

CORRIGÉ DU DEVOIR MAISON N°12
A RENDRE POUR LE MERCREDI 6 MAI 2026

Problème

Les trois parties de ce problème sont indépendantes, l'objectif étant de déterminer par trois méthodes la matrice A^n , pour n entier naturel.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Partie A – Via une récurrence

Soit $E = \{aA + bI, (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

1. Prouver que E est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

E est un sous-ensemble de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Montrons que c'est un sous-espace vectoriel.

- **Non-vide** : $0 \cdot A + 0 \cdot I = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} \in E$.
- **Stabilité par combinaison linéaire** : Soient $M_1 = a_1A + b_1I \in E$, $M_2 = a_2A + b_2I \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\lambda M_1 + \mu M_2 = (\lambda a_1 + \mu a_2)A + (\lambda b_1 + \mu b_2)I \in E.$$

Donc E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, c'est donc un \mathbb{R} -espace vectoriel.

2. (a) Prouver que la famille $\mathcal{B} = (A, I)$ est une base de E .

La famille (A, I) est génératrice de E par définition de E . Montrons qu'elle est libre. Supposons $\alpha A + \beta I = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$ pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Cela donne :

$$\begin{pmatrix} -2\alpha + \beta & 0 & 0 \\ 2\alpha & \alpha + \beta & 2\alpha \\ 0 & 0 & -2\alpha + \beta \end{pmatrix} = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}.$$

Le coefficient de position $(2, 1)$ donne $2\alpha = 0$, donc $\alpha = 0$. Le coefficient de position $(1, 1)$ donne alors $\beta = 0$. La famille est libre et génératrice : c'est une base de E .

- (b) Prouver que $A^2 \in E$ et déterminer ses coordonnées dans la base \mathcal{B} .

Calculons A^2 :

$$A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Cherchons $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $A^2 = aA + bI$, c'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} -2a + b & 0 & 0 \\ 2a & a + b & 2a \\ 0 & 0 & -2a + b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

On obtient le système :

$$\begin{cases} -2a + b = 4 \\ a + b = 1 \end{cases} \implies -3a = 3 \implies a = -1, \quad b = 2.$$

Vérification : $2a = -2$. Donc $A^2 = -A + 2I \in E$, de coordonnées $(-1, 2)$ dans \mathcal{B} .

3. Prouver que pour tout entier naturel n , il existe deux réels a_n et b_n tels que $A^n = a_n A + b_n I$.

Montrons le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation :

— $n = 0$: $A^0 = I = 0 \cdot A + 1 \cdot I$, donc $a_0 = 0$, $b_0 = 1$.

— $n = 1$: $A^1 = A = 1 \cdot A + 0 \cdot I$, donc $a_1 = 1$, $b_1 = 0$.

Hérédité : Supposons que pour un certain $n \geq 1$, on ait $A^n = a_n A + b_n I$. Alors :

$$A^{n+1} = A \cdot A^n = A(a_n A + b_n I) = a_n A^2 + b_n A.$$

Or $A^2 = -A + 2I$, donc :

$$A^{n+1} = a_n(-A + 2I) + b_n A = (-a_n + b_n)A + 2a_n I.$$

En posant $a_{n+1} = b_n - a_n$ et $b_{n+1} = 2a_n$, on obtient bien $A^{n+1} = a_{n+1} A + b_{n+1} I$.

Conclusion : Par récurrence, le résultat est établi pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. En reconnaissant a_{n+2} , déterminer a_n puis b_n en fonction de n .

La récurrence fournit :

$$\begin{cases} a_{n+1} = -a_n + b_n \\ b_{n+1} = 2a_n \end{cases} \quad a_0 = 0, \quad b_0 = 1, \quad a_1 = 1, \quad b_1 = 0.$$

De la première relation : $b_n = a_{n+1} + a_n$. En décalant d'un rang : $b_{n+1} = a_{n+2} + a_{n+1}$. Or $b_{n+1} = 2a_n$, donc :

$$a_{n+2} + a_{n+1} = 2a_n \implies \boxed{a_{n+2} = -a_{n+1} + 2a_n}.$$

L'équation caractéristique associée est $r^2 + r - 2 = 0$, soit $(r+2)(r-1) = 0$, de racines $r_1 = -2$ et $r_2 = 1$. La solution générale est :

$$a_n = \alpha(-2)^n + \beta.$$

Les conditions initiales $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$ donnent :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ -2\alpha + \beta = 1 \end{cases} \implies \alpha = -\frac{1}{3}, \quad \beta = \frac{1}{3}.$$

Donc :

$$\boxed{a_n = \frac{1 - (-2)^n}{3}}.$$

Puis, puisque $b_n = a_{n+1} + a_n$, on obtient :

$$b_n = \frac{1 - (-2)^{n+1}}{3} + \frac{1 - (-2)^n}{3} = \frac{2 - (-2)^n((-2) + 1)}{3} = \frac{2 + (-2)^n}{3}.$$

$$b_n = \frac{2 + (-2)^n}{3}.$$

Vérification : $a_0 = 0$, $b_0 = 1$, $a_1 = 1$, $b_1 = 0$.

5. Expliciter la matrice A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

On a $A^n = a_n A + b_n I$, soit :

$$A^n = \frac{1 - (-2)^n}{3} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} + \frac{2 + (-2)^n}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En calculant chaque coefficient :

- (1, 1) et (3, 3) : $\frac{-2(1 - (-2)^n) + (2 + (-2)^n)}{3} = \frac{3(-2)^n}{3} = (-2)^n$.
- (2, 2) : $\frac{(1 - (-2)^n) + (2 + (-2)^n)}{3} = \frac{3}{3} = 1$.
- (2, 1) et (2, 3) : $\frac{2(1 - (-2)^n)}{3}$.
- Tous les autres coefficients sont nuls.

Ainsi,

$$A^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ \frac{2(1 - (-2)^n)}{3} & 1 & \frac{2(1 - (-2)^n)}{3} \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix}.$$

Partie B – Via une célèbre formule

6. Exprimer N^2 en fonction de N et en déduire N^n pour tout $n \geq 1$. Qu'en est-il pour $n = 0$?

Calculons N^2 :

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3N.$$

Montrons par récurrence que $\forall n \geq 1$, $N^n = 3^{n-1}N$.

- **Initialisation** : $N^1 = N = 3^0N$.
- **Hérédité** : Soit $n \geq 1$. On suppose que $N^n = 3^{n-1}N$, on a alors
 $N^{n+1} = N^n \cdot N = 3^{n-1}N^2 = 3^{n-1} \cdot 3N = 3^nN$.

Donc pour tout $n \geq 1$: $N^n = 3^{n-1}N$.

Pour $n = 0$: $N^0 = I$ par convention, et la formule donnerait $3^{-1}N \neq I$. La formule ne s'étend donc pas à $n = 0$.

7. Montrer que A est combinaison linéaire de I et N .

Calculons $-2I + N$:

$$-2I + N = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = A.$$

Donc $A = -2I + N$: A est bien combinaison linéaire de I et N .

8. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, A^n en fonction de N et de I puis expliciter cette matrice.

On écrit $A = -2I + N$. Les matrices $-2I$ et N commutent car $(-2I)N = N(-2I) = -2N$. On applique donc la formule du binôme de Newton :

$$A^n = (-2I + N)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-2)^{n-k} N^k.$$

Le terme $k = 0$ vaut $(-2)^n I$. Pour $k \geq 1$, on a $N^k = 3^{k-1} N$, donc :

$$A^n = (-2)^n I + \left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-2)^{n-k} 3^{k-1} \right) N.$$

Calculons le coefficient de N :

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-2)^{n-k} 3^{k-1} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-2)^{n-k} 3^k = \frac{1}{3} \left[\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-2)^{n-k} 3^k - (-2)^n \right].$$

Par le binôme de Newton, $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-2)^{n-k} 3^k = (3 - 2)^n = 1$.

Donc le coefficient de N vaut $\frac{1 - (-2)^n}{3}$, et :

$$A^n = (-2)^n I + \frac{1 - (-2)^n}{3} N.$$

En explicitant :

$$A^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ \frac{2(1 - (-2)^n)}{3} & 1 & \frac{2(1 - (-2)^n)}{3} \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix}.$$

Partie C – Via un changement de base

9. Montrer que la famille $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est une base de \mathbb{R}^3 .

Comme \mathbb{R}^3 est de dimension 3 et que \mathcal{B}' contient exactement 3 vecteurs, il suffit de montrer que la famille est libre pour conclure qu'elle est une base.

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0_{\mathbb{R}^3}$$

En remplaçant les vecteurs par leurs coordonnées :

$$\alpha(-1, 0, 1) + \beta(-3, 2, 0) + \gamma(0, 1, 0) = (0, 0, 0)$$

ce qui donne :

$$(-\alpha - 3\beta, 2\beta + \gamma, \alpha) = (0, 0, 0)$$

On obtient le système :

$$\begin{cases} -\alpha - 3\beta = 0 & (L_1) \\ 2\beta + \gamma = 0 & (L_2) \\ \alpha = 0 & (L_3) \end{cases}$$

Résolution du système :

- D'après (L_3) : $\alpha = 0$.
- En reportant dans (L_1) : $-3\beta = 0$, donc $\beta = 0$.
- En reportant dans (L_2) : $\gamma = 0$.

Ainsi, la seule solution est $\alpha = \beta = \gamma = 0$, donc la famille \mathcal{B}' est **libre**.

La famille $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est :

- libre dans \mathbb{R}^3 ,
- composée de 3 vecteurs, soit exactement $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$.

Une famille libre de cardinal égal à la dimension de l'espace est une base. Par conséquent, \mathcal{B}' est une base de \mathbb{R}^3 .

10. (a) Montrer que P est inversible et déterminer sa matrice inverse.

On a montré $\det(P) = -3 \neq 0$, donc P est inversible. On calcule P^{-1} par la méthode du pivot de Gauss sur $(P \mid I_3)$:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xLeftrightarrow_{L_1 \leftarrow -L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xLeftrightarrow_{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ & \xLeftrightarrow_{L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xLeftrightarrow_{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & -1 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{3}{2} & 1 \end{array} \right) \\ & \xLeftrightarrow_{L_3 \leftarrow \frac{2}{3}L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & -1 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & 1 & \frac{2}{3} \end{array} \right) \xLeftrightarrow_{\substack{L_1 \leftarrow L_1 + \frac{3}{2}L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2}L_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & 1 & \frac{2}{3} \end{array} \right) \end{aligned}$$

Donc :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & 1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

(b) Déterminer la matrice $D = P^{-1}AP$.

Calculons d'abord AP :

$$AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Puis $D = P^{-1}(AP)$:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & 1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

— Ligne 1 : $(0 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot (-2), 0 \cdot 6 + 0 \cdot (-4) + 1 \cdot 0, 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-2, 0, 0)$.

— Ligne 2 : $(-\frac{1}{3} \cdot 2 + 0 + (-\frac{1}{3})(-2), -\frac{1}{3} \cdot 6 + 0 + 0, 0) = (0, -2, 0)$.

— Ligne 3 : $(\frac{2}{3} \cdot 2 + 1 \cdot 0 + \frac{2}{3}(-2), \frac{2}{3} \cdot 6 + (-4) + 0, 0 + 1 + 0) = (0, 0, 1)$.

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D est donc diagonale.

(c) En déduire A^n en fonction de D^n puis donner l'expression de A^n en fonction de n .

Puisque $D = P^{-1}AP$, on a $A = PDP^{-1}$. Par récurrence immédiate :

$$A^n = PD^nP^{-1}.$$

Or D est diagonale, donc :

$$D^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculons D^nP^{-1} :

$$D^nP^{-1} = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & 1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & (-2)^n \\ -\frac{(-2)^n}{3} & 0 & -\frac{(-2)^n}{3} \\ \frac{2}{3} & 1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Puis $A^n = P(D^nP^{-1})$:

$$A^n = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & (-2)^n \\ -\frac{(-2)^n}{3} & 0 & -\frac{(-2)^n}{3} \\ \frac{2}{3} & 1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

On retrouve :

$$A^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ \frac{2(1 - (-2)^n)}{3} & 1 & \frac{2(1 - (-2)^n)}{3} \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix}.$$

Les trois méthodes concordent.