Programme de colles 26 **Semaine du 18/05**

Questions de cours

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Espaces vectoriels

1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.
   Toute famille libre de n vecteurs $(e_1, \dots, e_n)$ de E est une base de E.
2. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.
   Toute famille génératrice de n vecteurs $(e_1, \dots, e_n)$ de E est une base de E.
3. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit F un sous-espace vectoriel de E.
   Alors $\dim(F) = \dim(E)$ si et seulement si $E = F$.

Applications linéaires

4. Composition d'applications linéaires.
5. Bijection réciproque d'un isomorphisme.
6. $\ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de E et $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F.
7. f est injective si et seulement si $\ker(f) = \{0_E\}$.
8. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $(e_1, \dots, e_n)$ une famille génératrice de E.
   Alors $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$.
9. Une application linéaire $f : E \longrightarrow F$ est injective si et seulement si l'image par f de toute famille libre de E est une famille libre de F.
10. Il existe un isomorphisme $f \in \mathcal{L}(E, F)$ si et seulement si $\dim(E) = \dim(F)$.

Exercices

Espaces vectoriels

Espaces vectoriels ($\mathbb{K}^n$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}_n[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ en particulier). Sous-espaces vectoriels. Combinaison linéaire. Intersection de sous-espaces vectoriels. Sous-espaces engendré par une famille de vecteurs. Familles libres, génératrices, bases. Coordonnées d'un vecteur dans une base. Espace vectoriel de dimension finie. Dimension d'un espace vectoriel. Théorème de la base incomplète. Rang d'une famille de vecteurs.

Applications linéaires

Définition d'une application linéaire. Opérations sur les applications linéaires. Endomorphisme, isomorphisme, automorphisme. Noyau et image d'une application linéaire. Caractérisation d'une application linéaire par l'image d'une base.