

CORRIGÉ DU DEVOIR MAISON N°13  
À RENDRE POUR LE MERCREDI 6 MAI 2026

## Exercice 1 : une suite de polynômes

1. Déterminer les polynômes  $P_2, P_3, P_4$  et  $P_5$ . Donner également la forme factorisée de  $P_2$  et  $P_3$ .

On applique la relation de récurrence  $P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n$ .

**Calcul de  $P_2$  :**

$$P_2 = XP_1 - P_0 = X \cdot X - 2 = X^2 - 2 = (X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2}).$$

**Calcul de  $P_3$  :**

$$P_3 = XP_2 - P_1 = X(X^2 - 2) - X = X^3 - 3X = X(X^2 - 3) = X(X - \sqrt{3})(X + \sqrt{3}).$$

**Calcul de  $P_4$  :**

$$P_4 = XP_3 - P_2 = X(X^3 - 3X) - (X^2 - 2) = X^4 - 3X^2 - X^2 + 2 = X^4 - 4X^2 + 2.$$

**Calcul de  $P_5$  :**

$$P_5 = XP_4 - P_3 = X(X^4 - 4X^2 + 2) - (X^3 - 3X) = X^5 - 5X^3 + 5X.$$

2. Conjecturer le degré et le coefficient dominant de  $P_n$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Démontrer ce résultat.

On a  $P_0 = 2$  (degré 0) et son coefficient dominant est 2.

**Conjecture :** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $P_n$  est de degré  $n$  et de coefficient dominant 1.

On le vérifie sur les premiers termes :  $P_1 = X$  (degré 1, coeff. dominant 1),  $P_2 = X^2 - 2$  (degré 2, coeff. dominant 1), etc.

Comme la relation de récurrence fait intervenir deux termes consécutifs, on procède par récurrence double.

**Initialisation :**

- $P_1 = X$  :  $\deg(P_1) = 1$  et son coefficient dominant est 1. Donc  $\mathcal{P}(1)$  est vraie.
- $P_2 = X^2 - 2$  :  $\deg(P_2) = 2$  et son coefficient dominant est 1. Donc  $\mathcal{P}(2)$  est vraie.

**Hérédité :** soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Supposons  $\mathcal{P}(n)$  et  $\mathcal{P}(n+1)$  vraies. Montrons  $\mathcal{P}(n+2)$ .

Par hypothèse de récurrence :

- $\deg(P_n) = n$  et  $P_n$  est unitaire,
- $\deg(P_{n+1}) = n+1$  et  $P_{n+1}$  est unitaire.

Par définition,  $P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n$ . Or :

$$\deg(XP_{n+1}) = 1 + \deg(P_{n+1}) = n+2$$

et le coefficient dominant de  $XP_{n+1}$  vaut  $1 \times 1 = 1$ .

Comme  $\deg(P_n) = n < n + 2 = \deg(XP_{n+1})$ , la soustraction de  $P_n$  ne modifie ni le degré, ni le coefficient dominant de  $XP_{n+1}$ . Ainsi :

$$\deg(P_{n+2}) = n + 2 \quad \text{et le coefficient dominant de } P_{n+2} \text{ vaut } 1.$$

Donc  $\mathcal{P}(n + 2)$  est vraie.

**Conclusion :** par le principe de récurrence double, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\deg(P_n) = n$  et  $P_n$  est unitaire.

3. Soit  $\theta \in \mathbb{R}$  fixé. Montrer par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $P_n(2 \cos \theta) = 2 \cos(n\theta)$ .

On procède à nouveau par récurrence double avec  $P(n) : \forall n \in \mathbb{N}$ ,  $P_n(2 \cos \theta) = 2 \cos(n\theta)$ .

**Initialisation :**

—  $n = 0 : P_0(2 \cos \theta) = 2 = 2 \cos(0)$ .

—  $n = 1 : P_1(2 \cos \theta) = 2 \cos \theta = 2 \cos(\theta)$ .

**Hérédité :** Soit  $n \geq 1$ . Supposons  $P_n(2 \cos \theta) = 2 \cos(n\theta)$  et  $P_{n-1}(2 \cos \theta) = 2 \cos((n-1)\theta)$ .

Alors :

$$\begin{aligned} P_{n+1}(2 \cos \theta) &= 2 \cos \theta \cdot P_n(2 \cos \theta) - P_{n-1}(2 \cos \theta) \\ &= 2 \cos \theta \cdot 2 \cos(n\theta) - 2 \cos((n-1)\theta). \end{aligned}$$

Or, par la formule produit :

$$2 \cos \theta \cos(n\theta) = \cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta).$$

Donc :

$$P_{n+1}(2 \cos \theta) = 2[\cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta)] - 2 \cos((n-1)\theta) = 2 \cos((n+1)\theta).$$

Par récurrence double, le résultat est établi pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

4. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que pour tout  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ ,  $2 \cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)$  est racine de  $P_n$ .

Soit  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$  et  $\theta_k = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}$ . D'après la question 3 :

$$P_n(2 \cos \theta_k) = 2 \cos(n\theta_k).$$

Or :

$$n\theta_k = n\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Donc :

$$\cos(n\theta_k) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = -\sin(k\pi) = 0.$$

Ainsi  $P_n(2 \cos \theta_k) = 0 : 2 \cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)$  est bien racine de  $P_n$ .

5. Pour tout  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ , on pose  $x_k = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}$ . Montrer que les  $x_k$  appartiennent à  $]0, \pi[$  et que  $\forall k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$ ,  $x_k < x_{k+1}$ .

**Appartenance à  $]0, \pi[$  :**

Pour tout  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$  :

$$x_k = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n} = \frac{(2k+1)\pi}{2n}.$$

—  $x_k > 0$  car  $2k+1 \geq 1 > 0$ .

— Pour  $k \leq n-1$  :  $2k+1 \leq 2n-1 < 2n$ , donc  $x_k < \frac{2n\pi}{2n} = \pi$ .

Donc  $x_k \in ]0, \pi[$  pour tout  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ .

**Stricte croissance :** Pour tout  $k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$  :

$$x_{k+1} - x_k = \frac{(k+1)\pi}{n} - \frac{k\pi}{n} = \frac{\pi}{n} > 0.$$

Donc  $x_k < x_{k+1}$ .

6. En déduire que pour  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ , les nombres  $2 \cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)$  sont deux à deux distincts.

D'après la question 5, les  $x_k$  sont strictement croissants, donc deux à deux distincts dans  $]0, \pi[$ . Or la fonction cosinus est **strictement décroissante** sur  $[0, \pi]$ , donc injective sur cet intervalle. Ainsi :

$$k \neq k' \implies x_k \neq x_{k'} \implies \cos(x_k) \neq \cos(x_{k'}) \implies 2 \cos(x_k) \neq 2 \cos(x_{k'}).$$

Les  $n$  nombres  $2 \cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)$ ,  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ , sont donc deux à deux distincts.

7. En déduire une factorisation de  $P_n$  en produit de polynômes de degré 1.

D'après les questions 4 et 6,  $P_n$  admet  $n$  racines deux à deux distinctes :

$$r_k = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right), \quad k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket.$$

Or  $P_n$  est de degré  $n$  (question 2) et de coefficient dominant 1. Un polynôme unitaire de degré  $n$  possédant  $n$  racines distinctes se factorise en :

$$P_n = \prod_{k=0}^{n-1} \left( X - 2 \cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right) \right).$$

8. **Factorisation de  $P_5$ .**

(a) On pose  $Q = X^2 - 5X + 5$ . Factoriser  $Q$ . En déduire une factorisation de  $P_5$  en produit de polynômes de degré 1.

**Factorisation de  $Q$  :** Le discriminant est  $\Delta = 25 - 20 = 5$ , donc :

$$Q = \left( X - \frac{5 + \sqrt{5}}{2} \right) \left( X - \frac{5 - \sqrt{5}}{2} \right).$$

**Expression de  $P_5$  via  $Q$  :**

$$P_5 = X^5 - 5X^3 + 5X = X(X^4 - 5X^2 + 5).$$

En posant  $Y = X^2$ , on a  $X^4 - 5X^2 + 5 = Q(X^2)$  (en remplaçant  $X$  par  $X^2$  dans  $Q$ , ce qui donne  $X^4 - 5X^2 + 5$ ). Les racines de  $X^4 - 5X^2 + 5 = 0$  sont les  $X$  vérifiant  $X^2 = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$ . Ces deux valeurs sont strictement positives, donc on obtient quatre racines réelles :

$$\pm \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}} \quad \text{et} \quad \pm \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}}.$$

Ainsi :

$$P_5 = X \left( X - \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}} \right) \left( X + \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}} \right) \left( X - \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}} \right) \left( X + \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}} \right).$$

- (b) En comparant les résultats des questions 7 et 8.a), déterminer les valeurs exactes de  $\cos \frac{\pi}{10}$  et  $\cos \frac{3\pi}{10}$ .

D'après la question 7 avec  $n = 5$ , les racines de  $P_5$  sont :

$$r_k = 2 \cos \left( \frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{5} \right), \quad k \in \llbracket 0, 4 \rrbracket,$$

soit explicitement :

$$2 \cos \frac{\pi}{10}, \quad 2 \cos \frac{3\pi}{10}, \quad 2 \cos \frac{\pi}{2} = 0, \quad 2 \cos \frac{7\pi}{10}, \quad 2 \cos \frac{9\pi}{10}.$$

En utilisant  $\cos(\pi - x) = -\cos x$  :

$$2 \cos \frac{7\pi}{10} = -2 \cos \frac{3\pi}{10}, \quad 2 \cos \frac{9\pi}{10} = -2 \cos \frac{\pi}{10}.$$

Donc  $P_5$  admet les racines  $0, \pm 2 \cos \frac{\pi}{10}$  et  $\pm 2 \cos \frac{3\pi}{10}$ , ce qui donne la factorisation :

$$P_5 = X \left( X^2 - 4 \cos^2 \frac{\pi}{10} \right) \left( X^2 - 4 \cos^2 \frac{3\pi}{10} \right).$$

En comparant avec la question 8.a) :

$$X \left( X^2 - \frac{5 + \sqrt{5}}{2} \right) \left( X^2 - \frac{5 - \sqrt{5}}{2} \right),$$

et en notant que  $\cos \frac{\pi}{10} > \cos \frac{3\pi}{10} > 0$  (cosinus décroissant sur  $[0, \pi]$ ), on identifie :

$$4 \cos^2 \frac{\pi}{10} = \frac{5 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad 4 \cos^2 \frac{3\pi}{10} = \frac{5 - \sqrt{5}}{2}.$$

Comme  $\cos \frac{\pi}{10} > 0$  et  $\cos \frac{3\pi}{10} > 0$  :

$$\cos \frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$$

et

$$\cos \frac{3\pi}{10} = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}.$$

## Exercice 2 : une somme de Riemann

Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue.

1. Montrer que pour tout réel  $x \geq -\frac{1}{2}$ ,  $x - x^2 \leq \ln(1+x) \leq x$ .

**Inégalité de droite :**  $\ln(1+x) \leq x$ .

Posons  $h : x \mapsto x - \ln(1+x)$  définie et dérivable sur  $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ .

On a  $h(0) = 0$  et pour tout  $x \in \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$  :

$$h'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}.$$

— Pour  $x \geq 0$  :  $h'(x) \geq 0$ , donc  $h$  est croissante  $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$  et  $h(x) \geq h(0) = 0$ .

— Pour  $-\frac{1}{2} \leq x \leq 0$  :  $h'(x) \leq 0$ , donc  $h$  est décroissante et  $h(x) \geq h(0) = 0$ .

Dans tous les cas  $h(x) \geq 0$ , soit  $\ln(1+x) \leq x$ .

**Inégalité de gauche :**  $x - x^2 \leq \ln(1+x)$ .

Posons  $g : x \mapsto \ln(1+x) - x + x^2$  définie et dérivable sur  $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ .

On a  $g(0) = 0$  et pour tout  $x \in \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$  :

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + 2x = \frac{1 - (1+x) + 2x(1+x)}{1+x} = \frac{x(2x+1)}{1+x}.$$

Pour  $x \geq -\frac{1}{2}$ , on a  $1+x > 0$  et  $2x+1 \geq 0$ , donc :

— Pour  $x \geq 0$  :  $g'(x) \geq 0$ , donc  $g$  croissante  $[0, +\infty[$ , donc  $g(x) \geq g(0) = 0$ .

— Pour  $-\frac{1}{2} \leq x \leq 0$  :  $x \leq 0$  et  $2x+1 \geq 0$ , donc  $g'(x) \leq 0$ ,  $g$  décroissante  $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$ ,  
 $g(x) \geq g(0) = 0$ .

Ainsi  $g(x) \geq 0$ , soit  $x - x^2 \leq \ln(1+x)$ .

On a donc établi pour tout  $x \geq -\frac{1}{2}$  :

$$\boxed{x - x^2 \leq \ln(1+x) \leq x.}$$

2. Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right) = \exp\left(\int_0^1 f(t) dt\right)$ .

Puisque  $f$  est continue sur  $[0, 1]$ , elle y est bornée : il existe  $M > 0$  tel que  $|f(x)| \leq M$  pour tout  $x \in [0, 1]$ . Pour  $n > 2M$  et tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a  $\left|\frac{f(k/n)}{n}\right| \leq \frac{M}{n} < \frac{1}{2}$ , donc

$1 + \frac{f(k/n)}{n} > \frac{1}{2} > 0$  et le logarithme est bien défini. Posons :

$$L_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{f(k/n)}{n}\right), \quad S_n = \ln L_n = \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{f(k/n)}{n}\right).$$

En appliquant l'encadrement de la question 1 avec  $x = \frac{f(k/n)}{n} \geq -\frac{M}{n} > -\frac{1}{2}$  :

$$\frac{f(k/n)}{n} - \frac{f(k/n)^2}{n^2} \leq \ln \left(1 + \frac{f(k/n)}{n}\right) \leq \frac{f(k/n)}{n}.$$

En sommant sur  $k = 1, \dots, n$  :

$$\underbrace{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)}_{=A_n} - \underbrace{\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)^2}_{=B_n} \leq S_n \leq \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)}_{=A_n}.$$

$A_n$  est une somme de Riemann de  $f$  sur  $[0, 1]$  :  $A_n \rightarrow \int_0^1 f(t) dt$ .

De plus,  $f^2$  est continue et bornée par  $M^2$ , donc :  $0 \leq B_n \leq \frac{nM^2}{n^2} = \frac{M^2}{n} \rightarrow 0$ .

Par le théorème des gendarmes,  $A_n - B_n \rightarrow \int_0^1 f(t) dt$  et  $A_n \rightarrow \int_0^1 f(t) dt$ , donc :

$$S_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \int_0^1 f(t) dt.$$

Par continuité de l'exponentielle :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{f(k/n)}{n}\right) = \exp\left(\int_0^1 f(t) dt\right).$$

3. En déduire la valeur de  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \frac{n^2 + k}{n^2}$ .

D'après la question précédente :

$$\prod_{k=1}^n \frac{n^2 + k}{n^2} = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k/n}{n}\right) = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{f(k/n)}{n}\right).$$

où  $f : t \mapsto t$  est définie sur  $[0, 1]$ .

On a de plus

$$\int_0^1 f(t) dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

On en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \frac{n^2 + k}{n^2} = \exp\left(\int_0^1 f(t) dt\right) = e^{1/2} = \sqrt{e}.$$