Corrigé de la liste d'exercices n°23 — Espaces vectoriels

Exercice 1.

1. $0 \notin F$ donc F n'est ni un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, ni un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
2. $F = \{x(2,1,-1) + y(3,0,1)|(x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}\{(2,1,-1),(3,0,1)\}$ donc F est un $\mathbb{R}$-sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ mais ce n'est pas un $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^3$ (car $(2,1,-1) \in F$ mais $i(2,1,-1) \notin F$).
3. $(2,1,0) \in F, (-2,1,0)$ mais $(2,1,0) + (-2,1,0) = (0,2,0) \notin F$ donc F n'est pas un $\mathbb{R}$-sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
4. $(1,0,1) \in F, (0,1,1) \in F$ mais $(1,0,1) + (0,1,1) = (1,1,2) \notin F$ donc F n'est pas un $\mathbb{R}$-sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
5. $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3|z = -x\} = \{(x,y,z) = (x,y,-x)|(x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \{x(1,0,-1) + y(0,1,0)|(x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}\{(1,0,-1),(0,1,0)\}$ donc F est un $\mathbb{R}$-sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
6. $F = \{x(1+i), x \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}_{\mathbb{R}}\{1+i\}$ donc F est un $\mathbb{R}$-sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}$.
   En revanche, ce n'est pas un $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}$ car $1+i \in F$ mais $i(1+i) = -1+i \notin F$.
7. F n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ car $(-1,1,0) \in F$ mais $2(-1,1,0) = (-2,2,0) \notin F$.
8. $F = \{x(0,1)+y(3,0)+z(2,0)|(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\} = \text{Vect}_{\mathbb{R}}\{(0,1),(3,0),(2,0)\}$ donc F est un $\mathbb{R}$-sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ (mais pas un $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^2$ car $i(0,1) \notin F$).
9. F n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ car $(0,0,0) \notin F$.
10. $F = \{(x,y,x+y)|(x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \{x(1,0,1)+y(0,1,1)|(x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}\{(1,0,1),(0,1,1)\}$ donc F est un $\mathbb{R}$-sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ (mais n'est pas un $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^3$ car $i((1,0,1) \notin F)$.
11. Montrons que F est un $\mathbb{R}$-sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}$.
    Tout d'abord, $F \neq \emptyset$ car $0 \in F$.
    Ensuite, soient $(z_1,z_2) \in F^2$, soient $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.
    Montrons que $\lambda z_1 + \mu z_2 \in F$. On a

$$\begin{aligned} i(\lambda z_1 + \mu z_2) + \overline{\lambda z_1 + \mu z_2} &= i\lambda z_1 + i\mu z_2 + \lambda\overline{z_1} + \mu\overline{z_2} \quad \text{car } (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \\ &= \lambda(iz_1 + \overline{z_1}) + \mu(iz_2 + \overline{z_2}) \\ &= 0 \quad \text{car } (z_1,z_2) \in F^2 \end{aligned}$$

    donc F est bien un $\mathbb{R}$-sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}$.
    En revanche, F nest pas un $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}$.
    En effet, $1+i \in F$ (car $i(1+i) + \overline{1+i} = i-1+1-i = 0$) mais $i(1+i) = -1+i \notin F$ (car $i(-1+i) + \overline{-1+i} = -i-1-1-i = -2-2i \neq 0$).

Exercice 2.

1.

$$\begin{aligned} F &= \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3|z = x+iy\} \\ &= \{(x,y,x+iy)|(x,y) \in \mathbb{C}^2\} \\ &= \{x(1,0,1) + y(0,1,i)|(x,y) \in \mathbb{C}^2\} \\ &= \text{Vect}\{(1,0,1),(0,1,i)\} \end{aligned}$$

donc F est bien un $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^3$.

2. (a) On a $1+i(-i)-2=1+1-2=0$ donc $e\in F$.
   De même, $1+i(-2i)-3=1+2-3=0$ donc $f\in F$.
   (b) Le vecteur u est bien combinaison linéaire de e et f car $u=2e-f$. Il est également combinaison linéaire des vecteurs v et w car $u=v-w$.
   (c) D'après la première question la famille $((1,0,1),(0,1,i))$ est une famille génératrice de F. Or, elle est également libre car les deux vecteurs ne sont pas colinéaires. C'est donc une base de F et on en déduit que $\dim(F)=2$.
   Les vecteurs e et f étant libres, on en déduit que $\dim(\mathrm{Vect}\{e,f\})=2$. Or, puisque $(e,f)\in F^2, \mathrm{Vect}\{e,f\}\subset F$ donc par égalité des dimensions, on en déduit que $\mathrm{Vect}\{e,f\}=F$.
   Nécessairement, tout vecteur de F est combinaison linéaire de e et f.

Exercice 3.

1. $F=\{a(-1,1,0,0,-6)+b(0,0,1,-1,0)|(a,b)\in\mathbb{R}^2\}=\mathrm{Vect}\{(-1,1,0,0,-6),(0,0,1,-1,0)\}$ donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$.
2. Cherchons des vecteurs de $\mathbb{R}^5$ orthogonaux à tous les vecteurs de F. Pour cela, il suffit de trouver (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) tel que

$$\left\{\begin{array}{lcl}(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\cdot(-1,1,0,0,-6) & = & 0\\ (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\cdot(0,0,1,-1,0) & = & 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl}-x_1+x_2-6x_5 & = & 0\\ x_3-x_4 & = & 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl}x_2 & = & x_1+6x_5\\ x_3 & = & x_4\end{array}\right.$$

d'où

$$(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=(x_1,x_1+6x_5,x_4,x_4,x_5)=x_1(1,1,0,0,0)+x_4(0,0,1,1,0)+x_5(0,6,0,0,1).$$

Ainsi, tous les vecteurs de F sont orthogonaux aux trois vecteurs $(1,1,0,0,0),(0,0,1,1,0),(0,6,0,0,1)$.
En fait, on peut montrer que

$$(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\in F \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl}(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\cdot(1,1,0,0,0) & = & 0\\ (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\cdot(0,0,1,1,0) & = & 0\\ (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\cdot(0,6,0,0,1) & = & 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl}x_1+x_2 & = & 0\\ x_3+x_4 & = & 0\\ 6x_2+x_5 & = & 0\end{array}\right.$$

Exercice 4. • Si $F\subset G$, alors $F\cup G=G$ et si $G\subset F$, alors $F\cup G=F$. Dans ces deux cas, puisque F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, il est clair que $F\cup G$ est un sous-espace vectoriel de E.

• Supposons que $F\cup G$ est un sous-espace vectoriel de E. Montrons qu'on a nécessairement $F\subset G$ ou $G\subset F$.

Si $F\subset G$, le résultat est vrai.

Supposons que F n'est pas inclus dans G et montrons qu'alors G est nécessairement inclus dans F.

Soit $x\in G$. Il s'agit de montrer que $x\in F$.

Puisque F n'est pas inclus dans G, il existe un élément $y\in F$ tel que $y\notin G$.

On a alors $x\in F\cup G$ et $y\in F\cup G$.

Notons $z=x+y$. Puisque $F\cup G$ est un sous-espace vectoriel de E par hypothèse, on en déduit que $z\in F\cup G$, i.e. $z\in F$ ou $z\in G$.

Si $z\in G$, alors $y=z-x\in G$ puisque $(z,x)\in G^2$ et G est un sous-espace vectoriel de E. Mais $y\notin G$ donc il est impossible que z appartienne à G.

Nécessairement, $z\in F$ donc $x=z-y\in F$ puisque $(z,y)\in F^2$ et F est un sous-espace vectoriel de E.

On a donc bien montré que $x\in F$, ce qui prouve l'inclusion $G\subset F$.

Finalement, on a bien montré l'équivalence $F\cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F\subset G$ ou $G\subset F$.

Exercice 5.

1. Les deux vecteurs sont colinéaires puisque $(27,-9,21) = 3(9,-3,7)$ donc la famille n'est pas libre.
   Puisqu'elle contient strictement moins que trois éléments, elle n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^3$ non plus.
2. La famille n'est pas libre puisque les deux premiers vecteurs sont colinéaires.
   Ainsi, $\text{Vect}\{(9,-3,7),(27,-9,21),(5,-5,1)\} = \text{Vect}\{(9,-3,7),(5,-5,1)\} \neq \mathbb{R}^3$ car une famille de deux vecteurs ne peut pas engendrer $\mathbb{R}^3$.
3. La famille n'est pas libre puisqu'elle contient le vecteur nul.
   Ainsi $\text{Vect}\{(1,2,2),(5,6,6),(0,0,0)\} = \text{Vect}\{(1,2,2),(5,6,6)\} \neq \mathbb{R}^3$ car une famille de deux vecteurs ne peut pas engendrer $\mathbb{R}^3$.
4. La famille est libre puisque les deux vecteurs ne sont pas colinéaires. En revanche, elle n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^3$ car elle ne contient que deux éléments.
5. Montrons que la famille est libre. Soient $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\alpha(1,-1,0) + \beta(0,1,-1) + \gamma(1,1,0) = (0,0,0) \Leftrightarrow (\alpha+\gamma, -\alpha+\beta+\gamma, -\beta) = (0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} \alpha+\gamma & = & 0 \\ -\alpha+\beta+\gamma & = & 0 \\ -\beta & = & 0 \end{array}\right. \overset{L_2 \leftarrow L_2+L_1}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{ccc} \alpha+\gamma & = & 0 \\ 2\gamma & = & 0 \\ \beta & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} \alpha & = & 0 \\ \gamma & = & 0 \\ \beta & = & 0 \end{array}\right.$$

   donc la famille est libre. Puisque c'est une famille libre constituée de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$, elle est également génératrice de $\mathbb{R}^3$: c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.
6. La famille contient quatre vecteurs dans $\mathbb{R}^3$, elle ne peut donc pas être libre.
   Montrons que la famille $((1,0,-2);(2,3,1);(1,0,1))$ est libre.
   Soient $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\alpha(1,0,-2) + \beta(2,3,1) + \gamma(1,0,1) = (0,0,0) \Leftrightarrow (\alpha+2\beta+\gamma, 3\beta, -2\alpha+\beta+\gamma) = (0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} \alpha+2\beta+\gamma & = & 0 \\ 3\beta & = & 0 \\ -2\alpha+\beta+\gamma & = & 0 \end{array}\right. \overset{L_3 \leftarrow L_3+2L_1}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{ccc} \alpha+\gamma & = & 0 \\ \beta & = & 0 \\ 3\gamma & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} \alpha & = & 0 \\ \gamma & = & 0 \\ \beta & = & 0 \end{array}\right.$$

   donc la famille $((1,0,-2);(2,3,1);(1,0,1))$ est libre. Puisque c'est une famille libre consituée de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$, elle est également génératrice de $\mathbb{R}^3$: c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$ et on a $\text{Vect}\{(1,0,-2);(2,3,1);(1,0,1)\} = \mathbb{R}^3$.
   Or,

$$\mathbb{R}^3 = \text{Vect}\{(1,0,-2);(2,3,1);(1,0,1)\} \subset \text{Vect}\{(1,0,-2);(2,3,1);(7,9,5);(1,0,1)\} \subset \mathbb{R}^3$$

   donc $\text{Vect}\{(1,0,-2);(2,3,1);(7,9,5);(1,0,1)\} = \mathbb{R}^3$, ce qui prouve que la famille

$$((1,0,-2);(2,3,1);(7,9,5);(1,0,1))$$

   est génératrice dans $\mathbb{R}^3$ (mais n'est pas libre, ce n'est donc pas une base de $\mathbb{R}^3$).

Exercice 6.

1. On a $F = \{s(4,-5,-1,-2) | s \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}\{(4,-5,-1,-2)\}$ donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

De même,

$$\begin{array}{rcl} G & = & \{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 | x=-y+5z-2t\} \\ & = & \{(-y+5z-2t,y,z,t)|(y,z,t)\in\mathbb{R}^3\} \\ & = & \{y(-1,1,0,0)+z(5,0,1,0)+t(-2,0,0,1)|(y,z,t)\in\mathbb{R}^3\} \\ & = & \text{Vect}\{(-1,1,0,0);(5,0,1,0);(-2,0,0,1)\} \end{array}$$

donc G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

2. On a $4+(-5)-5(-1)+2(-2)=0$ donc $(4,-5,-1,-2)\in G$.
   Ainsi, $F=\text{Vect}\{(4,-5,-1,-2)\}\subset G$.
3. Montrons que la famille $((-1,1,0,0);(5,0,1,0);(-2,0,0,1))$ est libre.
   Soit $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$ tel que

   $$\alpha(-1,1,0,0)+\beta(5,0,1,0)+\gamma(-2,0,0,1)=(0,0,0,0)\Leftrightarrow(-\alpha+5\beta-2\gamma,\alpha,\beta,\gamma)=(0,0,0,0)$$

   donc $\alpha=\beta=\gamma=0$.
   C'est donc une famille libre qui engendre G donc $\dim(G)=3$.
   On sait que le vecteur $(4,-5,-1,-2)$ consitute une base de F et appartient à G.
   Montrons que la famille $((4,-5,-1,-2),(-1,1,0,0),(-2,0,0,1))$ est libre.
   Soit $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$ tel que

   $$\alpha(4,-5,-1,-2)+\beta(-1,1,0,0)+\gamma(-2,0,0,1)=(0,0,0,0)$$

   $$\Leftrightarrow(4\alpha-\beta-2\gamma,-5\alpha+\beta,-\alpha,-2\alpha+\gamma)=(0,0,0,0)$$

   donc $\alpha=\beta=\gamma=0$.
   C'est une famille libre contenant des vecteurs de G. Puisque $\dim(G)=3$, on en déduit que c'est une base de G.

Exercice 7.

1. $E=\{(x,y,x+y)|(x,y)\in\mathbb{R}^2\}=\{x(1,0,1)+y(0,1,1)|(x,y)\in\mathbb{R}^2\}=\text{Vect}\{(1,0,1),(0,1,1)\}$ donc E est un $\mathbb{R}$-sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de base $((1,0,1),(0,1,1))$ puisque ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires.
   De même,

   $$F=\{(x,x+z,z)|(x,z)\in\mathbb{R}^2\}=\{x(1,1,0)+z(0,1,1)|(x,y)\in\mathbb{R}^2\}=\text{Vect}\{(1,1,0),(0,1,1)\}$$

   donc F est un $\mathbb{R}$-sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de base $((1,1,0),(0,1,1))$ puisque ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires.
   Enfin, on a

   $$(x,y,z)\in E\cap F\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl} x+y-z & = & 0 \\ x-y+z & = & 0\end{array}\right. \overset{L_2\leftarrow L_2-L_1}{\Longleftrightarrow}\left\{\begin{array}{rcl} x+y-z & = & 0 \\ -2y+2z & = & 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & z\end{array}\right.$$

   donc $(x,y,z)=z(0,1,1)$. Ainsi, $E\cap F=\text{Vect}\{(0,1,1)\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de base $(0,1,1)$.
2. $E=\{x(1,0,0)+y(0,1,2)|(x,y)\in\mathbb{C}^2\}=\text{Vect}\{(1,0,0),(0,1,2)\}$ donc E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^3$ de base $((1,0,0),(0,1,2))$ puisque ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires.
   De même, $F=\{(0,2iz,z)|z\in\mathbb{C}\}=\{z(0,2i,1)|z\in\mathbb{C}\}=\text{Vect}\{(0,2i,1)\}$ donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^3$ de base $(0,2i,1)$.

On a

$$(x,y,z)\in E\cap F \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} z &=& 2y \\ x &=& 0 \\ y &=& 2iz \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} z &=& 2y \\ x &=& 0 \\ y &=& 4iy \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} z &=& 0 \\ x &=& 0 \\ y &=& 0 \end{array}\right.$$

donc $E\cap F=\{0\}$.

3. On a

$$\begin{array}{lcl} (x,y,z,t,u,v)\in E & \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{ccc} x+2y+z-t-3u &=& 0 \\ 2x+y+z-2u-v &=& 0 \\ x+y+z-t-2v &=& 0 \end{array}\right. \\ & \overset{\substack{L_2\leftarrow L_2-2L_1 \\ L_3\leftarrow L_3-L_1}}{\Longleftrightarrow} & \left\{\begin{array}{ccc} x+2y+z-t-3u &=& 0 \\ -3y-z+2t+4u-v &=& 0 \\ -y+3u-2v &=& 0 \end{array}\right. \\ & \overset{L_3\leftarrow 3L_3-L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{\begin{array}{ccc} x+2y+z-t-3u &=& 0 \\ -3y-z+2t+4u-v &=& 0 \\ z-2t+5u-5v &=& 0 \end{array}\right. \\ & \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{lcc} x &=& -t+2u-v \\ y &=& 3u-2v \\ z &=& 2t-5u+5v \end{array}\right. \\ & \Leftrightarrow & (x,y,z,t,u,v)=(-t+2u-v,3u-2v,2t-5u+5v,t,u,v) \end{array}$$

donc $(x,y,z,t,u,v)=t(-1,0,2,1,0,0)+u(2,3,-5,0,1,0)+v(-1,-2,5,0,0,1)$ donc $E=\text{Vect}\{(-1,0,2,1,0,0),(2,3,-5,0,1,0),(-1,-2,5,0,0,1)\}$. Vérifions que ces trois vecteurs forment une famille libre.
Soit $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$ tel que

$$\begin{array}{ll} & \alpha(-1,0,2,1,0,0)+\beta(2,3,-5,0,1,0)+\gamma(-1,-2,5,0,0,1)=(0,0,0,0,0,0) \\ \Leftrightarrow & (-\alpha+2\beta-\gamma,3\beta-2\gamma,2\alpha-5\beta+5\gamma,\alpha,\beta,\gamma)=(0,0,0,0,0,0) \\ \Leftrightarrow & \alpha=\beta=\gamma=0 \end{array}$$

donc la famille est libre et forme une base de E.
De même, on a

$$\begin{array}{lcl} F &=& \{a(1,1,1,1,-1,0)+b(0,1,0,1,2,1)+c(1,-1,1,0,1,0)\} \\ &=& \text{Vect}\{(1,1,1,1,-1,0),(0,1,0,1,2,1),(1,-1,1,0,1,0)\}. \end{array}$$

Vérifions que ces trois vecteurs forment une famille libre.
Soit $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$ tel que

$$\begin{array}{ll} & \alpha(1,1,1,1,-1,0)+\beta(0,1,0,1,2,1)+\gamma(1,-1,1,0,1,0)=(0,0,0,0,0,0) \\ \Leftrightarrow & (\alpha+\gamma,\alpha+\beta-\gamma,\alpha+\gamma,\alpha+\beta,-\alpha+2\beta+\gamma,\beta)=(0,0,0,0,0,0) \\ \Leftrightarrow & \alpha=\beta=\gamma=0 \end{array}$$

donc la famille est libre et forme une base de F.

Déterminons $E \cap F$. On a

$$
\begin{array}{rl}
& (x,y,z,t,u,v) \in E \cap F \\
\Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{ccc} \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, (x,y,z,t,u,v) & = & (a+c, a+b-c, a+c, b+a, c-a+2b, b) \\ 3a+b+c & = & -3a+6b+4c \\ 3a+b+c & = & -3a+5b+c \\ 3a+b+c & = & a+3b \end{array} \right. \\
\Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{ccc} \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, (x,y,z,t,u,v) & = & (a+c, a+b-c, a+c, b+a, c-a+2b, b) \\ 6a-5b-3c & = & 0 \\ 6a-4b & = & 0 \\ 2a-2b+c & = & 0 \end{array} \right. \\
\Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{ccc} \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, (x,y,z,t,u,v) & = & (a+c, a+b-c, a+c, b+a, c-a+2b, b) \\ -\frac{9}{2}a & = & 0 \\ b & = & \frac{3}{2}a \\ c & = & a \end{array} \right.
\end{array}
$$

donc $a = b = c = 0$ d'où $E \cap F = \{0\}$.

Exercice 8.

1. Puisque ce sont des familles de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ contenant chacune trois vecteurs, il suffit de montrer qu'elles sont libres pour justifier que ce sont des bases de $\mathbb{R}^3$.
   • Montrons que la famille $\mathcal{B}$ est libre.
   Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que

   $$\alpha(1,-1,-2)+\beta(1,-1,-3)+\gamma(0,1,-2) = (0,0,0) \Leftrightarrow (\alpha+\beta, -\alpha-\beta+\gamma, -2\alpha-3\beta-2\gamma) = (0,0,0)$$

   $$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} \alpha+\beta & = & 0 \\ -\alpha-\beta+\gamma & = & 0 \\ -2\alpha-3\beta-2\gamma & = & 0 \end{array} \right. \overset{\substack{L_2 \leftarrow L_2+L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3+2L_1}}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{ccc} \alpha+\beta & = & 0 \\ \gamma & = & 0 \\ -\beta-2\gamma & = & 0 \end{array} \right.$$

   d'où $\alpha = \beta = \gamma = 0$, ce qui prouve que la famille $\mathcal{B}$ est libre et est donc bien une base de $\mathbb{R}^3$.
   • Montrons que la famille $\mathcal{B}'$ est libre.
   Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que

   $$\alpha(1,1,1)+\beta(1,2,4)+\gamma(1,3,9) = (0,0,0) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} \alpha+\beta+\gamma & = & 0 \\ \alpha+2\beta+3\gamma & = & 0 \\ \alpha+4\beta+9\gamma & = & 0 \end{array} \right.$$

   $$\overset{\substack{L_2 \leftarrow L_2-L_1 \\ L_3-L_1}}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{ccc} \alpha+\beta+\gamma & = & 0 \\ \beta+2\gamma & = & 0 \\ 3\beta+8\gamma & = & 0 \end{array} \right. \overset{L_3 \leftarrow L_3-3L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{ccc} \alpha+\beta+\gamma & = & 0 \\ \beta+2\gamma & = & 0 \\ 6\gamma & = & 0 \end{array} \right.$$

   d'où $\alpha = \beta = \gamma = 0$, ce qui prouve que la famille $\mathcal{B}'$ est libre et est donc bien une base de $\mathbb{R}^3$.
2. (a) Cherchons $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que

   $$\alpha(1,-1,-2)+\beta(1,-1,-3)+\gamma(0,1,-2) = (1,2,3) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} \alpha+\beta & = & 1 \\ -\alpha-\beta+\gamma & = & 2 \\ -2\alpha-3\beta-2\gamma & = & 3 \end{array} \right.$$

   $$\overset{\substack{L_2 \leftarrow L_2+L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3+2L_1}}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{ccc} \alpha+\beta & = & 1 \\ \gamma & = & 3 \\ -\beta-2\gamma & = & 5 \end{array} \right.$$

d'où $\gamma = 3$, puis $\beta = -11$ et enfin $\alpha = 12$.
Ainsi, $(1,2,3) = 12(1,-1,-2) - 11(1,-1,-3) + 3(0,1,-2)$ donc les coordonnées de $(1,2,3)$ dans la base $\mathcal{B}$ sont $(12,-11,3)$.

(b) Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Cherchons $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\alpha(1,-1,-2) + \beta(1,-1,-3) + \gamma(0,1,-2) = (x,y,z) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta & = & x \\ -\alpha-\beta+\gamma & = & y \\ -2\alpha-3\beta-2\gamma & = & z \end{cases}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\Longleftrightarrow}} \begin{cases} \alpha+\beta & = & x \\ \gamma & = & x+y \\ -\beta-2\gamma & = & 2x+z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha & = & 5x+2y+z \\ \beta & = & -4x-2y-z \\ \gamma & = & x+y \end{cases}$$

donc les coordonnées du vecteur $u = (x,y,z)$ dans la base $\mathcal{B}$ sont

$$(5x+2y+z, -4x-2y-z, x+y).$$

3. On a $u = (1,-1,-2)+2(1,-1,-3)+3(0,1,-2) = (3,0,-14)$ et on cherche $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$(3,0,-14) = \alpha(1,1,1) + \beta(1,2,4) + \gamma(1,3,9) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta+\gamma & = & 3 \\ \alpha+2\beta+3\gamma & = & 0 \\ \alpha+4\beta+9\gamma & = & -14 \end{cases}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Longleftrightarrow}} \begin{cases} \alpha+\beta+\gamma & = & 3 \\ \beta+2\gamma & = & -3 \\ 3\beta+8\gamma & = & -17 \end{cases} \overset{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \alpha+\beta+\gamma & = & 3 \\ \beta+2\gamma & = & -3 \\ 2\gamma & = & -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha & = & 2 \\ \beta & = & 5 \\ \gamma & = & -4 \end{cases}$$

On a donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Exercice 9.

1. Les vecteurs c et d n'étant pas colinéaires, ils forment une famille libre.
   On remarque que $a = \dfrac{1}{2}c - \dfrac{1}{2}d$ donc $a \in \mathrm{Vect}\{c,d\}$. De même, $b = \dfrac{1}{2}c + \dfrac{1}{2}d$ donc $b \in \mathrm{Vect}\{c,d\}$.
   Finalement, $\mathrm{Vect}\{a,b,c,d\} = \mathrm{Vect}\{c,d\}$ donc (c,d) est une base de $\mathrm{Vect}\{a,b,c,d\}$.
2. On a $v = -\frac{2}{3}u$ donc $\mathrm{Vect}\{u,v\} = \mathrm{Vect}\{u\}$, ce qui signifie que le vecteur u constitue une base de $\mathrm{Vect}\{u,v\}$.

Exercice 10.

1. On a
$$(e_1-e_2) + (e_2-e_3) + \cdots + (e_{p-1}-e_p) + (e_p-e_1) = 0_E$$
   donc la famille $(e_1-e_2, e_2-e_3, \ldots, e_{p-1}-e_p, e_p-e_1)$ est liée.
2. Soit $(\lambda_1,\ldots,\lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que
$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2(e_1+e_2) + \cdots + \lambda_p(e_1+\cdots+e_p) = 0$$
$$\Leftrightarrow (\lambda_1+\cdots+\lambda_p)e_1 + (\lambda_2+\cdots+\lambda_p)e_2 + \cdots + (\lambda_{p-1}+\lambda_p)e_{p-1} + \lambda_p e_p = 0.$$

Puisque la famille $(e_1, \dots, e_p)$ est libre, on en déduit que

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 + \cdots + \lambda_p & = & 0 \\ \lambda_2 + \cdots + \lambda_p & = & 0 \\ \vdots & = & 0 \\ \lambda_{p-1} + \lambda_p & = & 0 \\ \lambda_p & = & 0 \end{array}\right.$$

d'où $\lambda_p = 0$ puis $\lambda_{p-1} = 0$, puis par récurrence descendante, on en déduit que pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $\lambda_k = 0$, ce qui prouve que la famille $(e_1, e_1 + e_2, \dots, e_1 + \cdots + e_p)$ est libre.

Exercice 11.

1. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{K}^3$ tel que

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1(e_1 + e_2) + \lambda_2 e_3 + \lambda_3(e_1 - e_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda_1 + \lambda_3)e_1 + (\lambda_1 - \lambda_3)e_2 + \lambda_2 e_3 = 0.$$

Puisque la famille (e_1, e_2, e_3) est libre, on en déduit que

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 + \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_1 - \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 & = & -\lambda_3 \\ \lambda_2 & = & 0 \\ -2\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

d'où $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, ce qui prouve que la famille (f_1, f_2, f_3) est libre.

2. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{K}^3$ tel que

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_4 + \lambda_3 f_5 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1(e_1 + e_2) + \lambda_2(e_3 - e_1) + \lambda_3(e_3 + 2e_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)e_1 + (\lambda_1 + 2\lambda_3)e_2 + (\lambda_2 + \lambda_3)e_3 = 0.$$

Puisque la famille (e_1, e_2, e_3) est libre, on en déduit que

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 - \lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. \overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 - \lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. \overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 - \lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 & = & 0 \\ -\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, ce qui prouve que la famille (f_1, f_4, f_5) est libre.

3. La famille (f_1, f_2, f_3, f_4) est libre est constituée de 4 vecteurs de E. Or, $\dim(E) = 3$ donc la famille (f_1, f_2, f_3, f_4) est nécessairement liée.
En effet, on a $f_4 = -\frac{1}{2}f_1 + f_2 - \frac{1}{2}f_3$.

Exercice 12. Il s'agit de calculer le rang de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \overset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - aL_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 - a^2 & 1 - a \\ 0 & 1 - a & a - 1 \end{pmatrix} \overset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 - a & a - 1 \\ 0 & 1 - a^2 & 1 - a \end{pmatrix}$$

$$\overset{L_3 \leftarrow L_3 - (1+a)L_2}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 - a & a - 1 \\ 0 & 0 & -a^2 - a + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 - a & a - 1 \\ 0 & 0 & -(a-1)(a+2) \end{pmatrix}.$$

• Si $a \notin \{1, -2\}$, la matrice est de rang 3 donc $\dim(\mathrm{Vect}\{(a,1,1), (1,a,1), (1,1,a)\}) = 3$.
• Si $a = 1$, la matrice est de rang 1 donc $\dim(\mathrm{Vect}\{(a,1,1), (1,a,1), (1,1,a)\}) = 1$.
• Si $a = -2$, la matrice est de rang 2 donc $\dim(\mathrm{Vect}\{(a,1,1), (1,a,1), (1,1,a)\}) = 2$.

Exercice 13.

1. Les vecteurs e_1 et e_2 ne sont pas colinéaires et $e_3 = 2e_2 - e_1$ donc $F = \mathrm{Vect}\{e_1, e_2\}$. Ainsi, $\dim(F) = 2$.
2. Posons $e_3' = (1,0,0,0)$ et $e_4' = (0,1,0,0)$. Montrons que (e_1, e_2, e_3', e_4') forme une famille libre de $\mathbb{R}^4$.
   Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$\lambda_1 e_1+\lambda_2 e_2+\lambda_3 e_3'+\lambda_4 e_4' = (0,0,0,0) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 & = & 0 \\ -2\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_4 & = & 0 \\ 5\lambda_1 + \lambda_2 & = & 0 \\ -3\lambda_1 - 4\lambda_2 & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 & = & 0 \\ -2\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_4 & = & 0 \\ \lambda_2 & = & -5\lambda_1 \\ 17\lambda_1 & = & 0 \end{array}\right.$$

   ce qui équivaut à $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = (0,0,0,0)$.
   Ainsi, la famille (e_1, e_2, e_3', e_4') à 4 est une famille libre à 4 éléments de $\mathbb{R}^4$ qui est de dimension 4 : c'est donc une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 14. On a $\dim(F) = \dim(G) = 2$ car ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ engendrés par 2 vecteurs non colinéaires.
Ainsi $F = G \Leftrightarrow F \subset G \Leftrightarrow G \subset F$.
• Vérifions si $(0,2,-1) \in F$. Pour cela cherchons des réels $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$(0,2,-1) = \alpha(1,3,-1)+\beta(1,-3,2) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} \alpha + \beta & = & 0 \\ 3\alpha - 3\beta & = & 2 \\ -\alpha + 2\beta & = & -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} \beta & = & -\alpha \\ 6\alpha & = & 2 \\ -3\alpha & = & -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} \alpha & = & \frac{1}{3} \\ \beta & = & -\frac{1}{3} \end{array}\right.$$

donc $(0,2,-1) = \dfrac{1}{3}(1,3,-1) - \dfrac{1}{3}(1,-3,2)$, ce qui prouve que $(0,2,-1) \in F$.
• Vérifions si $(1,9,-4) \in F$. Pour cela cherchons des réels $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$(1,9,-4) = \alpha(1,3,-1) + \beta(1,-3,2) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} \alpha + \beta & = & 1 \\ 3\alpha - 3\beta & = & 9 \\ -\alpha + 2\beta & = & -4 \end{array}\right. \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1}{\Longleftrightarrow}} \left\{\begin{array}{ccc} \alpha + \beta & = & 1 \\ -6\beta & = & 6 \\ 3\beta & = & -3 \end{array}\right.$$

ce qui équivaut à $\beta = -1$ et $\alpha = 2$ donc $(1,9,-4) = 2(1,3,-1) - (1,-3,2)$.
On a donc $\{(0,2,-1),(1,9,-4)\} \subset F$ donc $G = \mathrm{Vect}\,\{(0,2,-1),(1,9,-4)\} \subset F$ et puisque $\dim(F) = \dim(G)$, on a bien $F = G$.

Exercice 15.

1. Vérifions si la famille est libre. Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\alpha(1,-2,3,1)+\beta(4,5,6,7)+\gamma(1,0,2,3) = (0,0,0,0) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} \alpha + 4\beta + \gamma & = & 0 \\ -2\alpha + 5\beta & = & 0 \\ 3\alpha + 6\beta + 2\gamma & = & 0 \\ \alpha + 7\beta + 3\gamma & = & 0 \end{array}\right. \overset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left\{\begin{array}{ccc} \alpha + 4\beta + \gamma & = & 0 \\ 13\beta + 2\gamma & = & 0 \\ -6\beta - \gamma & = & 0 \\ 3\beta + 2\gamma & = & 0 \end{array}\right. \overset{\substack{L_3 \leftarrow 13L_3 + 6L_2 \\ L_4 \leftarrow 13L_4 - 3L_2}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{ccc} \alpha + 4\beta + \gamma & = & 0 \\ 13\beta + 2\gamma & = & 0 \\ -\gamma & = & 0 \\ 20\gamma & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

   donc la famille est libre. Le rang de la famille est donc égal à 3.

2. Déterminons le rang de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 8 \\ 1 & 3 & -4 & 1 \\ -2 & -1 & -7 & -7 \\ -3 & -4 & -3 & -8 \end{pmatrix} \overset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 2L_1 \\ L_5 \leftarrow L_5 + 3L_1}}{\iff} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & -6 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \overset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \\ L_5 \leftarrow L_5 + L_2}}{\iff} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -0 \\ 0 & 0 & 0 & -0 \\ 0 & 0 & 0 & -0 \end{pmatrix}$$

donc la famille est de rang 2.

Exercice 16.

1. $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^4) = 4$.
2. Déterminons le rang de la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & -i & 0 & 3i \\ i & 0 & -1 & -2-i \\ 1+i & 2-i & 0 & 3i \\ -i & 1+i & 1 & -5-i \end{pmatrix} \overset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - iL_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - (1+i)L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + iL_1}}{\iff} \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 & 3i \\ 0 & -1 & -1 & 1-i \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2+i & 1 & -8-i \end{pmatrix} \overset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + (2+i)L_2}}{\iff}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -i & 0 & 3i \\ 0 & -1 & -1 & 1-i \\ 0 & 0 & -1 & 4-i \\ 0 & 0 & -1-i & -5-2i \end{pmatrix} \overset{L_4 \leftarrow L_4 - (1+i)L_3}{\iff} \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 & 3i \\ 0 & -1 & -1 & 1-i \\ 0 & 0 & -1 & 4-i \\ 0 & 0 & 0 & -10-5i \end{pmatrix}$$

donc la matrice est de rang 4, i.e. le $\mathbb{C}$-espace vectoriel engendré par cette famille est de dimension 4. On en déduit que cette famille est une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^4$.

3. $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^4) = 8$.
Puisque la famille est libre dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^4$, elle reste libre dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^4$ donc elle engendre un $\mathbb{R}$-sous-espace vectoriel de dimension 4 dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^4$, qui est de dimension 8. Ainsi, cette famille n'est pas une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^4$.

Exercice 17. On sait que $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1$. Puisque la famille $(L_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ contient $n+1$ vecteurs de $\mathbb{R}_n[X]$, il suffit de prouver qu'elle est libre pour montrer que c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \lambda_i L_i = 0$.

Soit $j \in [\![0, n]\!]$.

En appliquant le polynôme $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \lambda_i L_i$ au réel x_j, il vient

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i L_i(x_j) = 0.$$

Or, $L_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$ donc la somme devient $\lambda_j L_j(x_j) = 0$, i.e. $\lambda_j = 0$.
Ceci étant valable pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, on en déduit que pour tout $i \in [\![0, n]\!], \lambda_i = 0$ donc la famille $(L_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ est libre, ce qui prouve que c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 18.

1. • Tout d'abord, $0_E \in F \cap G$ donc $0_E = 0_E + 0_E \in F + G$.
   • Soient $(u, v) \in (F+G)^2$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que $\lambda u + v \in F + G$.
   Puisque $u \in F + G$, il existe $(u_F, u_G) \in F \times G$ tel que $u = u_F + u_G$. De même, il existe $(v_F, v_G) \in F \times G$ tel que $v = v_F + v_G$.
   Ainsi, $\lambda u + v = \lambda(u_F + u_G) + (v_F + v_G) = (\lambda u_F + v_F) + (\lambda u_G + v_G)$.
   Puisque $(u_F, v_F) \in F^2$ et que F est un sous-espace vectoriel de E, on a $\lambda u_F + v_F \in F$. De même, puisque $(u_G, v_G) \in G^2$ et que G est un sous-espace vectoriel de E, on a $\lambda u_G + v_G \in G$ donc on a bien $\lambda u + v \in F + G$.
   Ces deux points prouvent que $F + G$ est bien un sous-espace vectoriel de E.
2. Notons $p = \dim(F), q = \dim(G)$ et considérons $(f_1, \ldots, f_p)$ et $(g_1, \ldots, g_q)$ deux bases respectives de F et G.
   Soit $u \in F + G$. Il existe $(u_F, u_G) \in F \times G$ tel que $u = u_F + u_G$.
   Puisque $(f_1, \ldots, f_p)$ est une base de F, il existe des réels $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tels que $u_F = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k f_k$.
   De même, puisque $(g_1, \ldots, g_q)$ est une base de G, il existe des réels $(\mu_1, \ldots, \mu_q) \in \mathbb{R}^q$ tels que $u_G = \sum_{k=1}^{q} \mu_k g_k$.
   Ainsi, $u = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k f_k + \sum_{k=1}^{q} \mu_k g_k$, ce qui prouve que la famille $(f_1, \ldots, f_p, g_1, \ldots, g_q)$ est une famille génératrice de $F + G$ à $p + q$ éléments.
   Puisque le cardinal d'une famille génératrice d'un espace vectoriel est toujours supérieur ou égal à la dimension de cet espace vectoriel, on a bien
   $$\dim(F + G) \leqslant p + q = \dim(F) + \dim(G).$$
3. On reprend les notations de la question précédente. Montrons que si $F \cap G = \{0_E\}$, la famille $(f_1, \ldots, f_p, g_1, \ldots, g_q)$ est libre.
   Soient $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p, \mu_1, \ldots, \mu_q) \in \mathbb{R}^{p+q}$ tel que
   $$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k f_k + \sum_{k=1}^{q} \mu_k g_k = 0_E \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{p} \lambda_k f_k = -\sum_{k=1}^{q} \mu_k g_k \in F \cap G = \{0_E\}$$
   donc $\sum_{k=1}^{p} \lambda_k f_k = \sum_{k=1}^{q} \mu_k g_k = 0_E$.
   Puisque les familles $(f_1, \ldots, f_p)$ et $(g_1, \ldots, g_q)$ sont libres, on en déduit que pour tout $k \in [\![1, p]\!], \lambda_k = 0$ et pour tout $k \in [\![1, q]\!], \mu_k = 0$.
   Ainsi, la famille $(f_1, \ldots, f_p, g_1, \ldots, g_q)$ est libre et d'après la question précédente, elle engendre $F + G$.
   C'est donc une base de $F+G$ et on en déduit que $\dim(F+G) = p+q = \dim(F)+\dim(G)$.

Exercice 19.

1. On sait que $M_2(\mathbb{R})$ est l'espace des matrices 2×2 à coefficients réels : il y a 4 coefficients libres, donc
   $$\dim\big(M_2(\mathbb{R})\big) = 4.$$

2. $\mathcal{E}$ **est un sous-espace de** $M_2(\mathbb{R})$**.**
Soient $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{E}$, et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$M + N = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ 0 & c+c' \end{pmatrix} \in \mathcal{E}, \qquad \lambda M = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ 0 & \lambda c \end{pmatrix} \in \mathcal{E}.$$

De plus la matrice nulle appartient à $\mathcal{E}$. Donc $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel.

(A, B, C) **est une base de** $\mathcal{E}$**.**
Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in \mathcal{E}$. On écrit

$$M = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = aA + bB + cC.$$

Ainsi (A, B, C) engendre $\mathcal{E}$.
Si $\alpha A + \beta B + \gamma C = 0$, alors

$$\alpha A + \beta B + \gamma C = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

d'où $\alpha = \beta = \gamma = 0$: la famille est libre. Donc (A, B, C) est une base de $\mathcal{E}$ et

$$\dim(\mathcal{E}) = 3.$$

3. $\mathcal{E}$ **est stable par multiplication.**
Soient $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{E}$. Alors

$$MN = \begin{pmatrix} aa' & ab' + bc' \\ 0 & cc' \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est encore de la forme $\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$, donc $MN \in \mathcal{E}$.

4. **Si** $M \in \mathcal{E}$ **est inversible, alors** $M^{-1} \in \mathcal{E}$**.**
Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in \mathcal{E}$. On a

$$\det(M) = ac.$$

Ainsi M est inversible si et seulement si $a \neq 0$ et $c \neq 0$.

Cherchons M^{-1} sous la forme $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ telle que $MX = I$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + bz & ay + bt \\ cz & ct \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On obtient le système

$$\begin{cases} ax + bz = 1, \\ ay + bt = 0, \\ cz = 0, \\ ct = 1. \end{cases}$$

Comme $c \neq 0$, on a $z = 0$ et $t = \dfrac{1}{c}$, puis $x = \dfrac{1}{a}$, et enfin

$$ay + b \cdot \frac{1}{c} = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = -\frac{b}{ac}.$$

Donc

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{b}{ac} \\ 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix} \in \mathcal{E}.$$

Exercice 20.

1. Un sous-espace doit contenir la matrice nulle, or $\det(0) = 0 \neq 1$, donc $0 \notin E_1$.
2. Soient $A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} x_1' & x_2' \\ x_3' & x_4' \end{pmatrix}$ dans E_2. Alors
$$A + A' = \begin{pmatrix} x_1 + x_1' & x_2 + x_2' \\ x_3 + x_3' & x_4 + x_4' \end{pmatrix},$$
et l'on vérifie
$$(x_1 + x_1') + (x_2 + x_2') = (x_1 + x_2) + (x_1' + x_2') = x_4 + x_4',$$
donc $A + A' \in E_2$. De même, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda A \in E_2$. Ainsi E_2 est un sous-espace vectoriel.
3. On utilise les propriétés de la transposée :
$$(A + B)^T = A^T + B^T, \qquad (\lambda A)^T = \lambda A^T.$$
Donc la somme de deux matrices symétriques est symétrique, et un multiple scalaire d'une matrice symétrique est encore symétrique : E_3 est un sous-espace vectoriel.

Exercice 21.

1. Soient f, g bornées. Il existe $M_f, M_g \geq 0$ tels que $|f(x)| \leq M_f$ et $|g(x)| \leq M_g$ pour tout x. Alors, pour tout x,
$$|(f + g)(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq M_f + M_g,$$
donc $f + g$ est bornée. De plus, pour $\lambda \in \mathbb{R}$,
$$|(\lambda f)(x)| = |\lambda|\, |f(x)| \leq |\lambda|\, M_f,$$
donc λf est bornée. Enfin, la fonction nulle est bornée. Ainsi, l'ensemble des fonctions bornées est un sous-espace de E.
2. Contre-exemple : $f(x) = -|x|$ est majorée (par 0), car $-|x| \leq 0$. Mais $(-f)(x) = |x|$ n'est pas majorée (elle tend vers $+\infty$). Donc $f \in V$ mais $-f \notin V$: V n'est pas stable par multiplication scalaire, donc ce n'est pas un sous-espace vectoriel.
3. Soient f, g paires et $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour tout x,
$$(f + g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = (f + g)(x),$$
donc $f + g$ est paire. Et
$$(\lambda f)(-x) = \lambda f(-x) = \lambda f(x) = (\lambda f)(x),$$
donc λf est paire. La fonction nulle est paire. Ainsi les fonctions paires forment un sous-espace de E.
4. Prenons $f(x) = x^2$ (paire) et $g(x) = x$ (impaire). Alors $f + g$ vérifie $(f + g)(1) = 2$ et $(f + g)(-1) = 0$, donc $f + g$ n'est ni paire (car $(f + g)(-1) \neq (f + g)(1)$), ni impaire (car $(f + g)(-1) \neq -(f + g)(1)$). Donc l'ensemble « paire ou impaire » n'est pas stable par addition : ce n'est pas un sous-espace vectoriel.

Exercice 22.

1. Soient
$$M=\begin{pmatrix}a&b&c\\0&a&b\\0&0&a\end{pmatrix},\quad N=\begin{pmatrix}a'&b'&c'\\0&a'&b'\\0&0&a'\end{pmatrix}\in E,\quad \lambda\in\mathbb{R}.$$
Alors
$$M+N=\begin{pmatrix}a+a'&b+b'&c+c'\\0&a+a'&b+b'\\0&0&a+a'\end{pmatrix}\in E,\qquad \lambda M=\begin{pmatrix}\lambda a&\lambda b&\lambda c\\0&\lambda a&\lambda b\\0&0&\lambda a\end{pmatrix}\in E.$$
De plus la matrice nulle appartient à E (prendre $a=b=c=0$). Donc E est un sous-espace vectoriel.
2. Posons
$$I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad U=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\quad V=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$
Pour tout $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$,
$$\begin{pmatrix}a&b&c\\0&a&b\\0&0&a\end{pmatrix}=aI+bU+cV,$$
donc (I,U,V) engendre E. Si $\alpha I+\beta U+\gamma V=0$, alors
$$\alpha I+\beta U+\gamma V=\begin{pmatrix}\alpha&\beta&\gamma\\0&\alpha&\beta\\0&0&\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$
d'où $\alpha=\beta=\gamma=0$. La famille est libre : (I,U,V) est une base et
$$\dim(E)=3.$$
3. Avec la base précédente, pour $M\in E$ on a directement
$$M=aI+bU+cV.$$
4. M est triangulaire supérieure, donc
$$\det(M)=a\cdot a\cdot a=a^3.$$
Ainsi M est inversible si et seulement si $a\neq 0$.

Exercice 23.

1. La suite nulle appartient à A (prendre $a=b=0$). Si $u_n=an+b$ et $v_n=a'n+b'$, alors
$$(u_n+v_n)=(a+a')n+(b+b'),$$
donc $u+v$ est encore arithmétique. Pour $\lambda\in\mathbb{R}$,
$$(\lambda u_n)=\lambda(an+b)=(\lambda a)n+(\lambda b),$$
donc λu est arithmétique. Ainsi A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}$.
2. La suite nulle vérifie $u_0=0$. Si $u_0=0$ et $v_0=0$, alors $(u+v)_0=u_0+v_0=0$. Et pour $\lambda\in\mathbb{R}$, $(\lambda u)_0=\lambda u_0=0$. Donc B est un sous-espace vectoriel.

3. La suite nulle vérifie $u_{n+1} = 2u_n$. Si $u, v \in C$, alors

$$(u+v)_{n+1} = u_{n+1} + v_{n+1} = 2u_n + 2v_n = 2(u+v)_n,$$

donc $u + v \in C$. De même, pour $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$(\lambda u)_{n+1} = \lambda u_{n+1} = \lambda(2u_n) = 2(\lambda u)_n,$$

donc $\lambda u \in C$. Ainsi C est un sous-espace vectoriel.
(En fait, $C = \{(u_0\, 2^n)_{n\geq 0}\,;\ u_0 \in \mathbb{R}\}$, donc $\dim(C) = 1$.)

4. La suite nulle est bornée. Si $|u_n| \leq M$ et $|v_n| \leq N$ pour tout n, alors

$$|u_n + v_n| \leq |u_n| + |v_n| \leq M + N,$$

donc $u + v$ est bornée. Et si $|u_n| \leq M$, alors

$$|\lambda u_n| = |\lambda|\, |u_n| \leq |\lambda|\, M,$$

donc λu est bornée. Ainsi D est un sous-espace vectoriel.

5. Si $u \in E$ et $u \neq 0$, alors $(-u)_n = -u_n \leq 0$ et n'est pas dans E (par exemple $u_n = 1$). Donc E n'est pas un sous-espace vectoriel.
6. La suite nulle n'appartient pas à F car $u_0 = 0 \neq 1$. Donc F n'est pas un sous-espace vectoriel.
7. La suite nulle n'appartient pas à G (elle contient des termes nuls). Donc G n'est pas un sous-espace vectoriel.
8. Prenons la suite constante $u_n = 1$: elle est dans H. Mais pour $\lambda = 2$, la suite $(2u_n)$ vaut 2 et ne vérifie plus $u_n \leq 1$. Donc H n'est pas un sous-espace vectoriel.
9. Prenons $u_n = n$ et $v_n = n$ (toutes deux croissantes). Alors $(-u)_n = -n$ n'est pas croissante, donc ce n'est pas stable par multiplication par un scalaire négatif. Donc I n'est pas un sous-espace vectoriel.
10. La suite nulle est dans J. Si $u_n = 0$ pour $n \geq N$ et $v_n = 0$ pour $n \geq N'$, alors $u_n + v_n = 0$ pour $n \geq \max(N, N')$. Et si $u_n = 0$ pour $n \geq N$, alors $\lambda u_n = 0$ pour $n \geq N$. Donc J est un sous-espace vectoriel.