Lycée Fénelon — BCPST1
Année 2025–2026 — A. Wassfi

Programme de colles 27 — **Semaine du 25/05**

Questions de cours

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies. Soit $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{C}$ une base de F. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Soit $x \in E$.

Applications linéaires

1. Composition d'applications linéaires.
2. Bijection réciproque d'un isomorphisme.
3. $\ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de E et $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F.
4. f est injective si et seulement si $\ker(f) = \{0_E\}$.
5. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille génératrice de E.
   Alors $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$.
6. Une application linéaire $f : E \longrightarrow F$ est injective si et seulement si l'image par f de toute famille libre de E est une famille libre de F.
7. Il existe un isomorphisme $f \in \mathcal{L}(E, F)$ si et seulement si $\dim(E) = \dim(F)$.
8. Calcul matriciel de l'image d'un vecteur :
   $$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f(x)) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x).$$
9. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives n et p.
   L'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E, F) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \\ f & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \end{array}$ est un isomorphisme.
   En particulier, $\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim(\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})) = p \times n = \dim(E) \times \dim(F)$.
10. Matrice d'un isomorphisme : f est un isomorphisme si et seulement si la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ est inversible et dans ce cas,
    $$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f^{-1}) = (\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f))^{-1}.$$

Exercices

Applications linéaires

Définition d'une application linéaire. Opérations sur les applications linéaires. Endomorphisme, isomorphisme, automorphisme. Noyau et image d'une application linéaire. Caractérisation d'une application linéaire par l'image d'une base. Matrice d'une application linéaire. Application linéaire canoniquement associée à une matrice. Formule de changement de base pour un vecteur. Matrice d'une combinaison linéaire d'applications linéaires. Matrice d'une composée d'applications linéaires. Matrice d'un isomorphisme. Rang d'une application linéaire.