Corrigé de la liste d'exercices n°24 — Applications linéaires

Exercice 1.

1. L'application f n'est pas linéaire car $f(0,0)=(1,0)\neq(0,0)$.
2. • Montrons que f est linéaire.
   Soient $u=(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $v=(x',y')\in\mathbb{R}^2$ et (λ,μ) deux réels. On a
   $$\begin{aligned} f(\lambda u+\mu v) &= f(\lambda x+\mu x',\lambda y+\mu y') \\ &= (\lambda(x-y)+\mu(x'-y'),\lambda(x+3y)+\mu(x'+3y'),\lambda x+\mu x') \\ &= \lambda(x-y,x+3y,x)+\mu(x'-y',x'+3y',x') \\ &= \lambda f(u)+\mu f(v) \end{aligned}$$
   donc f est linéaire.
   • On a $(x,y)\in\ker(f)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl} x-y &=& 0\\ x+3y &=& 0\\ x &=& 0\end{array}\right.\Leftrightarrow x=y=0$ donc $\ker(f)=\{(0,0)\}$ d'où $\dim(\ker(f))=0$ (donc f est injective).
   • On a
   $$\begin{aligned} \mathrm{Im}(f) &= \left\{(x-y,x+3y,x)|(x,y)\in\mathbb{R}^2\right\} \\ &= \left\{x(1,1,1)+y(-1,3,0)|(x,y)\in\mathbb{R}^2\right\} \\ &= \mathrm{Vect}\{(1,1,1),(-1,3,0)\}. \end{aligned}$$
   Puisque les vecteurs $(1,1,1)$ et $(-1,3,0)$ sont libres (car non colinéaires), on en déduit que $\dim(\mathrm{Vect}\{(1,1,1),(-1,3,0)\}=2$ d'où $\dim(\mathrm{Im}(f))=2$.
3. On a $f(1,0)=(0,0)$, $f(-1,0)=(2,0)$ et $f(0,0)=(0,0)$.
   Ainsi, $f((1,0)+(-1,0))=f(0,0)=(0,0)\neq f(1,0)+f(-1,0)=(2,0)$ donc l'application f n'est pas linéaire.
4. • Montrons que f est linéaire.
   Soient $u=(x,y,z)\in\mathbb{C}^3, v=(x',y',z')\in\mathbb{C}^3$ et $(\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2$.
   Alors
   $$f(\lambda u+\mu v)=f(\lambda x+\mu x',\lambda y+\mu y',\lambda z+\mu z')=\lambda z+\mu z'-(\lambda y+\mu y')=\lambda(z-y)+\mu(z'-y')=\lambda f(u)+\mu f(v)$$
   donc f est linéaire.
   • On a
   $$(x,y,z)\in\ker(f)\Leftrightarrow z-y=0\Leftrightarrow y=z\Leftrightarrow(x,y,z)=(x,y,y)=x(1,0,0)+y(0,1,1)$$
   donc $\ker(f)=\mathrm{Vect}\left\{(1,0,0),(0,1,1)\right\}$. Puisque les vecteurs $(1,0,0)$ et $(0,1,1)$ sont libres (car non colinéaires), on en déduit que $\dim(\ker(f))=2$.
   • Soit $z\in\mathbb{C}$. Alors $z=f(0,0,z)$ donc l'application f est surjective d'où $\mathrm{Im}(f)=\mathbb{C}$ donc $\dim(\mathrm{Im}(f))=1$.
5. L'application f n'est pas linéaire car $f(0,0)=(0,1,0)\neq(0,0,0)$.
6. On a $f(1,1)=(8,1,1)$ et $f(-1,-1)=(-8,1,-1)$ donc
   $$f(-1,-1)=f(-(1,1))\neq-f(1,1)$$
   ce qui prouve que f n'est pas linéaire.

7. • Montrons que f est linéaire.
Soient $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, u'=(x',y',z')\in\mathbb{R}^3$ et $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{array}{rcl} f(\lambda u+\mu v) & = & f(\lambda x+\mu x',\lambda y+\mu y',\lambda z+\mu z') \\ & = & (\lambda(x+y)+\mu(x'+y'),\lambda(x-y)+\mu(x'-y')) \\ & = & \lambda f(u)+\mu f(v) \end{array}$$

donc f est linéaire.
• On a $(x,y,z)\in\ker(f)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 0 \\ x-y & = & 0 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl} x & = & -y \\ -2y & = & 0 \end{array}\right.\Leftrightarrow x=y=0$ donc $\ker(f)=\{(0,0,z)|z\in\mathbb{R}\}=\{z(0,0,1)|z\in\mathbb{R}\}=\text{Vect}\{(0,0,1)\}$ d'où $\dim(\ker(f))=1$.
• On a

$$\text{Im}(f)=\{(x+y,x-y)|(x,y)\in\mathbb{R}^2\}=\{x(1,1)+y(1,-1)|(x,y)\in\mathbb{R}^2\}=\text{Vect}\{(1,1),(1,-1)\}$$

donc $\dim(\text{Im}(f))=2$ (puisque les vecteurs $(1,1)$ et $(1,-1)$ ne sont pas colinéaires).

8. On a $f(1,0)=(1,0)=f(-1,0)$ donc $f(-1,0)=f(-(1,0))\neq -f(1,0)$, ce qui prouve que f n'est pas linéaire.

9. • Montrons que f est linéaire.
Soient $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, v=(x',y',z')\in\mathbb{R}^3$, et $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{array}{rcl} f(\lambda u+\mu v) & = & f(\lambda x+\mu x',\lambda y+\mu y',\lambda z+\mu z') \\ & = & (\lambda(3x-y)+\mu(3x'-y'),\lambda(y+5z)+\mu(x'+5z'),\lambda y+\mu y') \\ & = & \lambda(3x-y,y+5z,y)+\mu(3x'-y',x'+5z',y') \\ & = & \lambda f(u)+\mu f(v) \end{array}$$

donc f est linéaire.
• On a

$$(x,y,z)\in\ker(f)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl} 3x-y & = & 0 \\ y+5z & = & 0 \\ y & = & 0 \end{array}\right.\Leftrightarrow (x,y,z)=(0,0,0$$

donc $\ker(f)=\{(0,0,0)\}$ d'où $\dim(\ker(f))=0$ et f est injective.
• On a

$$\begin{array}{rcl} \text{Im}(f) & = & \{(3x-y,y+5z,y)|(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\} \\ & = & \{x(3,0,0)+y(-1,1,1)+z(0,5,0)|(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\} \\ & = & \text{Vect}\left\{(3,0,0),(-1,1,1),(0,5,0)\right\}. \end{array}$$

Montrons que la famille $\{(3,0,0),(-1,1,1),(0,5,0)\}$ est libre.
Soient $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$ tel que

$$\alpha(3,0,0)+\beta(-1,1,1)+\gamma(0,5,0)=(0,0,0)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl} 3\alpha-\beta & = & 0 \\ \beta+5\gamma & = & 0 \\ \beta & = & 0 \end{array}\right.\Leftrightarrow\alpha=\beta=\gamma=0.$$

C'est une famille libre constituée de trois vecteurs libres dans $\mathbb{R}^3$: c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$. On en déduit que $\text{Im}(f)=\mathbb{R}^3$ donc $\dim(\text{Im}(f))=3$ (et f est surjective).

10. Soit $a\in\mathbb{R}$.
• Montrons que f est linéaire.
Soient $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, v=(x',y',z')\in\mathbb{R}^3$ et $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.

Alors

$$\begin{aligned} f(\lambda u+\mu v) &= f(\lambda x+\mu x', \lambda y+\mu y', \lambda z+\mu z') \\ &= (\lambda(a^2x-y)+\mu(a^2x'-y'), \lambda y+\mu y', 0) \\ &= \lambda(a^2x-y,y,0)+\mu(a^2x'-y',y',0) \\ &= \lambda f(u)+\mu f(v) \end{aligned}$$

donc f est linéaire.

• On a

$$(x,y,z)\in\ker(f) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a^2x-y &=& 0 \\ y &=& 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a^2x &=& 0 \\ y &=& 0 \end{array}\right.$$

Deux cas se présentent alors :

- Si $a\neq 0$, on a $x=y=0$ donc $\ker(f)=\{(0,0,z)|z\in\mathbb{R}\}=\{z(0,0,1)|z\in\mathbb{R}\}=\mathrm{Vect}\{(0,0,1\}$ donc $\dim(\ker(f))=1$.

- Si $a=0$, alors $\ker(f)=\{(x,0,z)|(x,z)\in\mathbb{R}^2\}=\{x(1,0,0)+z(0,0,1)|(x,z)\in\mathbb{R}^2\}=\mathrm{Vect}\{(1,0,0),(0,0,1)\}$ donc $\dim(\ker(f))=2$ (puisque les vecteurs $(1,0,0)$ et $(0,0,1)$ ne sont pas colinéaires).

• On a $\mathrm{Im}(f)=\{(a^2x-y,y,0)|(x,y)\in\mathbb{R}^2\}=\{x(a^2,0,0)+y(-1,1,0)|(x,y)\in\mathbb{R}^2\}=\mathrm{Vect}\{(a^2,0,0),(-1,1,0)\}$.

Deux cas se présentent alors :

- Si $a\neq 0$, alors les vecteurs $(a^2,0,0)$ et $(-1,1,0)$ ne sont pas colinéaires donc $\dim(\mathrm{Im}(f))=2$.

- Si $a=0$, alors $\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Vect}\{(-1,1,0)\}$ donc $\dim(\mathrm{Im}(f))=1$.

Exercice 2.

1. Soit $x\in\ker(f)$. Montrons que $g(x)\in\ker(f)$.

   Puisque $f\circ g=g\circ f$, on a $f(g(x))=g(f(x))$. Or, $f(x)=0_E$ puisque $x\in\ker(f)$ donc $f(g(x))=g(0_E)=0_E$ car g est linéaire.

   Ainsi, on a bien $g(x)\in\ker(f)$ ce qui prouve que $\ker(f)$ est stable par g.

   • Soit $y\in\mathrm{Im}(f)$. Montrons que $g(y)\in\mathrm{Im}(f)$.

   Puisque $y\in\mathrm{Im}(f)$, il existe $x\in E$ tel que $y=f(x)$ donc $g(y)=g(f(x))=f(g(x))$ car $f\circ g=g\circ f$ donc on a bien $g(y)=f(g(x))\in\mathrm{Im}(f)$, ce qui prouve que $\mathrm{Im}(f)$ est stable par g.

Exercice 3. Par hypothèse, pour tout $x\in E$, les vecteurs x et $f(x)$ sont colinéaires.

Si $x=0$, c'est évident car $f(x)=x=0_E$.

Si $x\neq 0_E$, ceci signifie qu'il existe un scalaire $\lambda\in\mathbb{K}$ tel que $f(x)=\lambda x$. A priori, ce scalaire λ dépend du choix du vecteur x. On va montrer qu'on peut en fait choisir le même λ pour tous les vecteurs x de l'espace vectoriel E.

Soient x et y deux vecteurs non nuls de E.

Il existe donc deux scalaires $(\lambda_x,\lambda_y)\in\mathbb{K}^2$ tels que $f(x)=\lambda_x x$ et $f(y)=\lambda_y y$.

Montrons que $\lambda_x=\lambda_y$.

Il y a deux cas.

• Supposons que les vecteurs x et y soient colinéaires, i.e. il existe un scalaire $\alpha\in\mathbb{K}$ tel que $y=\alpha x$.

Notons qu'on a nécessairement $\alpha\neq 0$ car $y\neq 0$.

Alors par linéarité de f, on a $f(y)=f(\alpha x)=\alpha f(x)=\alpha\lambda_x x$.

D'autre part, on a $f(y)=\lambda_y y=\alpha\lambda_y x$.

Donc $\alpha\lambda_x x=\alpha\lambda_y x$, d'où $(\lambda_x-\lambda_y)\alpha x=0_E$. Or, $\alpha x\neq 0_E$ car $\alpha\neq 0$ et $x\neq 0_E$ donc $\lambda_x-\lambda_y=0$ d'où $\lambda_x=\lambda_y$.

• Supposons que les vecteurs x et y ne soient pas colinéaires, i.e. la famille (x,y) est libre.

Par hypothèse, il existe un scalaire $\lambda_{x+y}\in\mathbb{K}$ tel que $f(x+y)=\lambda_{x+y}(x+y)=\lambda_{x+y}x+\lambda_{x+y}y$.

Par ailleurs, par linéarité de f, on a

$$f(x+y) = f(x) + f(y) = \lambda_x x + \lambda_y y.$$

Par unicité des coordonnées dans une famille libre, on a $\lambda_x = \lambda_{x+y}$ et $\lambda_y = \lambda_{x+y}$ donc $\lambda_x = \lambda_y$.
Dans tous les cas, pour tout couple de vecteurs (x, y) non nuls, on a $\lambda_x = \lambda_y$ donc il existe un $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que pour tout $x \in E \setminus \{0\}, f(x) = \lambda x$.
L'égalité restant trivialement vraie pour $x = 0_E$ (car $f(x) = 0_E$), on a bien montré l'existence d'un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que pour tout $x \in E, f(x) = \lambda x$.

Exercice 4.

1. Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(x) = 0_E$.
   En appliquant f^{n-1} à cette égalité, et sachant que pour tout $k \geqslant n, f^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$, on obtient $\lambda_0 f^{n-1}(x) = 0_E$.
   Or, $f^{n-1}(x) \neq 0_E$ par hypothèse donc $\lambda_0 = 0$.
   En appliquant maitenant f^{n-2}, on obtient $\lambda_1 = 0$ et en répétant le même procédé de proche en proche, on obtient pour tout $k \in [\![0, n-1]\!], \lambda_k = 0$ ce qui prouve que la famille $(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ est libre.

2. Soit $u \in F$. Il existe des scalaires $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que $u = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(x)$.

   Par linéarité de f, on a $f(u) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^{k+1}(x) \underset{f^n(x)=0}{=} \sum_{k=0}^{n-2} \lambda_k f^{k+1}(x) \in F$, donc F est stable par f.

   La matrice de $f|_F$ dans la base $(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ de F est $\begin{pmatrix} 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ qui est une matrice de rang $n-1$.

Exercice 5.

1. L'application linéaire canoniquement associée à cette matrice est

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longrightarrow & (x+y+z, x+y+z, x+y+z). \end{array}$$

   On a

$$(x, y, z) \in \ker(f) \Leftrightarrow x+y+z = 0 \Leftrightarrow (x, y, z) = (x, y, -x-y) = x(1, 0, -1) + y(0, 1, -1)$$

   donc $\ker(f) = \text{Vect}\{(1, 0, -1), (0, 1, -1)\}$.
   Enfin,

$$\begin{array}{rcl} \text{Im}(f) & = & \{(x+y+z, x+y+z, x+y+z | (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} \\ & = & \{(x+y+z)(1, 1, 1) | (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} \\ & = & \text{Vect}\{(1, 1, 1)\}. \end{array}$$

2. L'application linéaire canoniquement associée à cette matrice est
$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ x & \longrightarrow & (x, 4x, 0). \end{array}$$
On a $\ker(f) = \{0\}$ donc f est injective et $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\{(1,4,0)\}$.
3. L'application linéaire canoniquement associée à cette matrice est
$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longrightarrow & (z,y). \end{array}$$
On a $\ker(f) = \{(x,0,0) | x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\{(1,0,0)\}$.
Enfin, $\mathrm{Im}(f) = \{(z,y) | (y,z) \in \mathbb{R}^2\} = \{y(0,1) + z(1,0) | (y,z) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}\{(0,1),(1,0)\}$.
4. L'application linéaire canoniquement associée à cette matrice est
$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longrightarrow & (x+5y, 4x+20y, 7x+35y). \end{array}$$
On $(x,y) \in \ker(f) \Leftrightarrow x + 5y = 0 \Leftrightarrow x = -5y \Leftrightarrow (x,y) = (-5y, y) = y(-5,1)$ donc $\ker(f) = \mathrm{Vect}\{(-5,1)\}$.
Enfin,
$$\mathrm{Im}(f) = \{(x+5y, 4x+20y, 7x+35y) | (x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \{(x+5y)(1,4,7) | (x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}\{(1,4,7)\}.$$
5. L'application linéaire canoniquement associée à cette matrice est
$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longrightarrow & (x+7y, 8x+y, 9x+y). \end{array}$$
On a
$$(x,y) \in \ker(f) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x+7y & = & 0 \\ 8x+y & = & 0 \\ 9x+y & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -7y \\ -55y & = & 0 \\ -62y & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$$
d'où $\ker(f) = \{(0,0)\}$ donc f est injective.
Enfin,
$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Im}(f) & = & \{(x+7y, 8x+y, 9x+y) | (x,y) \in \mathbb{R}^2\} \\ & = & \{x(1,8,9) + y(7,1,1) | (x,y) \in \mathbb{R}^2\} \\ & = & \mathrm{Vect}\{(1,8,9),(7,1,1)\}. \end{array}$$
6. L'application linéaire canoniquement associée à cette matrice est
$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longrightarrow & (x+2y, 4x+5y). \end{array}$$
On a $(x,y) \in \ker(f) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x+2y & = & 0 \\ 4x+5y & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -2y \\ -3y & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$ d'où $\ker(f) = \{(0,0)\}$ donc f est injective.
Enfin, $\mathrm{Im}(f) = \{(x+2y, 4x+5y) | (x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \{x(1,4)+y(2,5) | (x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}\{(1,4),(2,5)\}$.
Or, les vecteurs $(1,4)$ et $(2,5)$ ne sont pas colinéaires donc ils forment une base de $\mathbb{R}^2$. On en déduit que $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2$ donc f est surjective.
Finalement, l'application linéaire f est bijective : c'est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.

7. L'application linéaire canoniquement associée à cette matrice est

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longrightarrow & (0,x,0). \end{array}$$

On a $\ker(f) = \{(0,y,z)|(y,z) \in \mathbb{R}^2\} = \{y(0,1,0)+z(0,0,1)|(y,z) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}\{(0,1,0),(0,0,1)\}$. Enfin, $\text{Im}(f) = \{(0,x,0)|x \in \mathbb{R}\} = \{x(0,1,0)|x \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}\{(0,1,0)\}$. On remarque en particulier que $\text{Im}(f) \subset \ker(f)$, ce qui implique que $f^2 = 0$.

8. L'application linéaire canoniquement associée à cette matrice est

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longrightarrow & x+2y+4z. \end{array}$$

On a $\ker(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3|x+2y+4z=0\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3|x=-2y-4z\} = \{(-2y-4z,y,z)|(y,z) \in \mathbb{R}^2\} = \{y(-2,1,0)+z(-4,0,1)|(y,z) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}\{(-2,1,0),(-4,0,1)\}$.
Enfin, $\text{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$ différent de $\{0\}$ car f n'est pas l'application nulle donc $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$, ce qui prouve que f est surjective.

Exercice 6.

1. • Soit $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\alpha(1,0,0)+\beta(0,1,0)+\gamma(1,1,1) = (0,0,0) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \alpha+\gamma & = & 0 \\ \beta+\gamma & = & 0 \\ \gamma & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$ $\alpha=\beta=\gamma=0$ donc la famille $\mathcal{B}_2$ est libre. Puisqu'elle est constituée de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$,c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

   • Soit $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\alpha(1,0,0)+\beta(1,1,0)+\gamma(1,1,1) = (0,0,0) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \alpha+\beta+\gamma & = & 0 \\ \beta+\gamma & = & 0 \\ \gamma & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$ $\alpha=\beta=\gamma=0$ donc la famille $\mathcal{B}_3$ est libre. Puisqu'elle est constituée de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$, c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. (a) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $\text{Mat}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(f) = A$.
   On a alors $f(1,0,0) = -(1,0,0)+3(0,1,0)-2(1,1,1) = (-3,1,-2)$, $f(0,1,0) = (1,0,0)-2(0,1,0)+(1,1,1) = (2,-1,1)$ et $f(0,0,1) = (1,0,0)-4(0,1,0)+3(1,1,1) = (4,-1,3)$.
   Ainsi, pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on a par linéarité de f :

$$\begin{array}{rcl} f(x,y,z) & = & f(x(1,0,0)+y(0,1,0)+z(0,0,1)) \\ & = & xf(1,0,0)+y(f(0,1,0))+zf(0,0,1) \\ & = & x(-3,1,-2)+y(2,-1,1)+z(4,-1,3) \\ & = & (-3x+2y+4z, x-y-z, -2x+y+3z). \end{array}$$

   (b) Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $\text{Mat}_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}(g) = A$.
   On a alors $g(1,0,0) = -1(1,0,0)+3(0,1,0)-2(0,0,1) = (-1,3,-2)$; $g(0,1,0) = (1,0,0)-2(0,1,0)+(0,0,1) = (1,-2,1)$ et $g(1,1,1) = (1,0,0)-4(0,1,0)+3(0,0,1) = (1,-4,3)$.
   En particulier, $g(0,0,1) = g((1,1,1)-(1,0,0)-(0,1,0)) = g(1,1,1)-g(1,0,0)-g(0,1,0) = (1,-4,3)-(-1,3,-2)-(1,-2,1) = (1,-5,4)$ donc pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{array}{rcl} g(x,y,z) & = & g(x(1,0,0)+y(0,1,0)+z(0,0,1)) \\ & = & xg(1,0,0)+yg(0,1,0)+zg(0,0,1) \\ & = & x(-1,3,-2)+y(1,-2,1)+z(1,-5,4) \\ & = & (-x+y+z, 3x-2y-5z, -2x+y+4z). \end{array}$$

(c) Soit h l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_1}(h) = A$.
On a alors $h(1,0,0) = 1(1,0,0) + 3(0,1,0) - 2(0,0,1) = (-1,3,-2); h(0,1,0) = (1,0,0) - 2(0,1,0) + (0,0,1) = (1,-2,1)$ et $h(0,0,1) = (1,0,0) - 4(0,1,0) + 3(0,0,1) = (1,-4,3)$ donc pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{array}{rcl} h(x,y,z) & = & h(x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)) \\ & = & xh(1,0,0) + yh(0,1,0) + zh(0,0,1) \\ & = & x(-1,3,-2) + y(1,-2,1) + z(1,-4,3) \\ & = & (-x+y+z, 3x-2y-4z, -2x+y+3z). \end{array}$$

3. (a) La matrice B est de rang 1 donc on a $\mathrm{rg}(f) = 1$ et d'après le théorème du rang, on en déduit que $\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\ker(f)) + \mathrm{rg}(f)$ d'où $\dim(\ker(f)) = 2$.
On sait que l'image de f est engendrée par les images des vecteurs de la base $\mathcal{B}_3$ donc $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\{f(1,0,0); f(1,1,0); f(1,1,1)\}$.
Or, $f(1,0,0) = (0,0,0)$ et $f(1,1,0) = f(1,1,1) = (1,0,0) + (0,1,0) + (1,1,1) = (2,2,1)$ donc $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\{(2,2,1)\}$.
Enfin, on a $(1,0,0) \in \ker(f)$ et $(1,1,1) - (1,1,0) = (0,0,1) \in \ker(f)$ puisque $f(0,0,1) = f(1,1,1) - f(1,1,0) = (0,0,0)$ donc $(0,0,1) \in \ker(f)$.
Puisque la famille $((1,0,0),(0,0,1))$ est libre, est contenue dans $\ker(f)$ et que $\dim(\ker(f)) = 2$, on en déduit que c'est une base de $\ker(f)$.
(b) Les dimensions de l'image et du noyau de g sont les mêmes que dans la question précédente puisqu'elles dépendent du rang de B.
On a comme ci-dessus, $\ker(f) = \mathrm{Vect}\{(1,0,0),(1,1,1)-(0,1,0)\} = \mathrm{Vect}\{(1,0,0),(1,0,1)\}$ et $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\{f(0,1,0)\} = \mathrm{Vect}\{(1,0,0)+(1,1,0)+(1,1,1)\} = \mathrm{Vect}\{(3,2,1)\}$.
(c) De même, $\ker(f) = \mathrm{Vect}\{(1,0,0),(1,1,1)-(0,1,0)\} = \mathrm{Vect}\{(1,0,0),(1,0,1)\}$ et $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\{f(0,1,0)\} = \mathrm{Vect}\{(1,0,0)+(0,1,0)+(1,1,1)\} = \mathrm{Vect}\{(2,2,1)\}$.

Exercice 7.

1. Simple calcul !
2. La question précédente montre que la matrice de $f^3 - 2f^2 + f - 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ est nulle, ce qui prouve que $f^3 - 2f^2 + f - 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$ ou encore $\frac{1}{2}(f^2 - 2f + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$.
On en déduit que f est bijective, donc f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ et
$$f^{-1} = \frac{1}{2}(f^2 - 2f + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}).$$

Exercice 8.

1. On a

$$\begin{array}{rcl} (x,y,z) \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) & \Leftrightarrow & (A - 3I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} -5x - 2y + z & = & 0 \\ -2x - 2y - 2z & = & 0 \\ x - 2y - 5z & = & 0 \end{array} \right. \\ & \underset{L_3 \leftarrow 5L_3 + L_1}{\overset{L_2 \leftarrow 5L_2 - 2L_1}{\Longleftrightarrow}} & \left\{ \begin{array}{rcl} -5x - 2y + z & = & 0 \\ -6y - 12z & = & 0 \\ -12y - 24z & = & 0 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & z \\ y & = & -2z \end{array} \right. \end{array}$$

donc $\ker(f - 3\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}\{(1, -2, 1)\}$.

2. On a

$$\begin{aligned}(x, y, z) \in \ker(f + 3\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) \quad &\Leftrightarrow \quad (A + 3I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} x - 2y + z & = & 0 \\ -2x + 4y - 2z & = & 0 \\ x - 2y + z & = & 0 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \quad x - 2y + z = 0\end{aligned}$$

donc $\ker(f + 3\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}\{(1, 0, -1), (1, 1, 1)\}$.

3. Montrons que la famille $\mathcal{B} = ((1, -2, 1), (1, 0, -1), (1, 1, 1))$ est libre.
Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\alpha(1, -2, 1) + \beta(1, 0, -1) + \gamma(1, 1, 1) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \alpha + \beta + \gamma & = & 0 \\ -2\alpha + \gamma & = & 0 \\ \alpha - \beta + \gamma & = & 0 \end{array}\right. \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1}{\Longleftrightarrow}} \left\{\begin{array}{rcl} \alpha + \beta + \gamma & = & 0 \\ 2\beta + 3\gamma & = & 0 \\ -2\beta & = & 0 \end{array}\right.$$

donc $\alpha = \beta = \gamma = 0$, ce qui prouve que la famille $\mathcal{B}$ est libre. Puisqu'elle est constituée de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et que $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, on en déduit que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
Puisque $(1, -2, 1) \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$, on a $(f - 3\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})(1, -2, 1) = (0, 0, 0)$ donc

$$f(1, -2, 1) = 3(1, -2, 1).$$

De même puisque $(1, 0, -1) \in \ker(f + 3\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$, on a $(f + 3\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})(1, -2, 1) = (0, 0, 0)$ donc $f(1, -2, 1) = -3(1, 2, 1)$, et enfin $f(1, 1, 1) = -3(1, 1, 1)$.

On en déduit que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

Exercice 9. Montrons que la matrice A est inversible et calculons son inverse.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & 7 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & 5 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 6L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - 6L_1}{\Longleftrightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & -6 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow 5L_3 - 7L_2}{\overset{L_1 \leftarrow 5L_1 + 2L_2}{\Longleftrightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -5 & 0 & 0 & -7 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 12 & -7 & 5 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow -\frac{1}{5}L_1 \\ L_2 \leftarrow -\frac{1}{5}L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{10}L_3}}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{5} & -\frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{6}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{6}{5} & -\frac{7}{10} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

donc A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{5} & -\frac{2}{5} & 0 \\ \frac{6}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ \frac{6}{5} & -\frac{7}{10} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Puisque A est la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on en déduit que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ et que la matrice de f^{-1} dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est A^{-1} donc pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $f^{-1}(x, y, z) = (\frac{7}{5}x - \frac{2}{5}y, \frac{6}{5}x - \frac{1}{5}y, \frac{6}{5} - \frac{7}{10}y + \frac{1}{2}z)$.

Exercice 10.

1. Calculons le rang de la matrice A. On a

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

donc $\mathrm{rg}(A) = 3$, ce qui prouve que la matrice A est inversible. Puisqu'elle est la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on en déduit que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

2. Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + 4\gamma & = 0 \\ \alpha - \beta + 2\gamma & = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma & = 0 \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Longleftrightarrow}} \begin{cases} \alpha + \beta + 4\gamma & = 0 \\ -2\beta - 2\gamma & = 0 \\ -3\gamma & = 0 \end{cases}$$

donc $\alpha = \beta = \gamma = 0$, ce qui prouve que la famille est libre. Puisqu'elle est consituée de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et que $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, on en déduit que c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

3. (a) On a pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (2x + y - 2z, x, y)$ donc

$$f(u_1) = f(1, 1, 1) = (1, 1, 1) = u_1.$$

Ensuite, $f(u_2) = f(1, -1, 1) = (-1, 1, -1) = -u_2$ et $f(u_3) = f(4, 2, 1) = (8, 4, 2) = 2u_3$ donc la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(b) Calculons l'inverse de P. On a

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Longleftrightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{L_1 \leftarrow 2L_1 + L_2}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 6 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_2 \leftarrow 3L_2 - 2L_3}{\overset{L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3}{\Longleftrightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{L_1 \leftarrow \frac{1}{2} L_1 \\ L_2 \leftarrow -\frac{1}{6} L_2 \\ L_3 \leftarrow -\frac{1}{3} L_3}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{array}\right)$$

donc P est inversible et $P^{-1} = \dfrac{1}{6} \begin{pmatrix} -3 & 3 & 6 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

On a alors

$$PDP^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 3 & 6 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 8 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 3 & 6 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A.$$

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice de f^n dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$\begin{aligned} A^n = PD^nP^{-1} &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 3 & 6 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & (-1)^n & 2^{n+2} \\ 1 & (-1)^{n+1} & 2^{n+1} \\ 1 & (-1)^n & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 3 & 6 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3+(-1)^n+2^{n+3} & 3(1+(-1)^{n+1}) & 6+2(-1)^n-2^{n+3} \\ -3+(-1)^{n+1}+2^{n+2} & 3(1+(-1)^n) & 6+2(-1)^{n+1}-2^{n+2} \\ -3+(-1)^n+2^{n+1} & 3(1+(-1)^{n+1}) & 6+2(-1)^n-2^{n+1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exercice 11.

1. • Montrons que φ est linéaire.
   Soient $(P,Q) \in (\mathbb{R}_{n+1}(X))^2$, soient $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda P + \mu Q) &= ((\lambda P + \mu Q)(a_0), \dots, (\lambda P + \mu Q)(a_n)) \\ &= \lambda(P(a_0), \dots, P(a_n)) + \mu(Q(a_0), \dots, Q(a_n)) \\ &= \lambda\varphi(P) + \mu\varphi(Q) \end{aligned}$$

   donc φ est linéaire.
   • On a pour tout $k \in [\![0,n]\!], \varphi(X^k) = (a_0^k, \dots, a_n^k)$ donc la matrice de φ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}^{n+1}$ est $\begin{pmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \dots & a_0^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^n \end{pmatrix}$.

2. • Montrons que φ est injective. Pour cela, montrons que $\ker(\varphi) = \{0\}$. On a toujours $0 \in \ker(\varphi)$. Soit $P \in \ker(\varphi)$. Alors pour tout $k \in [\![0,n]\!], P(a_k) = 0$. Puisque les $(a_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ sont deux à deux distincts, on en déduit que P admet au moins $n+1$ racines distinctes. Or, $P \in \mathbb{R}_n[X]$ donc $\deg(P) \leqslant n$. A fortiori, P admet plus de racines que son degré, ce qui implique que $P = 0$. Ainsi, $\ker(\varphi) = \{0\}$ donc φ est injective.
   • Puisque $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1 = \dim(R^{n+1})$, l'injectivité de l'application linéaire φ implique sa bijectivité donc φ est un isomorphisme.

Exercice 12. La première implication est une conséquence directe du théorème du rang.
Réciproquement, supposons que $\dim(F) + \dim(G) = n$.
Notons $p = \dim(F)$ et $q = \dim(G)$.
Soit $(e_i)_{1 \le i \le p}$ une base de F, soit $(u_i)_{1 \le i \le q}$ une base de G. On complète la famille $(e_i)_{1 \le i \le p}$ en une base de E, qu'on note $(e_i)_{1 \le i \le n}$.
On va construire une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\ker(f) = F$ et $\mathrm{im}(f) = G$ en définissant les images des vecteurs $(e_i)_{1 \le i \le n}$ par f.
On pose

$$f(e_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \le i \le p \\ u_{i-p} & \text{si } i \ge p+1. \end{cases}$$

On a alors $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n)) = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_q) = G$.
De plus, puisque pour tout $i \in [\![1,p]\!], e_i \in \ker(f)$, on en déduit que $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p) \subset \ker(f)$, i.e. $F \subset \ker(f)$.
Enfin, d'après le théorème du rang,

$$\dim(\ker(f)) = \dim(E) - \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(E) - \dim(G) = \dim(F),$$

ce qui permet de conclure que $\ker(f) = F$.

Exercice 13.

1. (a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Soit $x \in \ker(f^k)$. Alors $f^k(x) = 0_E$ donc par linéarité de f, on en déduit que $f^{k+1}(x) = f(f^k(x)) = f(0_E) = 0_E$, ce qui prouve que $x \in \ker(f^{k+1})$. On a donc bien l'inclusion $\ker(f^k) \subset \ker(f^{k+1})$.

   (b) • Si pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'inclusion $\ker(f^k) \subset \ker(f^{k+1})$ était stricte, on aurait pour tout $k \in \mathbb{N}, \dim(\ker(f^k)) < \dim(\ker(f^{k+1})$. Pour k assez grand, on aurait $\dim(\ker(f^k)) > \dim(E)$, ce qui est absurde. Nécessairement, il doit exister un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que $\ker(f^p) = \ker(f^{p+1})$.

   • Montrons alors que pour tout $k \geqslant p, \ker(f^k) = \ker(f^p)$. Montrons ce résultat par récurrence sur $k \geqslant p$.

   - Pour $k = p$, le résultat est trivial.

   - Soit $k \geqslant p$ fixé tel que $\ker(f^k) = \ker(f^p)$. Montrons que $\ker(f^{k+1}) = \ker(f^p)$.

   Puisque $k + 1 \geqslant p$, on sait d'après la première question que $\ker(f^p) \subset \ker(f^{k+1})$.

   Montrons que $\ker(f^{k+1}) \subset \ker f^p$.

   Soit $x \in \ker(f^{k+1})$, i.e. $f^{k+1}(x) = 0_E$ donc $f^k(f(x)) = 0_E$.

   Ainsi, $f(x) \in \ker(f^k) = \ker(f^p)$ par hypothèse de récurrence, donc $f^p(f(x)) = f^{p+1}(x) = 0_E$.

   Ainsi, $x \in \ker(f^{p+1}) = \ker(f^p)$, ce qui prouve bien l'inclusion $\ker(f^{k+1}) \subset \ker(f^p)$ puis l'égalité $\ker(f^{p+1}) = \ker(f^p)$.

   Par principe de récurrence, on a bien pour tout $k \geqslant p, \ker(f^k) = \ker(f^p)$.

2. (a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Soit $x \in \mathrm{Im}(f^{k+1})$. Il existe alors $a \in E$ tel que $x = f^{k+1}(a) = f^k(f(a)) \in \mathrm{Im}(f^k)$ donc on a bien l'inclusion $\mathrm{Im}(f^{k+1}) \subset \mathrm{Im}(f^k)$.

   (b) D'après le théorème du rang appliqué à f^p et à f^{p+1}, on a

$$\dim(E) = \dim(\ker(f^p)) + \dim(\mathrm{Im}(f^p)) = \dim(\ker(f^{p+1})) + \dim(\mathrm{Im}(f^{p+1})).$$

   Puisque $\ker(f^p) = \ker(f^{p+1})$, on en déduit $\dim(\mathrm{Im}(f^p)) = \dim(\mathrm{Im}(f^{p+1}))$. Or, on a l'inclusion $\mathrm{Im}(f^{p+1}) \subset \mathrm{Im}(f^p)$. On peut donc conclure que $\mathrm{Im}(f^p) = \mathrm{Im}(f^{p+1})$ par égalité des dimensions.

   De même, pour tout $k \geqslant p, \ker(f^k) = \ker(f^p)$ et $\mathrm{Im}(f^k) \subset \mathrm{Im}(f^p)$ donc on conclut une nouvelle fois que $\mathrm{Im}(f^k) = \mathrm{Im}(f^p)$ grâce au théorème du rang.

Exercice 14. • Montrons l'implication $\ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_E\} \Rightarrow \ker(f) = \ker(f^2)$.
Supposons que $\ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_E\}$. L'inclusion $\ker(f) \subset \ker(f^2)$ est toujours vraie et évidente. Montrons que $\ker(f^2) \subset \ker(f)$.
Soit $x \in \ker(f^2)$. Alors $0_E = f^2(x) = f(f(x))$ donc $f(x) \in \ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_E\}$. On en déduit que $f(x) = 0_E$, donc $x \in \ker(f)$, ce qui prouve l'inclusion $\ker(f) \subset \ker(f^2)$.
Finalement, on a bien $\ker(f) = \ker(f^2)$.

• Montrons l'implication $\ker(f) = \ker(f^2) \Rightarrow \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$.
Supposons que $\ker(f) = \ker(f^2)$.
L'inclusion $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$ est toujours vraie et évidente.
D'après le théorème du rang, on a

$$\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\ker(f^2)) + \dim(\mathrm{Im}(f^2)).$$

Puisque $\ker(f) = \ker(f^2)$, on en déduit $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathrm{Im}(f^2))$. Ainsi, $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Im}(f^2)$ ont même dimension, donc l'inclusion $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{im}(f)$ est en fait une égalité.

• Montrons l'implication $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2) \Rightarrow \forall x \in E, \exists (y, z) \in \ker(f) \times \mathrm{Im}(f), x = y + z$.
Soit $x \in E$. Alors $f(x) \in \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$ par hypothèse donc il existe $y \in E$ tel que $f(x) = f^2(y)$.
Ainsi, on a $f(f(y) - x) = 0_E$ d'où $z = f(y) - x \in \ker(f)$. On a donc bien $x = f(y) + (-z)$ avec $f(y) \in \mathrm{Im}(f)$ et $(-z) \in \ker(f)$.

• Enfin, montrons l'implication $\forall x \in E, \exists (y,z) \in \ker(f) \cap \mathrm{Im}(f), x = y + z \Rightarrow \ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_E\}$.
L'hypothèse implique que $E = \ker(f) + \mathrm{Im}(f)$. D'après la formule de Grassmann, on a donc

$$\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \mathrm{rg}(f) - \dim(\ker(f) \cap \mathrm{Im}(f)).$$

Or, d'après le théorème du rang, on a également

$$\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \mathrm{rg}(f).$$

Nécessairement, il en découle que $\dim(\ker(f) \cap \mathrm{Im}(f))$, i.e. $\ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_E\}$.

Exercice 15. • Supposons que $f \circ f = 0$ et qu'il existe $h \in \mathcal{L}(E), f \circ h + h \circ f = \mathrm{Id}_E$.
Montrons tout d'abord que $\mathrm{Im}(f) \subset \ker(f)$.
Soit $x \in \mathrm{Im}(f)$. Il existe $a \in E$ tel que $x = f(a)$ donc $f(x) = f \circ f(a) = 0$ puisque $f \circ f = 0$ par hypothèse donc $x \in \ker(f)$, ce qui prouve l'inclusion $\mathrm{Im}(f) \subset \ker(f)$.
Soit $x \in \ker(f)$. On a alors $x = f \circ h(x) + h \circ f(x) = f(h(x)) + h(0_E) = f(h(x)) \in \mathrm{Im}(f)$ donc on a bien l'inclusion $\ker(f) \subset \mathrm{Im}(f)$.
Finalement, on a bien montré l'égalité $\ker(f) = \mathrm{Im}(f)$.
• Supposons que $\ker(f) = \mathrm{Im}(f)$.
- Montrons que $f \circ f = 0$. Pour tout $x \in E$, on a $f(x) \in \mathrm{Im}(f) = \ker(f)$ donc $f(f(x)) = 0_E$, ce qui prouve que $f \circ f = 0$.
- Montrons qu'il existe $h \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ h + h \circ f = \mathrm{Id}_E$.
Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de $\ker(f) = \mathrm{Im}(f)$. On a alors $\dim(\ker(f)) = \dim(\mathrm{Im}(f)) = n$ et d'après le théorème du rang, $\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = 2n$.
Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Puisque $e_i \in \mathrm{Im}(f)$, il existe $u_i \in E$ tel que $f(u_i) = e_i$.
Montrons que $(u_1, \ldots, u_n, e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E.
Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^{2n}$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = 0_E$.
En appliquant f à cette dernière égalité, on obtient

$$0_E = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(u_i) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i.$$

Puisque la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de $\ker(f)$, c'est une famille libre donc pour tout $i \in [\![1, n]\!], \lambda_i = 0$.
Il reste donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = 0_E$ et pour la même raison, on obtient que pour tout $i \in [\![1, n]\!], \alpha_i = 0$ donc la famille $(u_1, \ldots, u_n, e_1, \ldots, e_n)$ est une famille libre à $2n$ éléments de E : c'est donc une base de E.
Construisons alors h en donnant les images des vecteurs de la base $(u_1, \ldots, u_n, e_1, \ldots, e_n)$.
Posons pour tout $i \in [\![1, n]\!] h(u_i) = 0_E$ et $h(e_i) = u_i$. Ceci définit une application $h \in \mathcal{L}(E)$.
On a alors pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$f \circ h(u_i) + h \circ f(u_i) = h(e_i) = u_i \quad \text{et} \quad f \circ h(e_i) + h \circ f(e_i) = f(u_i) = e_i$$

donc $f \circ h + h \circ f$ et Id_E coïncident sur la base $(u_1, \ldots, u_n, e_1, \ldots, e_n)$.
On a donc $f \circ h + h \circ f = \mathrm{Id}(E)$.

Exercice 16. • Si $f = 0$, alors $\mathrm{Im}(f) = \{0\}$ et on a clairement $\mathrm{Im}(f) \subset F$.
• On suppose dorénavant que $f \neq 0$. Puisque $f^2 = 0$, ceci implique que $\mathrm{Im}(f) \subset \ker(f)$ donc $\dim(\mathrm{Im}(f)) \leqslant \dim(\ker(f))$.
Or, d'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\ker(f)) = 3$ donc $\dim(\ker(f)) = 3 - \mathrm{Im}(f)$ d'où $\dim(\mathrm{Im}(f)) \leqslant 3 - \dim(f)$, et il s'ensuit que $\dim(\mathrm{Im}(f)) \leqslant \dfrac{3}{2}$ donc $\dim(\mathrm{Im}(f)) \in \{0, 1\}$.

Puisque $f \neq 0$, on a nécessairement $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 1$.
$\star$ Si f est nulle sur F, alors $F \subset \ker(f)$. Or, $\dim(\ker(f)) = \dim(F) = 2$ donc $\ker(f) = F$ dans ce cas et on a donc bien $\mathrm{Im}(f) \subset \ker(f) = F$.
$\star$ Si f n'est pas nulle sur F, alors il existe $x \in F$ tel que $f(x) \neq 0$. Puisque F est stable par f, alors $f(x) \in F$.
Par ailleurs, $f(x) \in \mathrm{Im}(f) \setminus \{0\}$ et puisque $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 1$, on en déduit que

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(x)) \subset F.$$

Dans tous les cas, on a bien montré que $\mathrm{Im}(f) \subset F$.

Exercice 17.

1. Soient $P, Q \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$f(P + \lambda Q)(X) = (P + \lambda Q)(X + 1) = P(X + 1) + \lambda Q(X + 1) = f(P)(X) + \lambda f(Q)(X)$$

   Donc f est linéaire.

2. $$f(1) = 1$$
$$f(X) = X + 1$$
$$f(X^2) = (X + 1)^2 = 1 + 2X + X^2$$
$$f(X^3) = (X + 1)^3 = 1 + 3X + 3X^2 + X^3$$

3. Dans la base $(1, X, X^2, X^3)$:
$$f(1) = (1, 0, 0, 0)$$
$$f(X) = (1, 1, 0, 0)$$
$$f(X^2) = (1, 2, 1, 0)$$
$$f(X^3) = (1, 3, 3, 1)$$

   La matrice de f est donc :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. On considère l'application $g : E \to E$ définie par :

$$g(P)(X) = P(X - 1)$$

   Alors :
$$f(g(P))(X) = g(P)(X + 1) = P((X + 1) - 1) = P(X)$$
$$g(f(P))(X) = f(P)(X - 1) = P((X - 1) + 1) = P(X)$$

   Donc $g = f^{-1}$ et f est bijective.

5. On calcule :
$$g(1) = 1$$
$$g(X) = X - 1$$
$$g(X^2) = (X - 1)^2 = 1 - 2X + X^2$$
$$g(X^3) = (X - 1)^3 = -1 + 3X - 3X^2 + X^3$$

Donc :

$$g(1) = (1, 0, 0, 0)$$
$$g(X) = (-1, 1, 0, 0)$$
$$g(X^2) = (1, -2, 1, 0)$$
$$g(X^3) = (-1, 3, -3, 1)$$

La matrice de f^{-1} est :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6. On vérifie par produit matriciel que :

$$A \cdot A^{-1} = I_4$$

Donc les matrices sont bien inverses l'une de l'autre.

Exercice 18.

1. (a) On remarque que la troisième colonne de A vérifie $C_3 = 2C_1 + C_2$ donc les colonnes de A sont liées et A **n'est pas inversible**.

   (b) On a

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 7 \\ 1 & 4 & 3 \\ -2 & -8 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 10 & 7 \\ 1 & 4 & 3 \\ -2 & -8 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}.$$

   Les colonnes de A^2 sont toutes proportionnelles : la première est nulle, et $C_2 = 2C_3$. Donc $\mathrm{rg}(A^2) = 1$.
   De plus $A^3 = 0$ donc $\mathrm{rg}(A^3) = 0$.

2. (a) Soit $x \in \ker f$. Alors $f(x) = 0$, donc $f^2(x) = f(f(x)) = f(0) = 0$. Ainsi $x \in \ker f^2$, ce qui prouve $\ker f \subset \ker f^2$.

   (b) On cherche $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ tel que $Ax = 0$:

$$\begin{cases} 2x_1 + 10x_2 + 7x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0 \\ -2x_1 - 8x_2 - 6x_3 = 0 \end{cases}$$

   La troisième équation est -2 fois la deuxième, donc redondante. De la deuxième : $x_1 = -4x_2 - 3x_3$. En substituant dans la première :

$$2(-4x_2 - 3x_3) + 10x_2 + 7x_3 = 2x_2 + x_3 = 0,$$

   donc $x_3 = -2x_2$, puis $x_1 = -4x_2 + 6x_2 = 2x_2$.
   En posant $x_2 = t \in \mathbb{R}$:

$$x = t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

   Donc $\ker f = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$, qui est de dimension 1.
   Par le théorème du rang : $\mathrm{rg}(A) = 3 - \dim \ker f = 2$, cohérent avec la question 1.

(c) Par le théorème du rang appliqué à f^2 :

$$\dim \ker f^2 = 3 - \mathrm{rg}(A^2) = 3 - 1 = 2.$$

Puisque $\dim \ker f = 1 \neq 2 = \dim \ker f^2$, on a $\ker f \neq \ker f^2$.

3. On rappelle $u = (-2, -1, 2)^T$. On vérifie directement que $u = -\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \in \ker f$, donc $f(u) = 0$.

(a) On cherche $v = (v_1, 1, v_3)^T$ tel que $Av = u$:

$$\begin{cases} 2v_1 + 7v_3 = -12 \\ v_1 + 3v_3 = -5 \\ -2v_1 - 6v_3 = 10 \end{cases}$$

(on a substitué $v_2 = 1$ et la troisième équation est -2 fois la deuxième, donc redondante). De la deuxième : $v_1 = -5 - 3v_3$. En substituant dans la première :

$$2(-5 - 3v_3) + 7v_3 = -10 + v_3 = -12,$$

donc $v_3 = -2$ et $v_1 = 1$. On pose $v = (1, 1, -2)^T$, qui satisfait $f(v) = u$.

(b) On cherche $w = (w_1, 1, w_3)^T$ tel que $Aw = v = (1, 1, -2)^T$:

$$\begin{cases} 2w_1 + 7w_3 = -9 \\ w_1 + 3w_3 = -3 \\ -2w_1 - 6w_3 = 6 \end{cases}$$

La troisième est -2 fois la deuxième. De la deuxième : $w_1 = -3 - 3w_3$. En substituant :

$$2(-3 - 3w_3) + 7w_3 = -6 + w_3 = -9,$$

donc $w_3 = -3$ et $w_1 = 6$. On pose $w = (6, 1, -3)^T$, qui satisfait $f(w) = v$.

(c) On a :

$$u = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Montrons que u, v, w sont linéairement indépendants.
Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ et supposons $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$:

$$\begin{cases} -2\alpha + \beta + 6\gamma = 0 \\ -\alpha + \beta + \gamma = 0 \\ 2\alpha - 2\beta - 3\gamma = 0 \end{cases}$$

$L_1 - L_2$ donne $-\alpha + 5\gamma = 0$, soit $\alpha = 5\gamma$.
L_2 donne $\beta = \alpha - \gamma = 4\gamma$.
L_3 : $2(5\gamma) - 2(4\gamma) - 3\gamma = -\gamma = 0$, donc $\gamma = 0$, puis $\alpha = \beta = 0$.
Ainsi $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et la matrice de passage est :

$$P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

(d) P est inversible car ses colonnes forment une base de $\mathbb{R}^3$. On calcule P^{-1} par pivot de Gauss sur $(P \mid I_3)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 1 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \iff L_1 \leftarrow -\frac{1}{2}L_1 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{2} & -3 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}}{\iff} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{2} & -3 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -2 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_2 \leftarrow 2L_2}{\iff} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{2} & -3 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{2}L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2}}{\iff} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -5 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow -L_3}{\iff} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -5 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 + 5L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 4L_3}}{\iff} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -9 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

Donc :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -9 & -5 \\ -1 & -6 & -4 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

(e) Par construction, $f(u) = 0$, $f(v) = u$, $f(w) = v$. Les coordonnées de ces images dans $\mathcal{B}'$ forment les colonnes de N :

$$N = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On vérifie que :

$$N = P^{-1}AP \qquad \text{(ou de façon équivalente } A = PNP^{-1}\text{)}.$$

4. (a) Soit $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
— **Non-vide :** $B \cdot 0 = 0 = 0 \cdot B$, donc $0 \in C_B$.
— **Stabilité par addition :** Si $M, M' \in C_B$, alors $B(M + M') = BM + BM' = MB + M'B = (M + M')B$, donc $M + M' \in C_B$.
— **Stabilité par multiplication scalaire :** Si $M \in C_B$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $B(\lambda M) = \lambda BM = \lambda MB = (\lambda M)B$, donc $\lambda M \in C_B$.

Ainsi C_B est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

(b) Calculons N^2 :

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad N^3 = N^2 \cdot N = 0.$$

Inclusion $\mathrm{Vect}(I_3, N, N^2) \subset C_N$.
I_3 commute avec toute matrice. N commute avec lui-même. Et $N^2N = N^3 = 0 = NN^2$. Donc par linéarité, tout élément de $\mathrm{Vect}(I_3, N, N^2)$ commute avec N : $\mathrm{Vect}(I_3, N, N^2) \subset C_N$.

Inclusion $C_N \subset \mathrm{Vect}(I_3, N, N^2)$.
Soit $M \in C_N$. Posons

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}.$$

On calcule :

$$MN = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & d & e \\ 0 & g & h \end{pmatrix}, \qquad NM = \begin{pmatrix} d & e & f \\ g & h & k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'égalité $MN = NM$ donne, en identifiant terme à terme :

$$d = 0, \quad g = 0, \quad h = 0, \quad e = a, \quad f = b, \quad k = a.$$

Donc :

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = a\,I_3 + b\,N + c\,N^2.$$

Ainsi $M \in \mathrm{Vect}(I_3, N, N^2)$, ce qui prouve $C_N \subset \mathrm{Vect}(I_3, N, N^2)$.

I_3, N, N^2 sont linéairement indépendants (leurs seules entrées non nulles sont en positions (i,i), $(i,i{+}1)$ et $(1,3)$ respectivement, toutes distinctes), donc $C_N = \mathrm{Vect}(I_3, N, N^2)$ avec $\dim C_N = 3$.

(c) Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Puisque P est inversible :

$$\begin{aligned} M \in C_A &\iff MA = AM \\ &\iff P^{-1}(MA)P = P^{-1}(AM)P \\ &\iff (P^{-1}MP)(P^{-1}AP) = (P^{-1}AP)(P^{-1}MP) \\ &\iff (P^{-1}MP)\,N = N\,(P^{-1}MP) \qquad (\text{car } N = P^{-1}AP) \\ &\iff P^{-1}MP \in C_N. \end{aligned}$$

(d) *Inclusion* $C_A \subset \mathrm{Vect}(I_3, A, A^2)$. Soit $M \in C_A$. Par la question précédente, $P^{-1}MP \in C_N = \mathrm{Vect}(I_3, N, N^2)$, donc il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $P^{-1}MP = \alpha I_3 + \beta N + \gamma N^2$. En multipliant à gauche par P et à droite par P^{-1}, et en utilisant $PNP^{-1} = A$ ainsi que $PN^2P^{-1} = (PNP^{-1})^2 = A^2$, on obtient :

$$M = \alpha I_3 + \beta A + \gamma A^2 \in \mathrm{Vect}(I_3, A, A^2).$$

Inclusion $\mathrm{Vect}(I_3, A, A^2) \subset C_A$. Tout polynôme en A commute avec A : $A \cdot p(A) = p(A) \cdot A$ pour tout polynôme p. En particulier I_3, A et A^2 sont tous dans C_A, et donc par linéarité $\mathrm{Vect}(I_3, A, A^2) \subset C_A$.
Ainsi $C_A = \mathrm{Vect}(I_3, A, A^2)$.

Indépendance de I_3, A, A^2. Supposons $\alpha I_3 + \beta A + \gamma A^2 = 0$. En conjuguant par P^{-1} : $\alpha I_3 + \beta N + \gamma N^2 = 0$. Comme I_3, N, N^2 sont linéairement indépendants (question 4.b), on a $\alpha = \beta = \gamma = 0$.
Donc $\{I_3, A, A^2\}$ est une base de C_A et :

$$\dim C_A = 3.$$