
DEVOIR SURVEILLÉ DE MATHÉMATIQUES N°8
Samedi 9 mai 2026 (4h00)

L'énoncé est constitué de cinq exercices et comporte 5 pages.

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, la précision et la concision de la rédaction. Le soin de la copie ainsi que l'orthographe entreront également pour une part importante dans l'appréciation du travail rendu.

Les résultats doivent être encadrés.

Si un candidat repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Lorsqu'un raisonnement utilise le résultat d'une question précédente, il est demandé au candidat d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.

Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1

On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$ et les vecteurs $a = (2, 1, 1, 0)$, $b = (1, 2, 2, 1)$, $c = (2, 2, 3, 1)$, $d = (1, 4, 2, 2)$ et $e = (1, 3, 0, 1)$.

1. Rappeler la dimension de E . La famille (a, b, c, d, e) est-elle libre ou liée ? Justifier brièvement.
2. Étudier si la famille (c, d, e) est libre. Si ce n'est pas le cas, donner une combinaison linéaire entre ses vecteurs.
3. Montrer que la famille (a, b, c, d) est une base de E .
4. Déterminer les coordonnées des vecteurs c , d et e dans la base (a, b, c, d) .
5. Démontrer que l'espace

$$G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - z + t = 0 \text{ et } y - 2t = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel de E . En donner une base et sa dimension.

6. Démontrer que $c \in G$. Justifier l'existence d'une base de G comportant c , puis en donner une.
7. Déterminer, suivant les valeurs du réel m , si les vecteurs $u_m = (2m, 2m, 0, 0)$ et $v_m = (m + 6, 4, m + 2, 0)$ forment une famille libre ou liée.
8. Les vecteurs u_m et v_m forment-ils une base de G ?
9. Donner les équations cartésiennes vérifiées par les vecteurs (x, y, z, t) qui sont dans F définie par

$$F = \text{Vect}(c, d).$$

10. Déterminer une base de $F \cap G$.

Exercice 2

On note $M_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées de taille 3×3 à coefficients réels, et $M_{3,1}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices colonnes de taille 3×1 à coefficients réels. Pour tous réels a et b , on définit la matrice

$$P(a, b) = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}.$$

On définit par ailleurs l'ensemble de matrices suivant :

$$F = \{ P(a, b) : (a, b) \in \mathbb{R}^2 \}.$$

On pose enfin

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les parties A et B de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A – Étude de l'ensemble F et de la matrice N

1. Démontrer que les matrices I_3 et N appartiennent à l'ensemble F .
2. Montrer que l'ensemble F forme un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$ et que (I_3, N) est une base de F . En déduire la dimension de F .
3. Donner deux réels a et b tels que $N^2 = aI_3 + bN$.
Quelles sont les coordonnées de N^2 dans la base (I_3, N) ?
4. Montrer que N est inversible, que son inverse N^{-1} appartient à l'ensemble F et donner les coordonnées de N^{-1} dans la base (I_3, N) de F .

Indication : on pourra utiliser la question précédente.

5. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- (a) Justifier que P est inversible et déterminer P^{-1} .
- (b) Montrer que $P^{-1}NP$ est une matrice diagonale.
- (c) En déduire que pour tout entier naturel n , il existe deux réels a_n et b_n tels que $N^n = P(a_n, b_n)$ et que ces réels vérifient la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}.$$

On notera dans la suite de l'exercice la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Soient les matrices $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que $A = QBQ^{-1}$.
7. En déduire, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, une expression de A^n .
8. En déduire, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, une expression de N^n .

Partie B – Inversibilité des matrices de F

On dit qu'une matrice $M \in M_3(\mathbb{R})$ admet un inverse dans F si M est inversible et $M^{-1} \in F$.

9. Soient b un réel et (x, y) un couple de réels. Montrer que

$$P(1, b)P(x, y) = P(x + 2by, bx + y + by) = P(x, y)P(1, b).$$

10. Déduire de la question précédente que pour tout réel b , la matrice $P(1, b)$ admet un inverse dans F si et seulement si le système

$$\begin{cases} x = 1 - 2by \\ (1 + b - 2b^2)y = -b \end{cases}$$

admet une solution (x, y) .

11. Montrer que la matrice $P(1, b)$ admet un inverse dans F si et seulement si $b \in \mathbb{R} \setminus \{1, -\frac{1}{2}\}$.
12. Quelles sont les valeurs de b pour lesquelles la matrice $P(1, b)$ est inversible ?
13. Soit a un réel non nul. Justifier que pour tout réel b , on a $P(a, b) = aP(1, b/a)$ et en déduire les valeurs de b pour lesquelles la matrice $P(a, b)$ est inversible.
14. Donner les valeurs de b pour lesquelles la matrice $P(0, b)$ est inversible.

Indication : on pourra utiliser le fait, prouvé en partie A, que la matrice N est inversible.

15. Conclure en donnant l'ensemble des matrices de F qui ne sont pas inversibles.

Exercice 3

On considère la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de polynômes à coefficients réels définie par :

$$\begin{cases} P_1 = 1 \\ P_2 = X \\ \forall n \geq 3 \quad P_n = XP_{n-1} - P_{n-2} \end{cases}$$

- Déterminer les polynômes P_3 et P_4 . On les écrira sous forme développée et factorisée.
- Déterminer, en le justifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le degré de P_n ainsi que son coefficient dominant.
- Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Développer et simplifier $\sin(a + b) + \sin(a - b)$.
- Soit $\theta \in]0, \pi[$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$P_n(2 \cos(\theta)) = \frac{\sin(n\theta)}{\sin(\theta)}.$$

- Soit $n \geq 2$. Soit $\theta \in]0; \pi[$. Montrer que

$$\sin(n\theta) = 0 \iff \exists k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket \text{ tel que } \theta = \frac{k\pi}{n}.$$

- En déduire que pour tout entier $n \geq 2$, le polynôme P_n a exactement $n - 1$ racines deux à deux distinctes dans l'intervalle $] -2, 2[$ et les calculer.
- Factoriser P_n dans $\mathbb{R}[X]$, pour tout entier $n \geq 2$.
- Établir à partir de ce qui précède que pour tout entier $n \geq 2$:

$$\frac{\sin(n\theta)}{\sin(\theta)} = 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \left(\cos(\theta) - \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) \right).$$

Exercice 4

Pour toute fonction $f : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous noterons $S_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

- Quelle est la limite de la suite $(S_n(f))$? (*Aucune démonstration n'est attendue.*)
- Considérons la suite (u_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+n}$ et la suite (v_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{2k+1}.$$

- Démontrer que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.
- Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n + \frac{1}{2}u_n = u_{2n}$.
- Démontrer alors que la suite (v_n) converge vers $\frac{1}{2} \ln 2$.

- Pour $\alpha > 1$, déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k^\alpha}$ et un équivalent de $\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k^\alpha}$ en $+\infty$.

Exercice 5

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$I_n = \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{x/2} dx.$$

Le but de cet exercice est de montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 2.

1. Calculer I_1 .
2. Pour $x \in [0, n[$ fixé, donner un équivalent simple quand n tend vers l'infini de $\ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)$.
3. Ecrire sous forme exponentielle $\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$.
4. A l'aide d'une étude de fonction, montrer que pour tout $t \in [0, 1[$, $\ln(1 - t) \leq -t$.
En déduire que $I_n \leq 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
5. Montrer de même que pour tout $t \in [0, \frac{1}{2}]$, on a $-t - t^2 \leq \ln(1 - t)$.
6. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $a \in [0, \frac{n}{2}]$,

$$\int_0^a \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{x/2} dx \geq 2e^{-a^2/n} (1 - e^{-a/2}).$$

7. En déduire que

$$I_n \geq 2e^{-a^2/n} (1 - e^{-a/2}),$$

puis déterminer une expression de a en fonction de n vérifiant que

- $a \leq \frac{n}{2}$
 - $\frac{a^2}{n}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini,
 - a tend vers l'infini quand n tend vers l'infini.
8. Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 2.