $P_5$  à l'aide du polynôme  $Q$ ).
  - En comparant les résultats des questions 7) et 8.a), déterminer les valeurs exactes de  $\cos \frac{\pi}{10}$  et  $\cos \frac{3\pi}{10}$ .

## Exercice 2 : une somme de Riemann

Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue.

- Montrer que pour tout réel  $x \geq -\frac{1}{2}$ ,  $x - x^2 \leq \ln(1+x) \leq x$ .
- Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right) = \exp\left(\int_0^1 f(t) dt\right)$ .
- En déduire la valeur de  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \left(\frac{n^2 + k}{n^2}\right)$ .