
Programme de colles 27

Semaine du 25/05

Questions de cours

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimensions finies. Soit \mathcal{B} une base de E et \mathcal{C} une base de F . Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Soit $x \in E$.

Applications linéaires

1. f est injective si et seulement si $\ker(f) = \{0_E\}$.
2. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et (e_1, \dots, e_n) une famille génératrice de E .
Alors $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une famille génératrice de $\text{Im}(f)$.
3. Une application linéaire $f : E \rightarrow F$ est injective si et seulement si l'image par f de toute famille libre de E est une famille libre de F .
4. Il existe un isomorphisme $f \in \mathcal{L}(E, F)$ si et seulement si $\dim(E) = \dim(F)$.
5. Calcul matriciel de l'image d'un vecteur :

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(f(x)) = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x).$$

6. Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimensions respectives n et p .

L'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E, F) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \\ f & \longmapsto & \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) \end{array}$ est un isomorphisme.

En particulier, $\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim(\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})) = p \times n = \dim(E) \times \dim(F)$.

7. Matrice d'un isomorphisme : f est un isomorphisme si et seulement si la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$ est inversible et dans ce cas,

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(f^{-1}) = (\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f))^{-1}.$$

8. Théorème du rang.
9. Il existe une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ surjective si et seulement si

$$\dim(E) \geq \dim(F).$$

10. Invariance du rang d'une application linéaire par composition par un isomorphisme.

On suppose qu'il existe un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie G et $g \in \mathcal{L}(F, G)$ tels que g soit un isomorphisme.

Alors $\text{rg}(g \circ f) = \text{rg}(f)$.

Exercices

Applications linéaires

Définition d'une application linéaire. Opérations sur les applications linéaires. Endomorphisme, isomorphisme, automorphisme. Noyau et image d'une application linéaire. Caractérisation d'une application linéaire par l'image d'une base. Matrice d'une application linéaire. Application linéaire canoniquement associée à une matrice. Formule de changement de base pour un vecteur. Matrice d'une combinaison linéaire d'applications linéaires. Matrice d'une composée d'applications linéaires. Matrice d'un isomorphisme. Rang d'une application linéaire. Théorème du rang. Lien avec f injective, f surjective, f bijective. Lien entre rang d'une matrice, d'une application linéaire, d'une famille de vecteurs.