# 24

# Applications linéaires et matrices

Table des matières



Dans tout le chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

## 24.1 Applications linéaires

### 24.1.1 Définition et premières propriétés

**Définition 1: Applications linéaires**

Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels .
Soit $f : E \longrightarrow F$.
On dit que $f$ est linéaire si pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, pour tout $(x, y) \in E^2$,

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y).$$

On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de $E$ dans $F$.
Dans le cas où $E = F$, on dit qu'une application linéaire $f : E \longrightarrow E$ est un endomorphisme et on note $\mathcal{L}(E)$ au lieu de $\mathcal{L}(E, E)$ l'espace des endomorphismes de $E$.
Une application linéaire à valeurs dans $\mathbb{K}$ est appelée forme linéaire.

**Remarque 1.** • Si $f : E \longrightarrow F$ est linéaire, nécessairement $f(0_E) = 0_F$.
En effet, $f(0_E) = f(0 \times 0_E) = 0 \times f(0_E) = 0_F$.
• Pour tout $(x, y) \in E^2, f(x + y) = f(x) + f(y)$. En effet,

$$f(x + y) = f(1 \cdot x + 1 \cdot y) = 1 \cdot f(x) + 1 \cdot f(y) = f(x) + f(y).$$

• Pour tout $x \in E$, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}, f(\lambda x) = \lambda f(x)$.
En effet,

$$f(\lambda \cdot x) = f(\lambda \cdot x + 1 \times \cdot 0_E) = \lambda \cdot f(x) + 1 \cdot f(0_E) = \lambda f(x) + 0_F = \lambda f(x).$$

• Par récurrence, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$, pour tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$,

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k).$$

• Si $E$ et $F$ sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $\mathcal{L}(E, F)$ n'est jamais vide. En effet, l'application $\begin{array}{rcl} f : E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & 0_F \end{array}$ est toujours définie et est linéaire. Cette application est appelée l'application nulle, notée $0_{\mathcal{L}(E,F)}$.

• Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. L'application $\begin{array}{rcl} \mathrm{Id}_E : E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array}$ est un endomorphisme de $E$ appelé l'application identité de $E$.

**Exemple 1.** • $\mathcal{L}(\mathbb{K}, \mathbb{K}) = \{x \longrightarrow ax, a \in \mathbb{K}\}$.
En effet, soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$. Pour tout $x \in \mathbb{K}, f(x) = f(x \cdot 1) = xf(1) = ax$ en notant $a = f(1)$. On a donc bien l'inclusion $\mathcal{L}(\mathbb{K}, \mathbb{K}) \subset \{x \longrightarrow ax, a \in \mathbb{K}\}$.
Réciproquement, soit $a \in \mathbb{K}$. Soit $f : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ définie pour tout $x \in \mathbb{K}$ par $f(x) = ax$. (Ceci implique notamment que $f(1) = a$.)
Montrons que $f$ est une application linéaire. Soient $(x, y) \in \mathbb{K}^2$, soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.
Alors $f(\lambda x + \mu y) = a(\lambda x + \mu y) = \lambda ax + \mu ay = \lambda f(x) + \mu f(y)$, ce qui prouve la linéarité de $f$ et l'inclusion $\{x \longrightarrow ax, a \in \mathbb{K}\} \subset \mathcal{L}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$, d'où l'égalité $\mathcal{L}(\mathbb{K}, \mathbb{K}) = \{x \longrightarrow ax, a \in \mathbb{K}\}$.
Par exemple, l'application $f : x \longmapsto x^2$ définie sur $\mathbb{R}$ n'est pas linéaire car

$$f(1 + 2) = f(3) = 9 \neq f(1) + f(2) = 1 + 4 = 5.$$

De même, l'application $g : (x, y) \longmapsto xy$ définie sur $\mathbb{R}^2$ n'est pas linéaire car

$$f(2(1, 1)) = f(2, 2) = 4 \neq 2f(1, 1) = 2.$$

• Soit $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \longmapsto & (y, x - 2y, 3x + 2y) \end{array}$.
L'application $f$ est linéaire. En effet, soient $((x, y), (x', y')) \in (\mathbb{R}^2)^2$, soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, alors

$$\begin{array}{rcl} f(\lambda(x, y) + \mu(x', y')) & = & f(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y') \\ & = & (\lambda y + \mu y', \lambda x + \mu x' - 2\lambda y - 2\mu y', 3\lambda x + 3\mu x' + 2\lambda y + 2\mu y') \\ & = & \lambda(y, x - 2y, 3x + 2y) + \mu(y', x' - 2y', 3x' + 2y') \\ & = & \lambda f(x, y) + \mu f(x', y'). \end{array}$$

donc $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$.
• L'application $\begin{array}{rcl} \varphi : \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & f' \end{array}$ est linéaire car pour tout $(f, g) \in \left(\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})\right)^2$, pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,

$$\varphi(\lambda f + \mu g) = (\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g' = \lambda\varphi(f) + \mu\varphi(g)$$

donc la dérivation est une application linéaire.

Il en va de même de l'application $\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ & P & \longmapsto & P' \end{array}$.

• Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, avec $a \leqslant b$.

L'application $\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \longmapsto & \displaystyle\int_a^b f(t)dt \end{array}$ est linéaire car pour tout $(f,g) \in \left(\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})\right)^2$, pour tout $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$,

$$\varphi(\lambda f+\mu g) = \int_a^b (\lambda f+\mu g)(t)dt = \int_a^b (\lambda f(t)+\mu g(t))dt = \lambda \int_a^b f(t)dt+\mu \int_a^b g(t)dt = \lambda\varphi(f)+\mu\varphi(g)$$

donc calculer l'intégrale sur un segment d'une fonction continue est une application linéaire.

### 24.1.2 Opérations sur les applications linéaires

**Définition 2: Opérations sur les applications linéaires**

Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.
   On définit $\lambda \cdot f \in \mathcal{L}(E,F)$ par
   $$\forall x \in E, (\lambda \cdot f)(x) = \lambda f(x).$$
2. Soient $(f,g) \in \mathcal{L}(E,F)^2$.
   On définit $f+g \in \mathcal{L}(E,F)$ par
   $$\forall x \in E, (f+g)(x) = f(x)+g(x).$$

**Proposition 1: Structure d'espace vectoriel de $\mathcal{L}(E,F)$**

Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
Pour tout $(f,g) \in \mathcal{L}(E,F)^2$, pour tout $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, \lambda f+\mu g \in \mathcal{L}(E,F)$.
Ceci assure que $\mathcal{L}(E,F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

**Démonstration.** Soient $(f,g) \in \mathcal{L}(E,F)^2$,, soient $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$.
Soient $(x,y) \in E^2$ et $(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2$. Par linéarité de $f$ et $g$, on a

$$\begin{aligned} (\lambda f+\mu g)(\alpha x+\beta y) &= \lambda f(\alpha x+\beta y)+\mu g(\alpha x+\beta y) \\ &= \lambda\alpha f(x)+\lambda\beta f(y)+\mu\alpha g(x)+\mu\beta g(y) \\ &= \alpha(\lambda f(x)+\mu g(x))+\beta(\lambda f(y)+\mu g(y)) \\ &= \alpha(\lambda f+\mu g)(x)+\beta(\lambda f+\mu g)(y), \end{aligned}$$

ce qui prouve que l'application $\lambda f+\mu g$ est linéaire. ∎

**Remarque 2.** Avec ces définitions, tous les axiomes suivants sont facilement vérifiés : pour tout $(f,g,h) \in \mathcal{L}(E,F)^3$, pour tout $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$,

$$f+g = g+f; \quad f+(g+h) = (f+g)+h; \quad f+(-f) = 0_{\mathcal{L}(E,F)}; \quad 1 \cdot f = f;$$

$$\lambda \cdot (f+g) = \lambda \cdot f+\lambda \cdot g; \quad (\lambda+\mu) \cdot f = \lambda \cdot f+\mu \cdot f; \quad \lambda \cdot (\mu \cdot f) = (\lambda\mu) \cdot f.$$

**Proposition 2: Composition d'applications linéaires**

Soient $E, F$ et $G$ trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$.
Alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$.
Autrement dit, la composée de deux applications linéaires est une application linéaire.

**Démonstration.** Par définition, $g \circ f : E \longrightarrow G$. Montrons que $g \circ f$ est linéaire.
Soient $(x, y) \in E^2$, soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. On a alors

$$\begin{aligned}
(g \circ f)(\lambda x + \mu y) &= g(f(\lambda x + \mu y)) \\
&= g(\lambda f(x) + \mu f(y)) \quad \text{par linéarité de } f \\
&= \lambda g(f(x)) + \mu g(f(y)) \quad \text{par linéarité de } g \\
&= \lambda (g \circ f)(x) + \mu (g \circ f)(y),
\end{aligned}$$

ce qui prouve que l'application $g \circ f$ est linéaire. ■

**Remarque 3.** Soit $f$ un endomorphisme de $E$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}, f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}} \in \mathcal{L}(E)$.

**Définition 3: Isomorphisme**

Soient $E$ et $F$ deux $K$-espaces vectoriels. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
Si $f$ est une application bijective, on dit que $f$ est un isomorphisme.
Si $F = E$, on dit que $f$ est un automorphisme.

**Remarque 4.** Un automorphisme est donc un endomorphisme bijectif.

**Proposition 3: Bijection réciproque d'un isomorphisme**

Soient $E$ et $F$ deux $K$-espaces vectoriels. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ un isomorphisme de $E$ vers $F$.
Soit $f^{-1} : F \longrightarrow E$ la bijection réciproque de $f$.
Alors $f^{-1}$ est une application linéaire, i.e. $f^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$.

**Démonstration.** Montrons que $f^{-1}$ est linéaire.
Soient $(x, y) \in F^2$, soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Puisque $f$ est bijective, il existe un unique couple $(a, b) \in E^2$ tels que $f(a) = x$ et $f(b) = y$, i.e. $a = f^{-1}(x)$ et $b = f^{-1}(y)$. On a alors

$$\begin{aligned}
f^{-1}(\lambda x + \mu y) &= f^{-1}(\lambda f(a) + \mu f(b)) \\
&= f^{-1}(f(\lambda a + \mu b)) \quad \text{par linéarité de } f \\
&= \lambda a + \mu b \quad \text{car } f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E \\
&= \lambda f^{-1}(x) + \mu f^{-1}(y),
\end{aligned}$$

ce qui prouve la linéarité de $f^{-1}$. ■

**Remarque 5.** La bijection réciproque d'un isomorphisme est donc elle-même un isomorphisme.
Si $F = E$, la bijection réciproque d'un automorphisme est un automorphisme.

**Exemple 2.** • Soit $a \in \mathbb{K}$. Soit $f : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ définie pour tout $x \in \mathbb{K}$ par $f(x) = ax$.
Alors $f$ est un automorphisme si et seulement si $a \neq 0$ et dans ce cas, pour tout $x \in \mathbb{K}, f^{-1}(x) = \dfrac{x}{a}$.

• Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = (ax+by, cx+dy)$ où $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$.

L'application linéaire $f$ est un automorphisme si et seulement si pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, il existe un unique vecteur $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x,y) = (u,v)$ si et seulement si le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} ax+by & = & u \\ cx+dy & = & v \end{array}\right.$$

admet une unique solution, ce qui équivaut à dire que la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible et dans ce cas $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$.

Par exemple, si $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est définie pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = (2x-y, -x+y)$, la matrice $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible d'inverse $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ donc $f$ est un automorphisme et on a les équivalences :

$$(x,y) = f^{-1}(u,v) \Leftrightarrow f(x,y) = (u,v) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

donc $f^{-1}$ est l'application linéaire définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f^{-1}(u,v) = (u+v, u+2v)$.

On peut effectivement vérifier que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f^{-1}(f(x,y)) = f^{-1}(2x-y, -x+y) = (2x-y-x+y, 2x-y-2x+2y) = (x,y)$$

et pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(f^{-1}(u,v)) = f(u+v, u+2v) = (2u+2v-u-2v, -u-v+u+2v) = (u,v).$$

• L'application linéaire $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (x,y) & \longmapsto & x+iy \end{array}$ est un isomorphisme de bijection réciproque $\begin{array}{rcl} f^{-1} : \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ x+iy & \longmapsto & (x,y) \end{array}$.

### 24.1.3 Noyau et image d'une application linéaire

**Définition 4: Noyau et image d'une application linéaire**

Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.
On note $\ker(f) = \{x \in E | f(x) = 0_F\}$ le noyau de $f$ et $\mathrm{Im}(f) = f(E)$ son image.

**Remarque 6.** L'application linéaire $f$ est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = F$.

**Proposition 4**

Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.
Alors $\ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de $E$ et $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $F$.

**Démonstration.** • Montrons que $\ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de $E$.
Tout d'abord, $0_E \in \ker(f)$ puisque $f(0_E) = 0_F$ par linéarité de $f$.
Soient $(x,y) \in (\ker(f))^2$, soient $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$. Par linéarité de $f$, on a

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y).$$

Or, $f(x) = f(y) = 0_F$ puisque $(x, y) \in (\ker(f))^2$, donc $f(\lambda x + \mu y) = 0_F$, ce qui prouve que $\lambda x + \mu y \in \ker(f)$.

On a donc bien montré que $\ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

• Montrons que $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $F$.

Tout d'abord, $0_F \in \mathrm{Im}(f)$ car $0_F = f(0_E)$.

Soient $(x, y) \in (\mathrm{Im}(f))^2$. Il existe alors $(a, b) \in E^2$ tels que $x = f(a)$ et $y = f(b)$.

Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. On a alors par linéarité de $f$ :

$$\lambda x + \mu y = \lambda f(a) + \mu f(b) = f(\lambda a + \mu b) \in \mathrm{Im}(f)$$

car $\lambda a + \mu b \in E$.

On a donc bien montré que $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $F$. ■

**Remarque 7.** Plus généralement, on peut montrer que pour tout sous-espace vectoriel $E'$ de $E$, alors $f(E')$ est un sous-espace vectoriel de $F$.

En effet :

• $0_E \in E'$ car $E'$ est un sous-espace vectoriel de $E$ donc $g(0_E) = 0_F \in f(E')$.

• Soient $(x, y) \in (f(E'))^2$, soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Montrons que $\lambda x + \mu y \in f(E')$.

Puisque $(x, y) \in (f(E'))^2$, il existe $(a, b) \in (E')^2$ tels que $x = f(a)$ et $y = f(b)$ donc par linéarité de $f$ :

$$\lambda x + \mu y = \lambda f(a) + \mu f(b) = f(\lambda a + \mu b).$$

Puisque $(a, b) \in (E')^2$ et $E'$ est un sous-espace vectoriel de $E$, donc $\lambda + \mu b \in E'$, d'où $f(\lambda a + \mu b) \in f(E')$. Ainsi, $\lambda x + \mu y \in f(E')$ donc $f(E')$ est stable par combinaisons linéaires, et finalement est un sous-espace-vectoriel de $F$.

**Proposition 5: Caractérisation des applications linéaires injectives**

Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
Alors $f$ est injective si et seulement si $\ker(f) = \{0_E\}$.

**Démonstration.** • Supposons que $f$ est injective. Tout d'abord, on a toujours $f(0_E) = 0_F$ donc $0_E \in \ker(f)$, d'où l'inclusion $\{0_E\} \subset \ker(f)$.

Montrons l'inclusion réciproque.

Soit $x \in \ker(f)$. On a $f(x) = 0_F = f(0_E)$ donc par injectivité de $f$, il en résulte que $x = 0_E$ d'où l'inclusion $\ker(f) \subset \{0_E\}$ et finalement l'égalité $\ker(f) = \{0_E\}$.

• Supposons que $\ker(f) = \{0_E\}$. Montrons que $f$ est injective.

Soient $(x, y) \in E^2$ tels que $f(x) = f(y)$.

Par linéarité de $f$, on a alors $0 = f(x) - f(y) = f(x - y)$ donc $x - y \in \ker(f) = \{0_E\}$ d'où $x - y = 0_E$, i.e. $x = y$, ce qui prouve l'injectivité de $f$. ■

**Exemple 3.** • Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \longmapsto & (x - y, x - 2y, x + y). \end{array}$

On a

$$(x, y) \in \ker(f) \Leftrightarrow (x-y, x-2y, x+y) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x - y & = & 0 \\ x - 2y & = & 0 \\ x + y & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & y \\ -y & = & 0 \\ 2y & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & 0 \end{array} \right.$$

donc $\ker(f) = \{(0, 0)\}$, ce qui prouve que l'application linéaire $f$ est injective.

De même, $\mathrm{Im}(f) = \{(x - y, x - 2y, x + y), (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \{x(1, 1, 1) + y(-1, -2, 1), (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}\{(1, 1, 1), (-1, -2, 1)\}$.

Les vecteurs $(1,1,1)$ et $(-1,-2,1)$ sont libres donc forment une base de $\text{Vect}\{(1,1,1),(-1,-2,1)\} = \text{Im}(f)$. Ainsi, $\dim(\text{Im}(f)) = 2$ donc $\text{Im}(f) \neq \mathbb{R}^3$, ce qui prouve que l'application linéaire $f$ n'est pas surjective.

On remarque que $\dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = 0 + 2 = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$, égalité que nous généraliserons plus tard grâce au théorème du rang.

• Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (y-z, x-2y+z). \end{array}$

On a

$$(x,y,z) \in \ker(f) \Leftrightarrow (y-z, x-2y+z) = (0,0) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} y-z & = & 0 \\ x-2y+z & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & z \\ x-z & = & 0 \end{array} \right.$$

donc $(x,y,z) \in \ker(f) \Leftrightarrow x = y = z \Leftrightarrow (x,y,z) = (x,x,x) = x(1,1,1)$.

Ainsi $\ker(f) = \text{Vect}(1,1,1) \neq \{(0,0,0)\}$ donc l'application linéaire $f$ n'est pas injective.

De même, $\text{Im}(f) = \left\{(y-z, x-2y+z), (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\right\} = \left\{x(0,1) + y(1,-2) + z(-1,1), (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\right\} = \text{Vect}\left\{(0,1),(1,-2),(-1,1)\right\}$.

Les vecteurs $(0,1)$ et $(-1,1)$ sont deux vecteurs libres de $\mathbb{R}^2$, qui est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2. Donc $\text{Vect}\left\{(0,1)(-1,1)\right\} = \mathbb{R}^2$.

Or, $\mathbb{R}^2 = \text{Vect}\left\{(0,1)(-1,1)\right\} \subset \text{Vect}\left\{(0,1),(1,-2),(-1,1)\right\} = \text{Im}(f) \subset \mathbb{R}^2$ donc $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^2$, ce qui prouve que l'application linéaire $f$ est surjective.

On remarque que $\dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = 1 + 2 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$, égalité que nous généraliserons plus tard grâce au théorème du rang.

### 24.1.4 Image d'une base par une application linéaire

**Proposition 6**

Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On suppose que $E$ est de dimension finie et admet une famille génératrice $(e_1, \ldots, e_n)$.
Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.
Alors

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}\{f(e_1), \ldots, f(e_n)\}.$$

**Démonstration.** Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $f(e_k) \in \text{Im}(f)$ donc on a clairement

$$\text{Vect}\{f(e_1), \ldots, f(e_n)\} \subset \text{Im}(f).$$

Montrons l'inclusion réciproque. Soit $y \in \text{Im}(f)$. Par définition, il existe $x \in E, f(x) = y$.

Puisque la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est une famille génératrice de $E$, il existe des scalaires $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$.

Ainsi, $y = f(x) = f\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k\right) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(e_k)$ par linéarité de $f$ donc $y \in \text{Vect}\{f(e_1), \ldots, f(e_n)\}$ d'où l'inclusion $\text{Im}(f) \subset \text{Vect}\{f(e_1), \ldots, f(e_n)\}$.

Finalement, on a bien l'égalité $\text{Im}(f) = \text{Vect}\{f(e_1), \ldots, f(e_n)\}$. ■

**Exemple 4.** • Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x-y, x-2y, x+y). \end{array}$

Considérons $(e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ où $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$.

On a $f(e_1) = (1,1,1), f(e_2) = (-1,-2,1)$ et on a vu dans l'exemple précédent que $\text{Im}(f) = \text{Vect}\{(1,1,1),(-1,-2,1)\} = \text{Vect}\{f(e_1), f(e_2)\}$.

• Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (y-z, x-2y+z). \end{array}$.

Considérons $(e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ où $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$.

On a $f(e_1) = (0,1), f(e_2) = (1,-2), f(e_3) = (-1,1)$ et on a vu dans l'exemple précédent que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\{(0,1),(1,-2),(-1,1)\} = \mathrm{Vect}\{f(e_1), f(e_2), f(e_3).\}$.

En revanche, $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$ ne constitue pas une base de $\mathrm{Im}(f)$ car ces trois vecteurs ne sont pas libres.

**Théorème 1: Caractérisation d'une application linéaire**

Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
On suppose que $E$ est de dimension finie et admet une base $(e_1, \ldots, e_n)$. Soient $(f_1, \ldots, f_n) \in F^n$.
Alors il existe une unique application linéaire $f \in \mathcal{L}(E,F)$ telle que

$$\forall k \in [\![1,n]\!], f(e_k) = f_k.$$

**Remarque 8.** Autrement dit, une application linéaire est entièrement caractérisée par les images des vecteurs d'une base de l'espace de départ.

**Démonstration.** • Montrons tout d'abord qu'il existe une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E,F)$ telle que pour tout $k \in [\![1,n]\!], f(e_k) = f_k$.

Soit $x \in E$. Alors il existe des scalaires uniques $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que $x = \displaystyle\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$.

On définit $f(x)$ par $f(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i$. Il n'y a ainsi pas d'ambiguïté sur la définition de la fonction $f$ car les coordonnées $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ sont uniques.

Soit $k \in [\![1,n]\!]$. Alors $e_k = \displaystyle\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$ avec $\lambda_k = 1$ et pour tout $i \neq k, \lambda_i = 0$ donc d'après la définition de $f$, on a bien $f(e_k) = f_k$.

Montrons que l'application $f$ ainsi déterminée est bien linéaire.

Soient $(x,y) \in E^2$ avec $x = \displaystyle\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$ et $y = \displaystyle\sum_{i=1}^n \mu_i e_i$. On pose alors $f(y) = \displaystyle\sum_{i=1}^n \mu_i f_i$.

Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. On a

$$\begin{aligned}
f(\lambda x + \mu y) &= f\left(\lambda \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i + \mu \sum_{i=1}^n \mu_i e_i\right) \\
&= f\left(\sum_{i=1}^n (\lambda\lambda_i + \mu\mu_i) e_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^n (\lambda\lambda_i + \mu\mu_i) f_i \quad \text{par définition de } f \\
&= \lambda \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i + \mu \sum_{i=1}^n \mu_i f_i \\
&= \lambda f(x) + \mu f(y),
\end{aligned}$$

ce qui prouve la linéarité de $f$. On a donc bien construit une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E,F)$ telle que pour tout $k \in [\![1,n]\!], f(e_k) = f_k$.

• Montrons l'unicité d'une telle application $f$. Supposons qu'il existe une autre application linéaire $g \in \mathcal{L}(E,F)$ telle que pour tout $k \in [\![1,n]\!], g(e_k) = f_k$.

Soit $x \in E$. Puisque $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de $E$, il existe des scalaires $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$.

Alors

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(e_k) \quad \text{par linéarité de } f \\ &= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k g(e_k) \quad \text{par hypothèse} \\ &= g\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k\right) \quad \text{par linéarité de } g \\ &= g(x) \end{aligned}$$

et ceci est vrai pour tout $x \in E$ donc $f = g$.

On a donc bien montré l'unicité de l'application $f$. ■

**Exemple 5.** Déterminons l'unique application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ telle que $f(1,1) = (1,-2,1)$ et $f(-1,1) = (2,0,3)$.

Les vecteurs $(1,1)$ et $(-1,1)$ sont libres donc ils forment bien une base de $\mathbb{R}^2$ et pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a $(x,y) = \frac{x+y}{2}(1,1) + \frac{-x+y}{2}(-1,1)$.

On a alors

$$f(x,y) = \frac{x+y}{2} f(1,1) + \frac{-x+y}{2} f(-1,1) = \frac{x+y}{2}(1,-2,1) + \frac{-x+y}{2}(2,0,3),$$

d'où pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = \left(-\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y, -x-y, -x+2y\right)$.

**Théorème 2**

Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

1. L'application $f$ est injective si et seulement si l'image par $f$ de toute famille libre de $E$ est une famille libre de $F$.
2. L'application $f$ est surjective si et seulement si l'image par $f$ de toute famille génératrice de $E$ est une famille génératrice de $F$.

**Démonstration.**

1. • Supposons que l'application $f$ est injective. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille libre de $E$. Montrons que $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une famille libre de $F$.

   Soient $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(e_k) = 0_F$. Pour montrer que la famille $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est libre, il faut montrer que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\lambda_k = 0$.

   Par linéarité de $f$, on a $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(e_k) = 0_F \Leftrightarrow f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k\right) = 0$.

Ainsi, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \in \ker(f) = \{0_E\}$ car $f$ est injective.

Puisque la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est libre, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k = 0_E \Rightarrow \forall k \in [\![1, n]\!], \lambda_k = 0$, ce qui prouve que la famille $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est libre.

Ceci montre que l'image par $f$ de toute famille libre de $E$ est une famille libre de $F$.

• Supposons que l'image de toute famille libre de $E$ est une famille libre de $F$. Montrons que $f$ est injective. Pour cela, montrons que $\ker(f) = \{0_E\}$. On a toujours $\{0_E\} \subset \ker(f)$. Montrons que $\ker(f) \subset \{0_E\}$.

Soit $x \in \ker(f)$.

Supposons par l'absurde que $x \neq 0_E$, alors $(x)$ est une famille libre de $E$ donc par hypothèse, $(f(x))$ est une famille libre de $F$ et a fortiori, $f(x) \neq 0_F$, ce qui contredit le fait que $x \in \ker(f)$.

Nécessairement, $x = 0_E$, d'où $\ker(f) \subset \{0_E\}$.

Finalement, on a bien l'égalité $\ker(f) = \{0_E\}$, ce qui prouve que $f$ est injective.

2. On a déjà montré que pour toute famille génératrice $(e_1, \ldots, e_n)$ de $E$, on a $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\{f(e_1), \ldots, f(e_n)\}$.

   On a alors les équivalences suivantes :

$$f \text{ est surjective} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) = F \Leftrightarrow \mathrm{Vect}\{f(e_1), \ldots, f(e_n)\} = F$$

   ce qui prouve que $f$ est surjective si et seulement si l'image par $f$ de toute famille génératrice de $E$ est une famille génératrice de $F$.

■

**Corollaire 1**

Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de $E$.

1. L'application $f$ est injective si et seulement si $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une famille libre de $F$.
2. L'application $f$ est surjective si et seulement si $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une famille génératrice de $F$.
3. L'application $f$ est bijective si et seulement si $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une base de $F$.

**Démonstration.**

1. • Supposons que $f$ est injective. Puisque $(e_1, \ldots, e_n)$ est une famille libre de $E$, d'après le théorème précédent, $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une famille libre de $F$.

   • Supposons que $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une famille libre de $F$. Montrons que $f$ est injective, i.e. $\ker(f) = \{0_E\}$. On a toujours $\{0_E\} \subset \ker(f)$. Montrons que $\ker(f) \subset \{0_E\}$.

   Soit $x \in \ker(f) \subset E$. Puisque $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de $E$, il existe des scalaires (uniques) $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$.

   On a $0_F = f(x) = f\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k\right) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(e_k)$.

   Par hypothèse, $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une famille libre de $F$ donc

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(e_k) = 0 \Rightarrow \forall k \in [\![1, n]\!], \lambda_k = 0,$$

ce qui implique que $x = 0_E$, d'où $\ker(f) \subset \{0_E\}$.

Finalement, on a bien $\ker(f) = \{0_E\}$ et on en déduit que $f$ est injective.

2. • Supposons que $f$ est surjective. Puisque $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille génératrice de $E$, d'après le théorème précédent, $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une famille génératrice de $F$.

   • Supposons que $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une famille génératrice de $F$, i.e. $\text{Vect}\{f(e_1), \dots, f(e_n)\} = F$.

   Puisque $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille génératrice de $E$, on a $\text{Vect}\{f(e_1), \dots, f(e_n)\} = \text{Im}(f)$ d'où $\text{Im}(f) = F$, ce qui implique que $f$ est surjective.

3. Une application est bijective si et seulement si elle est injective et surjective ; une base est une famille libre et génératrice. Ce résultat découle donc directement des deux alinéas précédents.

■

**Remarque 9.** Si $f$ est injective, $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base de $\text{Im}(f)$.

**Exemple 6.** • Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (2x - y, x + y) \end{array} \right.$

On a $f(1, 0) = (2, 1)$ et $f(0, 1) = (-1, 1)$. Les vecteurs $(2, 1)$ et $(-1, 1)$ forment une base de $\mathbb{R}^2$ donc d'après le corollaire précédent, $f$ est bien un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Il existe une unique application linéaire $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_{n-1}[X]$ telle que pour tout $k \in [\![1, n]\!], f(e_k) = X^{k-1}$.

Puisque la famille $(X^{k-1})_{1 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, l'application linéaire $f$ envoie une base de $\mathbb{R}^n$ sur une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ : c'est donc un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}_n[X]$.

Cet exemple illustre le fait suivant :

**Corollaire 2: Existence d'isomorphismes entre espaces vectoriels de dimension finie**

Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.
Alors il existe un isomorphisme $f \in \mathcal{L}(E, F)$ si et seulement si $\dim(E) = \dim(F)$.
Dans ce cas, on dit que les espaces vectoriels $E$ et $F$ sont isomorphes et on note $E \simeq F$.

**Démonstration.** • Supposons qu'il existe un isomorphisme $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de $E$. D'après le corollaire précédent, $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base de $F$, ce qui implique que $\dim(E) = \dim(F) = n$.

• Réciproquement, supposons que $\dim(E) = \dim(F) = n$.

Soient $(e_1, \dots, e_n)$ une base de $E$ et $(f_1, \dots, f_n)$ une base de $F$.

Il existe une unique application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que pour tout $k \in [\![1, n]\!], f(e_k) = f_k$.

Ainsi $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base de $F$ donc d'après le théorème précédent, $f$ est bijective.

■

**Remarque 10.** • Il n'y a évidemment pas unicité de l'isomorphisme entre deux espaces vectoriels de même dimension. Une application linéaire entre deux tels espaces est bijective dès qu'elle envoie une base du premier sur une base du second.

• Il n'y a donc pas d'application linéaire bijective de $\mathbb{K}^n$ vers $\mathbb{K}^p$ si $n \neq p$.

## 24.2 Matrice d'une application linéaire

### 24.2.1 Définition

**Définition 5: Matrice d'une application linéaire**

Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension $n$ et $p$ respectivement.
Soient $\mathcal{B} = (e_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ et $\mathcal{C} = (f_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ des bases respectives de $E$ et $F$.
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, il existe des scalaires $\lambda_{i,j}$ uniquement déterminés tels que

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_{i,j} f_i.$$

La matrice de terme général $(\lambda_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ est appelée matrice de $f$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ et on la note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$.
Dans le cas où $f$ est un endomorphisme de $E$ et où $\mathcal{B} = \mathcal{C}$, on note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ au lieu de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$.

**Remarque 11.** Autrement dit, la matrice de $f$ dans les bases $(e_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ et $(f_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ est la matrice dont la $j$-ème colonne est la matrice colonne des coordonnées de $f(e_j)$ dans la base $(f_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$.

**Exemple 7.** • Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives $n$ et $p$.

La matrice de l'application nulle $0_{\mathcal{L}(E,F)}$ dans n'importe quel couple de bases $(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ de $E$ et de $F$ est la matrice nulle $0_{p,n} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

• Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de $E$.
Alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id_E}) = I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

• Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (x - y, x + y + z)$.
On a $f(1, 0, 0) = (1, 1), f(0, 1, 0) = (-1, 1)$ et $f(0, 0, 1) = (0, 1)$.
Ainsi, la matrice de $f$ dans les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Considérons la base $\mathcal{B} = ((1, 1, 1), (0, -1, 1), (1, 0, 1))$ de $\mathbb{R}^3$ et la base $\mathcal{C} = ((2, -1), (1, 1))$ de $\mathbb{R}^2$.

On a $f(1, 1, 1) = (0, 3) = -(2, -1) + 2(1, 1)$; $f(0, -1, 1) = (1, 0) = \dfrac{1}{3}(2, -1) + \dfrac{1}{3}(1, 1)$ et $f(1, 0, 1) = (1, 2) = -\dfrac{1}{3}(2, -1) + \dfrac{5}{3}(1, 1)$.

Ainsi, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 2 & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$.

• Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{K})$. La matrice $A$ peut représenter une infinité d'applications linéaires si on ne fixe pas d'espaces vectoriels ou de bases.

En revanche, il existe une unique application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ telle que la matrice de $f$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ soit égale à $A$.

En effet, dans ce cas, on a nécessairement $f(1, 0) = (1, 2, 4)$ et $f(0, 1) = (-1, 3, -2)$ donc pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y) = f(x(1, 0)+y(0, 1)) = xf(1, 0)+yf(0, 1) = x(1, 2, 4)+y(-1, 3, -2) = (x-y, 2x+3y, 4x-2y),$$

ce qui détermine de façon unique l'application linéaire $f$.

On dit que $f$ est l'application linéaire canoniquement associée à $A$.

**Définition 6: Application linéaire canoniquement associée à une matrice**

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Notons $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ les bases canoniques de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$ respectivement.
L'application $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ telle que $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ est appelée l'application linéaire canoniquement associée à $A$.

**Remarque 12.** L'unicité de l'application $f$ résulte du Théorème 1 (Caractérisation d'une application linéaire). En effet, les images des vecteurs de la base $\mathcal{B}$ sont alors uniquement déterminées par les cœfficients de la matrice.

**Proposition 7: Calcul matriciel de l'image d'un vecteur**

Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies. Soit $\mathcal{B}$ une base de $E$ et $\mathcal{C}$ une base de $F$. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
Soit $x \in E$.
Alors on a l'égalité matricielle

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f(x)) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x).$$

**Démonstration.** Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{C} = (f_1, \ldots, f_p)$.

Notons $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$, $X$ la matrice colonne des coordonnées de $x$ dans la base $\mathcal{B}$ et $Y$ la matrice colonne des coordonnées de $f(x)$ dans la base $\mathcal{C}$, et montrons que $Y = AX$.

Tout d'abord, notons que $Y \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$. D'autre part, $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ donc on a également $AX \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.

Par définition des matrices coordonnées, on a $x = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} X_{j,1} e_j$. Donc par linéarité de $f$, on a

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} X_{j,1} f(e_j) = \sum_{j=1}^{n} X_{j,1} \sum_{i=1}^{p} A_{i,j} f_i = \sum_{i=1}^{p} \left( \sum_{j=1}^{n} A_{i,j} X_{j,1} \right) f_i = \sum_{i=1}^{p} (AX)_{i,1} f_i.$$

Or, encore par définition des matrices coordonnées, on a $f(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} Y_{i,1} f_i$. Par unicité des coordonnées d'un vecteur dans une base, on en déduit que pour tout $i \in [\![1, p]\!], (AX)_{i,1} = Y_{i,1}$ d'où $AX = Y$. ■

**Exemple 8.** Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = (y, -x + y, x)$. La matrice de $f$ dans les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}^2$ est $\mathbb{R}^3$ est $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ dont la matrice des coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Soit $Y$ la matrices des coordonnées de $f(x, y)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. D'après la proposition précédente, on a

$$Y = AX = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x + y \\ x \end{pmatrix}.$$

On retrouve bien que $f(x, y) = (y, -x + y, x)$.

**Corollaire 3: Formule de changement de base pour un vecteur**

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ des bases de $E$.
Soit $x \in E$.
Alors
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(x) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x),$$
où $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B})$ est la matrice de la famille $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{C}$, aussi appelée matrice de passage de la base $\mathcal{C}$ vers la base $\mathcal{B}$.

**Démonstration.** Il suffit d'appliquer le résultat de la proposition précédente avec $E = F$ et $f = \mathrm{Id}_E$. ■

**Remarque 13.** Il est important de noter que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\mathrm{Id}_E)$.

### 24.2.2 Opérations sur les matrices d'applications linéaires

**Proposition 8: Matrice d'une combinaison linéaire d'applications linéaires**

Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies. Soit $\mathcal{B}$ une base de $E$ et $\mathcal{C}$ une base de $F$.
Soient $(f, g) \in \mathcal{L}(E, F)^2$.
Alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$,
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) + \mu \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(g).$$

**Démonstration.** Notons $\mathcal{B} = (e_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ et $\mathcal{C} = (f_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$.
Notons $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ et $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(g)$.
Par définition, on a pour tout $j \in [\![1, n]\!]$,
$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{p} A_{i,j} f_i \quad \text{et} \quad g(e_j) = \sum_{i=1}^{p} B_{i,j} f_i.$$
Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Alors pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on a
$$(\lambda f + \mu g)(e_j) = \lambda f(e_j) + \mu g(e_j) = \sum_{i=1}^{p} (\lambda A_{i,j} + \mu B_{i,j}) f_i = \sum_{i=1}^{p} (\lambda A + \mu B)_{i,j} f_i.$$
Par définition, ceci implique que pour tout $(i, j) \in [\![1, p]\!] \times [\![1, n]\!]$,
$$(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\lambda f + \mu g))_{i,j} = (\lambda A + \mu B)_{i,j}$$
d'où $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\lambda f + \mu g) = \lambda A + \mu B = \lambda \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) + \mu \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(g)$. ■

**Théorème 3: Dimension de $\mathcal{L}(E, F)$**

Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives $n$ et $p$.
Soit $\mathcal{B}$ une base de $E$ et $\mathcal{C}$ une base de $F$.
L'application
$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathcal{L}(E, F) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \\ f & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \end{array}$$
est un isomorphisme.
En particulier, $\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim(\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})) = p \times n = \dim(E) \times \dim(F)$.

**Remarque 14.** Autrement dit, étant donnée une matrice $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, étant donnés des espaces vectoriels $E$ et $F$ de dimensions respectives $n$ et $p$, étant données des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ de $E$ et $F$ respectivement, il existe une unique application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = A$.

Par exemple, il existe une unique application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^p)$ telle que la matrice de $f$ dans les bases canoniques de $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^p$ est égale à $A$.

**Démonstration.** Dans toute la preuve, on note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_p)$.

• Tout d'abord, vérifions que $\varphi$ est bien une application linéaire.

Soient $(f, g) \in \mathcal{L}(E, F)^2$, soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. D'après la proposition précédente, on a

$$\varphi(\lambda f + \mu g) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) + \mu \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(g) = \lambda\varphi(f) + \mu\varphi(g)$$

donc $\varphi$ est bien une application linéaire.

• Montrons maintenant que l'application $\varphi$ est bijective. Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Montrons qu'il existe une unique application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = A$.

Par définition, on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = A \Leftrightarrow \forall j \in [\![1, n]\!], f(e_j) = \sum_{i=1}^{p} A_{i,j} f_i.$$

Or, la donnée des images des vecteurs d'une base de $E$ détermine entièrement l'application $f$, donc il existe une unique application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $f(e_j) = \sum_{i=1}^{p} A_{i,j} f_i$, i.e. il existe une unique application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = A$, ce qui prouve la bijectivité de $\varphi$. ■

**Remarque 15.** Ainsi, pour tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$ de dimension finie,

$$\dim \mathcal{L}(E, \mathbb{K}) = \dim(E) \times \dim(\mathbb{K}) = \dim(E),$$

d'où $\mathcal{L}(E, \mathbb{K}) \simeq E$.

**Proposition 9: Matrice d'une composée d'applications linéaires**

Soient $E, F$ et $G$ trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies. Soit $\mathcal{B}$ une base de $E$, $\mathcal{C}$ une base de $F$ et $\mathcal{D}$ une base de $G$.
Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$.
Alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$ et

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f).$$

**Démonstration.** Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n), \mathcal{C} = (f_1, \dots, f_p)$ et $\mathcal{D} = (g_1, \dots, g_q)$.

Notons $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f), B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(g)$ et $C = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(g \circ f)$. Montrons que $C = BA$.

Tout d'abord, on remarque que $C \in \mathcal{M}_{q,n}(\mathbb{K})$. D'autre part, $B \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ et $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ donc $BA \in \mathcal{M}_{q,n}(\mathbb{K})$.

Soient $j \in [\![1, n]\!]$.

Par définition, on a $f(e_j) = \sum_{k=1}^{p} A_{k,j} f_k$ donc par linéarité de $g$,

$$(g \circ f)(e_j) = g(f(e_j)) = g\left(\sum_{k=1}^{p} A_{k,j} f_k\right) = \sum_{k=1}^{p} A_{k,j} g(f_k) = \sum_{k=1}^{p} A_{k,j} \sum_{i=1}^{q} B_{i,k} g_i = \sum_{i=1}^{q} \sum_{k=1}^{p} (B_{i,k} A_{k,j}) g_i$$

d'où $(g \circ f(e_j)) = \sum_{i=1}^{q} (BA)_{i,j} g_i$.

Or, par définition, $(g \circ f)(e_j) = \sum_{i=1}^{q} C_{i,j} g_i$.

Par unicité des coordonnées d'un vecteur dans une base, on en déduit que pour tout $(i,j) \in [\![1,q]\!] \times [\![1,n]\!], C_{i,j} = (BA)_{i,j}$ d'où $C = BA$. ■

**Exemple 9.** Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ définie pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ par $f(x,y,z) = (y-z, x+y)$ et $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ définie pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ par $g(x,y) = (y, x, x+y)$.

La matrice de $f$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ est $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et la matrice de $g$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ est $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi, la matrice de $g \circ f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$C = BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

donc pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, C \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ y-z \\ x+2y-z \end{pmatrix}$ d'où

$$(g \circ f)(x,y,z) = (x+y, y-z, x+2y-z).$$

De même, la matrice de $f \circ g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est

$$D = AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

donc pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2, D \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x+y \end{pmatrix}$ d'où

$$(f \circ g)(x,y) = (-y, x+y).$$

**Corollaire 4: Matrice des puissances successives d'un endomorphisme**

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, soit $\mathcal{B}$ une base de $E$.
Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^n) = (\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f))^n.$$

**Démonstration.** Soit $p = \dim(E)$.

On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

• Pour $n = 0, f^0 = \mathrm{Id}_E$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(Id_E) = I_p = (\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f))^0$, ce qui prouve la propriété au rang $n = 0$.

• Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^n) = (\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f))^n$. Montrons la propriété au rang $n+1$.

D'après la proposition précédente et l'hypothèse de récurrence, on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^{n+1}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^n \circ f) = (\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f))^n \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = (\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f))^{n+1},$$

ce qui prouve la propriété au rang $n+1$ et achève la récurrence. ■

**Exemple 10.** Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Alors la matrice de $f^2$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -8 & -1 & -9 \\ 12 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

**Corollaire 5: Matrice d'un isomorphisme**

Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies. Soit $\mathcal{B}$ une base de $E$ et $\mathcal{C}$ une base de $F$.
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
Alors $f$ est un isomorphisme si et seulement si la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ est inversible et dans ce cas,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f^{-1}) = (\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f))^{-1}.$$

**Remarque 16.** On remarque que s'il existe un isomorphisme $f$ entre $E$ et $F$, les espaces $E$ et $F$ sont nécessairement de même dimension, donc la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ est bien une matrice carrée, ce qui est la moindre des choses pour une matrice inversible!

**Démonstration.** Soit $n = \dim(E)$ et $p = \dim(F)$.

• Supposons que $f$ est un isomorphisme. Nécessairement $\dim(E) = \dim(F)$ d'où $n = p$. On sait que sa bijection réciproque $f^{-1}$ est une application linéaire de $F$ vers $E$.

Puisque $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$, on obtient par composition

$$I_n = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^{-1} \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f^{-1}) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$$

et

$$I_n = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathrm{Id}_F) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f \circ f^{-1}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f^{-1}),$$

ce qui prouve que la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ est inversible et que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f^{-1}) = (\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f))^{-1}$.

• Notons $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Supposons que $A$ est inversible. Nécessairement $p = n$ et $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.

D'après le théorème 23.2.2, il existe une unique application linéaire $g \in \mathcal{L}(F, E)$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(g) = A^{-1}$. On a alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E) = I_n = A^{-1}A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(g)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g \circ f)$$

et

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathrm{Id}_F) = I_n = AA^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(g) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f \circ g).$$

Toujours d'après le même théorème, puisque $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g \circ f)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathrm{Id}_F) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f \circ g)$, on en déduit que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$, ce qui prouve que $f$ est bijective et $g = f^{-1}$.

En outre, on a bien $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f^{-1}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(g) = A^{-1} = (\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f))^{-1}$.

■

**Exemple 11.** Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = (x - y, x + y)$.

La matrice de $f$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On a $\det(A) = 2 \neq 0$ donc la matrice $A$ est inversible d'inverse $A^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. D'après le théorème précédent, $f$ est donc un automorphisme de $\mathbb{R}^2$ et $A^{-1}$ est la matrice de $f^{-1}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on a $A^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}x+y\\-x+y\end{pmatrix}$ donc $f^{-1}\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ est définie pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ par $f^{-1}(x,y)=\left(\frac{x+y}{2},\frac{-x+y}{2}\right)$.

**Corollaire 6: Inverse d'une matrice de passage**

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ des bases de $E$. Alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})=(\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}))^{-1},$$

c'est à dire que la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{C}$ et la matrice de passage de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{B}$ sont inverses l'une de l'autre.

**Démonstration.** Il suffit d'appliquer le résultat précédent avec $E=F$ et $f=\mathrm{Id}_E$ et on obtient

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E)=(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\mathrm{Id}_E))^{-1},$$

i.e. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})=(\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}))^{-1}$. ■

**Exemple 12.** Notons $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit $\mathcal{B}=((1,-1,0),(2,3,-2),(-2,0,1))$ une autre base de $\mathbb{R}^3$.

On a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B})=\begin{pmatrix}1&2&-2\\-1&3&0\\0&-2&1\end{pmatrix}$.

Soit $x=(1,2,3)$, i.e. $\mathrm{Mat}_{C}(x)=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$.

On a

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})\times\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(x)=(\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}))^{-1}\times\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(x)=\begin{pmatrix}3&2&6\\1&1&2\\2&2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}25\\9\\21\end{pmatrix}.$$

## 24.3 Rang d'une application linéaire

### 24.3.1 Définition

**Définition 7: Rang d'une application linéaire**

Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
Soit $f\in\mathcal{L}(E,F)$.
On appelle rang de l'application linéaire $f$, notée $\mathrm{rg}(f)$, la dimension de $\mathrm{Im}(f)$ si $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension finie, i.e.

$$\mathrm{rg}(f)=\dim(\mathrm{Im}(f)).$$

**Remarque 17.** • Puisque $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $F$, on a nécessairement

$$\mathrm{rg}(f)\leqslant\dim(F).$$

• On a vu que pour toute base $(e_1,\dots,e_n)$ de $E,\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Vect}(f(e_1),\dots,f(e_n))$ donc $\mathrm{rg}(f)=\dim\left(\mathrm{Vect}(f(e_1),\dots,f(e_n))\right)$.

**Exemple 13.** Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ définie pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ par

$$f(x, y, z) = (x + y - z, -2x - 2y + 2z).$$

Considérons la base canonique $(e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.
On a $f(e_1) = f(1, 0, 0) = (1, -2)$; $\quad f(e_2) = f(0, 1, 0) = (1 - 2)$ et $f(0, 0, 1) = (-1, 2)$.
Ainsi, on voit que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) = \mathrm{Vect}(1, -2)$ donc $\mathrm{rg}(f) = 1$.

### 24.3.2 Théorème du rang et conséquences

**Théorème 4: Théorème du rang**

Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On suppose que $E$ est de dimension finie.
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
Alors $\mathrm{rg}(f)$ est fini et

$$\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \mathrm{rg}(f).$$

**Démonstration.** Soit $n = \dim(E)$ et $p = \dim(\ker(f))$ avec $p \leqslant n$ puisque $\ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de $\ker(f)$. C'est une famille libre de $E$ qu'on peut compléter en une base de $E$ en ajoutant des vecteurs $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ tels que la famille $(e_1, \dots, e_n)$ forme une base de $E$.

Montrons que la famille $(f(e_{p+1}), \dots, f(e_n))$ forme une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Tout d'abord, puisque $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de $E$, on sait que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$.

Or, pour tout $k \in [\![1, p]\!], e_k \in \ker(f)$ donc $f(e_k) = 0$.

Ainsi, $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n)) = \mathrm{Vect}(f(e_{p+1}, \dots, f(e_n))$ donc la famille $(f(e_{p+1}, \dots, f(e_n))$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$.

Montrons maintenant que la famille $(f(e_{p+1}), \dots, f(e_n))$ est libre.

Soient $(\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n-p}$ tels que $\displaystyle\sum_{k=p+1}^{n} \lambda_k f(e_k) = 0_F \Leftrightarrow f\left(\sum_{k=p+1}^{n} \lambda_k e_k\right) = 0_F$ par linéarité de $f$.

Ceci implique que $\displaystyle\sum_{k=p+1}^{n} \lambda_k e_k \in \ker(f)$. Puisque $(e_1, \dots, e_p)$ est une base de $\ker(f)$, il existe des scalaires (uniques) $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ tels que $\displaystyle\sum_{k=p+1}^{n} \lambda_k e_k = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k e_k$ d'où

$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k e_k - \sum_{k=p+1}^{n} \lambda_k e_k = 0_E.$$

Or, la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de $E$ donc par liberté de cette famille, on en déduit que pour tout $k \in [\![1, p]\!], \lambda_k = 0$ et pour tout $k \in [\![p + 1, n]\!], -\lambda_k = 0$ donc pour tout $k \in [\![p + 1, n]\!], \lambda_k = 0$, ce qui prouve que la famille $(f(e_{p+1}, \dots, f(e_n))$ est libre.

Finalement, la famille $(f(e_{p+1}, \dots, f(e_n))$ est bien une famille libre et génératrice de $\mathrm{Im}(f)$ : c'est donc une base de $\mathrm{Im}(f)$ constituée de $n - p$ vecteurs donc $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)) = n - p$.

On a donc bien $\dim(\ker(f)) + \mathrm{rg}(f) = p + n - p = n = \dim(E)$.

■

**Exemple 14.** Reprenons l'exemple précédent de la fonction $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ définie pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ par $f(x, y, z) = (x + y - z, -2x - 2y + 2z)$.

On a vu que $\mathrm{rg}(f) = 1$.

Or, d'après le théorème du rang, on a $\dim(\ker(f)) + \text{rg}(f) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3$ donc

$$\dim(\ker(f)) = 2.$$

Vérifions-le en déterminant une base de $\ker(f)$.
On a $(x, y, z) \in \ker(f) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z &= 0 \\ -2x - 2y + 2z &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow z = x + y$.
On a donc $(x, y, z) \in \ker(f) \Leftrightarrow (x, y, z) = (x, y, x + y) = x(1, 0, 1) + y(0, 1, 1)$.
Ainsi, $\ker(f) = \text{Vect}\{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ et puisque la famille $((1, 0, 1), (0, 1, 1))$ est libre, c'est bien une base de $\ker(f)$ qui est donc bien de dimension 2.

**Corollaire 7**

Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies.
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
Alors :

1. $f$ est injective si et seulement si $\text{rg}(f) = \dim(E)$.
2. $f$ est surjective si et seulement si $\text{rg}(f) = \dim(F)$.
3. $f$ est bijective si et seulement si $\text{rg}(f) = \dim(E) = \dim(F)$.

**Démonstration.**

1. D'après le théorème du rang, on a les équivalences suivantes :
   $f$ est injective $\Leftrightarrow \ker(f) = \{0_E\} \Leftrightarrow \dim(\ker(f)) = 0 \Leftrightarrow \dim(E) = \text{rg}(f)$.
2. L'équivalence est triviale puisque $f$ est surjective si et seulement si $\text{Im}(f) = F$.
3. L'équivalence découle des deux alinéas précédents.

■

**Corollaire 8: Existence d'applications linéaires injectives ou surjectives entre espaces vectoriels de dimensions finies**

Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies.

1. Il existe une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ injective si et seulement si
$$\dim(E) \leqslant \dim(F).$$
2. Il existe une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ surjective si et seulement si
$$\dim(E) \geqslant \dim(F).$$

**Démonstration.**

1. • Supposons qu'il existe une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ injective. D'après le corollaire précédent, on a $\dim(E) = \text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f))$.
   Or, $\text{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $F$ donc $\dim(\text{Im}(f)) \leqslant \dim(F)$ d'où
$$\dim(E) \leqslant \dim(F).$$
   • Supposons que $\dim(E) \leqslant \dim(F)$.
   Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de $E$ et $(f_1, \ldots, f_p)$ une base de $F$ avec
$$\dim(E) = n \leqslant p = \dim(F).$$

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ l'unique application linéaire définie pour tout $k \in [\![1,n]\!]$ par $f(e_k) = f_k$ (loisible car $n \leqslant p$).

La famille $(f(e_1),\dots,f(e_n)) = (f_1,\dots,f_n)$ est une famille libre puisque c'est une sous-famille de la base $(f_1,\dots,f_p)$.

D'après le corollaire 23.1.4, ceci implique que l'application $f$ est injective.

2. •Supposons qu'il existe une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E,F)$ surjective.

D'après le corollaire précédent, on a $\mathrm{rg}(f) = \dim(F)$ donc en appliquant le théorème du rang, on obtient

$$\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \mathrm{rg}(f) = \dim(\ker(f)) + \dim(F) \geqslant \dim(F).$$

• Supposons que $\dim(E) \geqslant \dim(F)$.

Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une base de $E$ et $(f_1,\dots,f_p)$ une base de $F$ avec

$$\dim(E) = n \geqslant p = \dim(F).$$

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ l'unique application linéaire définie pour tout $k \in [\![1,n]\!]$ par

$$f(e_k) = \begin{cases} f_k & \text{si } k \leqslant p \\ f_p & \text{si } k \geqslant p+1 \end{cases}$$

(loisible car $n \geqslant p$).

On a alors $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1),\dots,f(e_n)) = \mathrm{Vect}(f_1,\dots,f_p) = F$, ce qui prouve que $f$ est surjective.

■

**Remarque 18.** On a déjà vu qu'il existait une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E,F)$ bijective si et seulement si $\dim(E) = \dim(F)$.

**Corollaire 9**

Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de même dimension.
Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.
Alors
$f$ est injective $\Leftrightarrow$ $f$ est surjective $\Leftrightarrow$ $f$ est bijective.

**Démonstration.** On a $\dim(E) = \dim(F)$.
D'après le corollaire précédent, on a les équivalences suivantes :
$f$ est injective $\Leftrightarrow$ $\mathrm{rg}(f) = \dim(E) = \dim(F)$ $\Leftrightarrow$ $f$ est surjective $\Leftrightarrow$ $\mathrm{rg}(f) = \dim(E) = \dim(F)$ $\Leftrightarrow$ $f$ est bijective. ■

**Remarque 19.** Le résultat est vrai en particulier si $E = F$, c'est à dire qu'il suffit qu'un endomorphisme soit injectif (ou surjectif) pour être bijectif.

**Exemple 15.** Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ défini pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = (x-2y,x)$.

On a $(x,y) \in \ker(f) \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y &= 0 \\ x &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$ donc $\ker(f) = \{(0,0)\}$.

Ainsi $f$ est injective et puisque $f$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$, $f$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^2$.

Nous pouvons désormais montrer une propriété admise dans le chapitre « Matrices » :

**Proposition 10**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On suppose qu'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = I_n$.
Alors on a également $BA = I_n$, i.e. $A$ est inversible et $B = A^{-1}$.

**Démonstration.** Notons $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $A$ et soit $g$ l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $B$.

On a alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{K}^n}) = I_n = AB = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f \circ g)$ donc $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{K}^n}$.

Ainsi, l'application linéaire $f \circ g$ est surjective, donc $f$ est surjective. Puisque $f$ est un endomorphisme de $\mathbb{K}^n$, d'après le corollaire précédent, ceci implique que $f$ est bijective et que la matrice $A$ est inversible.

Soit $f^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ la bijection réciproque de $f$. On sait que la matrice de $f^{-1}$ dans la base $\mathcal{B}$ est $A^{-1}$ donc $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.

Ainsi, $B = I_n \times B = (A^{-1}A)B = A^{-1}(AB) = A^{-1}$.

Puisque $B = A^{-1}$, on a bien $BA = I_n$. ■

**Remarque 20.** S'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $BA = I_n$, la même preuve montre que $B$ est inversible et que $B^{-1} = A$ donc $B = A^{-1}$.

**Exemple 16.** Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. Puisque $AB = I_3$, on peut affirmer que $A$ est inversible, que $BA = I_3$ et que $B = A^{-1}$.

### 24.3.3 Application aux rangs de matrices et de systèmes linéaires

**Proposition 11: Invariance du rang d'une application linéaire par composition par un isomorphisme**

Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. On suppose qu'il existe un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $G$ et $g \in \mathcal{L}(G, E)$ tels que $g$ soit un isomorphisme.
   Alors $\mathrm{rg}(f \circ g) = \mathrm{rg}(f)$.
2. On suppose qu'il existe un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $G$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$ tels que $g$ soit un isomorphisme.
   Alors $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}(f)$.

**Démonstration.**

1. Montrons que $\mathrm{Im}(f \circ g) = \mathrm{Im}(f)$.
   - Montrons l'inclusion $\mathrm{Im}(f \circ g) \subset \mathrm{Im}(f)$.

   Soit $y \in \mathrm{Im}(f \circ g)$. Par définition, il existe $x \in G$ tel que $y = (f \circ g)(x) = f(g(x)) \in \mathrm{Im}(f)$ donc $\mathrm{Im}(f \circ g) \subset \mathrm{Im}(f)$ (on constate que cette inclusion est toujours vraie, sans hypothèse particulière sur $g$).
   - Montrons l'inclusions $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Im}(f \circ g)$.

   Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$. Par définition, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Puisque $g$ est un isomorphisme de $G$ vers $E$, il existe un (unique) vecteur $z \in G$ tel que $x = g(z)$ donc $y = f(g(z)) = (f \circ g)(z) \in \mathrm{Im}(f \circ g)$, ce qui prouve l'inclusion $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Im}(f \circ g)$.

   Finalement, on a bien l'égalité $\mathrm{Im}(f \circ g) = \mathrm{Im}(f)$.

   A fortiori, $\mathrm{rg}(f \circ g) = \dim(\mathrm{Im}(f \circ g)) = \dim(\mathrm{Im}(f)) = \mathrm{rg}(f)$.

2. Montrons que $\ker(f) = \ker(g \circ f)$.
   • Montrons l'inclusion $\ker(f) \subset \ker(g \circ f)$.
   Soit $x \in \ker(f)$.
   Par définition, on a $f(x) = 0_F$ et puisque $g \in \mathcal{L}(F, G), g \circ f(x) = g(f(x)) = g(0_F) = 0_G$ donc $x \in \ker(g \circ f)$, ce qui prouve l'inclusion $\ker(f) \subset \ker(g \circ f)$ (on constate que cette inclusion est toujours vraie, sans hypothèse particulière sur $g$).
   • Montrons l'inclusion $\ker(g \circ f) \subset \ker(f)$.
   Soit $x \in \ker(g \circ f)$. On a $g \circ f(x) = g(f(x)) = 0_G$ donc $f(x) \in \ker((g)$.
   Or, $g$ est un isomorphisme, a fortiori $g$ est injective donc $\ker(g) = \{0_F\}$, ce qui implique que $f(x) = 0_F$, i.e. $x \in \ker(f)$, d'où l'inclusion $\ker(g \circ f) \subset \ker(f)$.
   Finalement, on a bien l'égalité $\ker(f) = \ker(g \circ f)$. A fortiori, $\dim(\ker(f)) = \dim(\ker(g \circ f))$.
   D'après le théorème du rang, puisque $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$, on a

$$\mathrm{rg}(g \circ f) = \dim(E) - \dim(\ker(g \circ f)) = \dim(E) - \dim(\ker(f)) = \mathrm{rg}(f).$$

■

**Proposition 12: Rang d'une matrice**

Soient $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Soit $A$ une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Toutes les application linéaires entre deux espaces vectoriels de dimensions respectives $p$ et $n$ ayant pour matrice $A$ dans un certain couple de bases ont même rang.
On appelle ce rang le rang de la matrice $A$ et on le note $\mathrm{rg}(A)$.

**Démonstration.** Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives $p$ et $n$, soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ des bases de $E$ et $F$ respectivement. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = A$.

Soient $E'$ et $F'$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives $p$ et $n$, soient $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{C}'$ des bases de $E'$ et $F'$ respectivement. Soit $g \in \mathcal{L}(E', F')$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'} = A$.

Soit $u \in \mathcal{L}(E, E')$ l'application linéaire qui envoie la base $\mathcal{B}$ sur la base $\mathcal{B}'$. C'est un isomorphisme puisque l'image d'une base de $E$ par $u$ est une base de $E'$.

De même, considérons $v \in \mathcal{L}(F', F)$ l'application linéaire qui envoie la base $\mathcal{C}'$ sur la base $\mathcal{C}$. C'est un isomorphisme puisque l'image d'une base de $F'$ par $v$ est une base de $F$.

$$\begin{tikzcd}
(E,\mathcal{B}) \arrow[r, "f", "A"'] \arrow[d, "u"] & (F,\mathcal{C}) \\
(E',\mathcal{B}') \arrow[r, "g", "A"'] & (F',\mathcal{C}') \arrow[u, "v"]
\end{tikzcd}$$

Notons les bases $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p), \mathcal{C} = (f_1, \ldots, f_n), \mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_p)$ et $\mathcal{C}' = (f'_1, \ldots, f'_n)$.

Soit $j \in [\![1, p]\!]$.

Puisque $A$ est la matrice de $f$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, on a $f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} A_{i,j} f_i$.

De même, puisque $A$ est la matrice de $g$ dans les bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{C}'$, on a

$$(v \circ g \circ u)(e_j) = (v \circ g)(e'_j) = v\left(\sum_{i=1}^{n} A_{i,j} f'_i\right) = \sum_{i=1}^{n} A_{i,j} v(f'_i) = \sum_{i=1}^{n} A_{i,j} f_i = f(e_j).$$

Ainsi, les applications linéaires $f$ et $v \circ g \circ u$ coïncident sur la base $\mathcal{B}$. Or, une application linéaire est entièrement déterminée par les images des vecteurs d'une base donc $f = v \circ g \circ u$.

Puisque $u$ et $v$ sont des isomorphismes, on déduit de la proposition précédente que

$$\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(v \circ g \circ u) = \mathrm{rg}(v \circ g) = \mathrm{rg}(g),$$

ce qui prouve bien que si $f$ et $g$ ont la même matrice représentative dans des couples de bases différents, $f$ et $g$ ont même rang. ■

**Remarque 21.** Le rang de la matrice ne dépend donc pas de l'application linéaire considérée. On peut interpréter le rang d'une matrice comme la dimension du sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs dont les matrices coordonnées sont les colonnes de la matrice.

**Exemple 17.** Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ définie pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ par

$$f(x, y, z) = (x + y - z, -2x - 2y + 2z).$$

On a vu que $\text{rg}(f) = \dim(\text{Vect}((1, -2), (1, -2), (-1, 2))) = 1$.

La matrice de $f$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. Ainsi, $\text{rg}(A) = 1$, qui est bien la dimension du sous-espace de vectoriel engendré par les colonnes de $A$.

**Proposition 13: Invariance du rang d'une matrice par multiplication par une matrice inversible**

Soient $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

1. Soit $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ une matrice inversible.
   Alors $\text{rg}(AB) = \text{rg}(A)$.
2. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible.
   Alors $\text{rg}(BA) = \text{rg}(A)$.

**Démonstration.** Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ l'application linéaire dont la matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$ est $A$.

1. Soit $g \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p)$ l'endomorphisme de $\mathbb{K}^p$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{K}^p$ est B. Puisque $B$ est inversible, $g$ est un isomorphisme donc $\text{rg}(f \circ g) = \text{rg}(f)$.
   Or, la matrice de $f \circ g$ dans les bases canoniques de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$ est $AB$. On a donc
   $$\text{rg}(A) = \text{rg}(f) = \text{rg}(f \circ g) = \text{rg}(AB).$$
2. Soit $g \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$ est B. Puisque $B$ est inversible, $g$ est un isomorphisme donc $\text{rg}(g \circ f) = \text{rg}(f)$.
   Or, la matrice de $g \circ f$ dans les bases canoniques de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$ est $BA$. On a donc
   $$\text{rg}(A) = \text{rg}(f) = \text{rg}(g \circ f) = \text{rg}(BA).$$

■

Nous avions donné dans le chapitre « Matrices »une définition de rang différente pour les matrices. Une matrice était dite de rang $r$ si on pouvait l'échelonner et faire apparaître exactement $r$ pivots non nuls. Nous allons maintenant vérifier que cette définition est équivalente à celle donnée ci-dessus. Tout d'abord, nous aurons besoin du résultat suivant.

Rappelons que les opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'une matrice sont les suivantes :

$$L_i \leftrightarrow L_j; \quad L_i \leftarrow \lambda L_i \,\text{si}\, \lambda \neq 0; \quad L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j;$$
$$C_i \leftrightarrow C_j; \quad C_i \leftarrow \lambda C_i \,\text{si}\, \lambda \neq 0; \quad C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j;$$

**Proposition 14: Invariance du rang d'une matrice par opérations élémentaires**

Soient $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Effectuer des opérations élémentaires sur la matrice $A$ ne modifie pas le rang de $A$.

**Démonstration.** • Soient $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.

Effectuer l'opération élémentaire $L_i \leftrightarrow L_j$ sur la matrice $A$ revient à multiplier celle-ci à gauche par la matrice de permutation

$$P_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & 1 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

Or, celle-ci est inversible d'inverse $P_{i,j}^{-1} = P_{j,i}$ donc $\mathrm{rg}(P_{i,j}A) = \mathrm{rg}(A)$.

• Soit $i \in [\![1,n]\!]$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$. Effectuer l'opération élémentaire $L_i \leftarrow \lambda L_i$ sur la matrice $A$ revient à multiplier celle-ci à gauche par la matrice de dilatation

$$D_i(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

Or, celle-ci est inversible d'inverse $D_i(\lambda)^{-1} = D_i(\frac{1}{\lambda})$ donc $\mathrm{rg}(D_i(\lambda)A) = \mathrm{rg}(A)$.

• Soient $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Effectuer l'opération élémentaire $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ sur la matrice $A$ revient à multiplier celle-ci à gauche par la matrice de transvection

$$T_{i,j}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & & \lambda & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

Or, celle-ci est inversible d'inverse $T_{i,j}(\lambda)^{-1} = T_{i,j}(-\lambda)$ donc $\mathrm{rg}(T_{i,j}(\lambda)A) = \mathrm{rg}(A)$.

• Les opérations élémentaires sur les colonnes sont obtenues en multipliant la matrice $A$ à droite par les mêmes matrices de permutation, dilatation et transvection. Or, multiplier à droite par une matrice inversible ne modifie pas le rang donc le raisonnement est le même. ■

**Proposition 15: Caractérisation du rang d'une matrice**

Soient $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Soit $r \in [\![1, \min(n,p)]\!]$. Les trois assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\mathrm{rg}(A) = r$.
2. Il existe deux matrices $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ inversibles telles que
$$A = B \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & \boxed{1} & 0\dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$
où le nombre de 1 est égal à $r$.
3. On peut échelonner la matrice $A$ à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes pour la mettre sous la forme $\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & \boxed{1} & 0\dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ où le nombre de 1 est égal à $r$.

**Démonstration.** On effectue un raisonnement circulaire.

• Montrons que 1) $\Rightarrow$ 2).

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ l'application linéaire dont la matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$, notées respectivement $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ et $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$, est $A$.

Par hypothèse, $\mathrm{rg}(f) = r$ donc d'après le théorème du rang, $\dim(\ker(f)) = p - r$.

Soit $(e'_{r+1}, \dots, e'_p)$ une base de $\ker(f)$. Complétons-la en une base $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_r, e'_{r+1}, \dots, e'_p)$ de $\mathbb{K}^p$. Ainsi, pour tout $j \in [\![r+1, p]\!]$, $e'_j \in \ker(f)$ donc $f(e'_j) = 0_{\mathbb{K}^n}$.

On a montré dans la preuve du théorème du rang que $(f(e'_1), \dots, f(e'_r))$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Complétons-la en une base $\mathcal{C}' = (f(e'_1), \dots, f(e'_r), f'_{r+1}, \dots, f'_n)$ de $\mathbb{K}^n$.

On a alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f) = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & \boxed{1} & 0\dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} = J_r \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ où le nombre de 1 est égal à $r$.

Notons $C = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_{\mathbb{K}^p}) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. Puisque $\mathrm{Id}_{\mathbb{K}^p}$ est un automorphisme de $\mathbb{K}^p$, la matrice $C$ est inversible.

De même, notons $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}',\mathcal{C}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{K}^n}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Puisque $\mathrm{Id}_{\mathbb{K}^n}$ est un automorphisme de $\mathbb{K}^n$, la matrice $B$ est inversible.

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{K}^p, \mathcal{B}) \arrow[r, "f", "A"'] \arrow[d, "\mathrm{Id}", "C"'] & (\mathbb{K}^n, \mathcal{C}) \\
(\mathbb{K}^p, \mathcal{B}') \arrow[r, "f", "J_r"'] & (\mathbb{K}^n, \mathcal{C}') \arrow[u, "B"', "\mathrm{Id}"]
\end{tikzcd}$$

On a évidemment $\mathrm{Id}_{\mathbb{K}^n} \circ f \circ \mathrm{Id}_{\mathbb{K}^p} = f$ donc en considérant les matrices de ces applications linéaires, on a

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{K}^n} \circ f \circ \mathrm{Id}_{\mathbb{K}^p}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}',\mathcal{C}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{K}^n}) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_{\mathbb{K}^p}),$$

d'où $A = BJ_rC$.

• Montrons que 2) $\Rightarrow$ 3).

Puisque $B$ est inversible, en utilisant la méthode du pivot de Gauss, on peut obtenir $I_n$ à partir d'opérations élémentaires sur les lignes de $B$, i.e. en multipliant $B$ à gauche par $B^{-1}$.

De même, puisque $C$ est inversible, en utilisant la méthode du pivot de Gauss, on peut obtenir $I_p$ à partir d'opérations élémentaires sur les colonnes de $C$, i.e. en multipliant $C$ à droite par $C^{-1}$.

Ainsi, en effectuant ces opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes de $A$, i.e. en effectuant le produit matriciel $B^{-1}AC^{-1}$, on obtient

$$B^{-1}AC^{-1} = B^{-1}B \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & \boxed{1} & 0\dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} CC^{-1} = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & \boxed{1} & 0\dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

On a donc bien réussi à échelonner la matrice $A$ sous la forme voulue.

• Montrons que 3) $\Rightarrow$ 1).

On a montré précédemment que le rang était invariant par opérations élémentaires donc le rang de $A$ est égal au rang de la matrice $\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & \boxed{1} & 0\dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$. Or, le rang de cette matrice, vu comme la dimension du sous-espace vectoriel engendré par ses colonnes, est évidemment égal à $r$ donc $\mathrm{rg}(A) = r$. ■

**Remarque 22.** • On avait en fait défini le rang d'une matrice dans le chapitre « Matrices »comme le rang de n'importe quel système linéaire associé à cette matrice. On avait également affirmé que des systèmes équivalents (c'est à dire obtenus par opérations élémentaires) avaient même rang. La proposition précédente justifie tout cela.

• Dans le chapitre « Espaces vectoriels », on a défini le rang d'une famille de vecteurs comme la dimension de l'espace vectoriel engendré par ces vecteurs. Si on considère la matrice de cette famille dans une base quelconque, le rang de la famille est égal au rang de cette matrice.

En effet, considérons $(x_1, \dots, x_p)$ une famille de $p$ vecteurs dans $\mathbb{K}^n$. Notons $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ la base canonique de $\mathbb{K}^p$.

La matrice de la famille $(x_1, \dots, x_p)$ dans la base canonique $\mathcal{C}$ de $\mathbb{K}^n$ est en fait la matrice de l'application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ définie pour tout $j \in [\![1, p]\!]$ par $f(e_j) = x_j$.

On a alors $\dim(\mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_p)) = \dim(\mathrm{Vect}(f(e_1),\dots,f(e_p)) = \dim(\mathrm{Im}(f)) = \mathrm{rg}(f)$.

En particulier, $(x_1,\dots,x_p)$ est une base de $\mathbb{K}^n$ si et seulement si $p = n$ et $\dim(\mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_p)) = n$ si et seulement si $p = n$ et la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(x_1,\dots,x_p)$ est inversible.

Toutes les notions de rang (applications linéaires, matrices, systèmes linéaires, familles de vecteurs) coïncident dont et peuvent être calculées en échélonnant des matrices !

Enfin, nous allons pouvoir démontrer une autre propriété admise dans le chapitre « Matrices » :

**Corollaire 10: Invariance du rang par transposition**

Soient $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$.
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Alors $\mathrm{rg}(A^T) = \mathrm{rg}(A)$.

**Démonstration.** Soit $r = \mathrm{rg}(A)$. D'après la proposition précédente, il existe deux matrices inversibles $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ telles que $A = B \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & \boxed{1} & 0\dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ où le nombre de 1 est égal à $r$.

En prenant la transposée, on obtient $A^T = C^T \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & \boxed{1} & 0\dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} B^T \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ où le nombre de 1 est égal à $r$.

Or, $B^T$ et $C^T$ sont inversibles puisque $B$ et $C$ le sont. L'égalité $A^T = C^T \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & \boxed{1} & 0\dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} B^T$ implique donc d'après la proposition précédente que $\mathrm{rg}(A^T) = r = \mathrm{rg}(A)$. ∎