Liste d'exercices n°24 — Applications linéaires

Exercice 1. Les applications suivantes sont-elles linéaires ?
Si oui, donner la dimension de leur noyau et de leur image.

1. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+1,y) \end{array}$
2. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x-y,x+3y,x) \end{array}$
3. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (|x|-x,|y|-y) \end{array}$
4. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^3 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (x,y,z) & \longmapsto & z-y \end{array}$
5. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x,1,y) \end{array}$
6. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+7y,xy,2x-y) \end{array}$
7. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y,x-y) \end{array}$
8. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x^2,0) \end{array}$
9. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (3x-y,y+5z,y) \end{array}$
10. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (a^2x-y,y,0) \end{array}$
avec a un réel.

Exercice 2. Soit E un espace vectoriel. Soient f et g deux endomorphismes de E. On suppose que f et g commutent, i.e. $f \circ g = g \circ f$.

1. Montrer que $\ker(f)$ est stable par g, i.e. $g(\ker(f)) \subset \ker(f)$.
2. Montrer que $\mathrm{Im}(f)$ est stable par g, i.e. $g(\mathrm{Im}(f)) \subset \mathrm{Im}(f)$.

Exercice 3. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée.
Montrer que f est une homothétie, i.e. il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que pour tout $x \in E$, $f(x) = \lambda x$.

Exercice 4. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $x \in E$ tel que $f^{n-1}(x) \neq 0_E$.

1. Montrer que la famille $(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est libre.
2. Soit $F = \mathrm{Vect}\{x, f(x), \dots, f^{n-1}(x)\}$. Vérifier que F est stable par f et donner la matrice de $f_{|F}$ dans la base $(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{n-1}(x))$. Quel est le rang de cette matrice ?

Exercice 5. Expliciter l'application linéaire canoniquement associée à chacune des matrices suivantes, puis donner son image et son noyau.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 20 \\ 7 & 35 \end{pmatrix}$
5. $\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 8 & 1 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$
6. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$
7. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
8. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

Exercice 6. Considérons les matrices suivantes :
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
On note $\mathcal{B}_1$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on pose
$$\mathcal{B}_2 = ((1,0,0),(0,1,0),(1,1,1)) \quad \text{et} \quad \mathcal{B}_3 = ((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)).$$

1. Vérifier que $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_3$ sont des bases de $\mathbb{R}^3$.
2. Expliciter les endomorphismes f, g et h de $\mathbb{R}^3$ définis par :
   (a) $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(f) = A$;
   (b) $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}(g) = A$;
   (c) $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(h) = A$.
3. Déterminer une base du noyau et de l'image des endomorphismes f, g et h de $\mathbb{R}^3$ définis par :
   (a) $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_3,\mathcal{B}_2}(f) = B$;
   (b) $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_3}(g) = B$;
   (c) $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2}(h) = B$.

Exercice 7. Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

1. Montrer que $A^3 - 2A^2 + A - 2I_3 = 0$.
2. En déduire que f est un automorphisme et exprimer f^{-1} en fonction de f.

Exercice 8. Soient $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

1. Montrer que $\ker(f - 3\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ est de dimension 1 et trouver deux réels x et y tels que le vecteur $(1,x,y)$ en constitue une base.
2. Montrer que $\ker(f + 3\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ est de dimension 2 et trouver quatre réels s, t, u et v tels que $((1,s,t),(1,u,v))$ en soit une base.
3. On pose $\mathcal{B} = ((1,x,y),(1,s,t),(1,u,v))$. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la matrice D de f dans cette base.

Exercice 9. Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -6 & 7 & 0 \\ -6 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.
Montrer que l'application f est un automorphisme et expliciter f^{-1}.

Exercice 10. Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

1. Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.
   On pose $u_1 = (1,1,1)$, $u_2 = (1,-1,1)$ et $u_3 = (4,2,1)$, et on appelle $\mathcal{B}$ la famille (u_1,u_2,u_3).
2. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

3. (a) Déterminer la matrice D de f dans la base $\mathcal{B}$.
   (b) Vérifier que $A = PDP^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
4. Pour tout entier naturel n, expliciter l'application f^n.

Exercice 11. Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère $n+1$ réels distincts $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$
Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \longmapsto & (P(a_0), \dots, P(a_n)) \end{array}$.

1. Vérifier que φ est une application linéaire et écrire sa matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}^{n+1}$.
2. Prouver que φ est un isomorphisme.

Exercice 12. Soit E un espace vectoriel de dimension n, soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer l'équivalence suivante :

$$\exists f \in \mathcal{L}(E), \text{ telle que } \ker(f) = F \text{ et } \operatorname{Im}(f) = G \Leftrightarrow \dim(F) + \dim(G) = n.$$

Exercice 13. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. (a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}, \ker(f^k) \subset \ker(f^{k+1})$.
   (b) Prouver qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\ker(f^p) = \ker(f^{p+1})$ et que $\ker(f^k) = \ker(f^p)$ pour tout $k \geqslant p$.
2. (a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}, \operatorname{Im}(f^{k+1}) \subset \operatorname{Im}(f^k)$.
   (b) Vérifier que pour le même entier p trouvé en 1.(b), $\operatorname{Im}(f^p) = \operatorname{Im}(f^{p+1})$ et que pour tout $k \geqslant p, \operatorname{Im}(f^k) = \operatorname{Im}(f^p)$.

Exercice 14. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer les équivalences suivantes :

$$\ker(f) \cap \operatorname{Im}(f) = \{0_E\} \Leftrightarrow \ker(f) = \ker(f^2) \Leftrightarrow \operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(f^2) \Leftrightarrow \forall x \in E, \exists (y,z) \in \ker(f) \times \operatorname{Im}(f), x = y+z.$$

Exercice 15. Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence suivante :

$$\ker(f) = \operatorname{Im}(f) \Leftrightarrow f \circ f = 0 \text{ et } \exists h \in \mathcal{L}(E), f \circ h + h \circ f = \mathrm{Id}_E.$$

Exercice 16. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $f^2 = 0$. Soit F un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ stable par f.
Montrer que $\operatorname{Im}(f) \subset F$.

Exercice 17. Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ et $f : E \to E$ définie par :

$$f(P)(X) = P(X+1)$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Calculer $f(X^k)$ pour $k \in \{0, 1, 2, 3\}$.
3. Déterminer la matrice de f dans la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$.
4. Montrer que f est bijective et déterminer son inverse.
5. Déterminer la matrice de f^{-1} dans la même base.
6. Vérifier que les matrices obtenues sont inverses l'une de l'autre.

Exercice 18. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 7 \\ 1 & 4 & 3 \\ -2 & -8 & -6 \end{pmatrix}.$$

1. (a) La matrice A est-elle inversible ?
   (b) Calculer A^2 et A^3 et déterminer le rang de ces deux matrices.
2. (a) Montrer que $\ker f \subset \ker f^2$.
   (b) Déterminer $\ker f$ et en donner une base ainsi que sa dimension.
   (c) A-t-on $\ker f = \ker f^2$?
3. On note $u = (-2, -1, 2)$.
   (a) Montrer qu'il existe $v \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(v) = u$ et dont la deuxième coordonnée est 1.
   (b) Montrer qu'il existe $w \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(w) = v$ et dont la deuxième coordonnée est 1.
   (c) Montrer que $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, puis écrire la matrice P de passage de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{B}'$, i.e. $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id})$.
   (d) Justifier que P est inversible et calculer P^{-1}.
   (e) Déterminer la matrice N de f dans $\mathcal{B}'$. Quelle relation lie A et N ?
4. Pour tout $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on note :

$$C_B = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid BM = MB\}.$$

   (a) Montrer que, pour tout $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, C_B est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   (b) Montrer que $C_N = \mathrm{Vect}(I_3, N, N^2)$.
   (c) Montrer que, pour tout $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$,

$$M \in C_A \iff P^{-1}MP \in C_N.$$

   (d) En déduire que $C_A = \mathrm{Vect}(I_3, A, A^2)$. Quelle est la dimension de C_A ?