CORRIGÉ DU DEVOIR SURVEILLÉ DE MATHÉMATIQUES N°8
Samedi 9 mai 2026 (3h00)

Exercice 1

On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$ et les vecteurs $a = (2,1,1,0)$, $b = (1,2,2,1)$, $c = (2,2,3,1)$, $d = (1,4,2,2)$ et $e = (1,3,0,1)$.

1. Rappeler la dimension de E. La famille (a,b,c,d,e) est-elle libre ou liée ? Justifier.

> $E = \mathbb{R}^4$ est un espace vectoriel de dimension **4**.
> La famille (a,b,c,d,e) contient 5 vecteurs dans un espace de dimension 4. Or, toute famille libre d'un espace de dimension n contient au plus n vecteurs, donc toute famille de plus de 4 vecteurs de $\mathbb{R}^4$ est nécessairement **liée**.
> Donc (a,b,c,d,e) est liée.

2. Étudier si la famille (c,d,e) est libre. Si ce n'est pas le cas, donner une combinaison linéaire entre ses vecteurs.

> Soit $(\alpha c + \beta d + \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\alpha c + \beta d + \gamma e = 0$. On obtient le système :
>
> $$\begin{cases} 2\alpha + \beta + \gamma = 0 \\ 2\alpha + 4\beta + 3\gamma = 0 \\ 3\alpha + 2\beta = 0 \\ \alpha + 2\beta + \gamma = 0 \end{cases} \underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_4 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_4}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} -3\beta - \gamma = 0 \\ \gamma = 0 \\ 3\alpha + 2\beta = 0 \\ \alpha + 2\beta + \gamma = 0 \end{cases}$$
>
> On obtient un système triangulaire que l'on résout par remontée :
> - 2^{e} ligne : $\gamma = 0$.
> - 1^{re} ligne : $-3\beta - 0 = 0$ donc $\beta = 0$.
> - 3^{e} ligne : $3\alpha + 2 \times 0 = 0$, donc $\alpha = 0$.
>
> La seule solution est $(\alpha, \beta, \gamma) = (0,0,0)$: la famille (c,d,e) est **libre**.

3. Montrer que la famille (a,b,c,d) est une base de E.

> La famille (a,b,c,d) contient exactement $4 = \dim E$ vecteurs. Il suffit donc de

montrer qu'elle est libre. On pose $\alpha a+\beta b+\gamma c+\delta d=0$, ce qui donne le système :

$$\begin{cases} 2\alpha+\beta+2\gamma+\delta=0 \\ \alpha+2\beta+2\gamma+4\delta=0 \\ \alpha+2\beta+3\gamma+2\delta=0 \\ \beta+\gamma+2\delta=0 \end{cases} \underset{\substack{L_1\leftarrow L_1-2L_2 \\ L_3\leftarrow L_3-L_2}}{\iff} \begin{cases} -3\beta-2\gamma-7\delta=0 \\ \alpha+2\beta+2\gamma+4\delta=0 \\ \gamma-2\delta=0 \\ \beta+\gamma+2\delta=0 \end{cases}$$

$$\underset{L_1\leftarrow L_1+3L_4}{\iff} \begin{cases} \gamma-\delta=0 \\ \alpha+2\beta+2\gamma+4\delta=0 \\ \gamma-2\delta=0 \\ \beta+\gamma+2\delta=0 \end{cases} \underset{L_1\leftarrow L_1-L_3}{\iff} \begin{cases} \delta=0 \\ \alpha+2\beta+2\gamma+4\delta=0 \\ \gamma-2\delta=0 \\ \beta+\gamma+2\delta=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha+2\beta+2\gamma+4\delta=0 \\ \beta+\gamma+2\delta=0 \\ \gamma-2\delta=0 \\ \delta=0 \end{cases}$$

On obtient un système triangulaire que l'on résout par remontée :

— 4^{re} ligne : $\delta=0$.

— 3^{e} ligne : $\gamma-2\times 0=0$, donc $\gamma=0$.

— 2^{e} ligne : $\beta+0+2\times 0=0$, donc $\beta=0$.

— 1^{re} ligne : $\alpha+0+0+0=0$, donc $\alpha=0$.

La seule solution est $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)=(0,0,0,0)$: la famille (a,b,c,d) est **libre**. Comme elle contient 4 vecteurs dans $\mathbb{R}^4$, c'est **une base de** E.

4. Déterminer les coordonnées des vecteurs c, d et e dans la base (a,b,c,d).

On note $\mathcal{B}=(a,b,c,d)$.
Coordonnées de c **:** $c=0\cdot a+0\cdot b+1\cdot c+0\cdot d$, donc

$$[c]_{\mathcal{B}}=(0,0,1,0).$$

Coordonnées de d **:** $d=0\cdot a+0\cdot b+0\cdot c+1\cdot d$, donc

$$[d]_{\mathcal{B}}=(0,0,0,1).$$

Coordonnées de e **:** On cherche $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\in\mathbb{R}^4$ tels que $\alpha a+\beta b+\gamma c+\delta d=e$, soit le système :

$$\begin{cases} 2\alpha+\beta+2\gamma+\delta=1 \\ \alpha+2\beta+2\gamma+4\delta=3 \\ \alpha+2\beta+3\gamma+2\delta=0 \\ \beta+\gamma+2\delta=1 \end{cases} \underset{\substack{L_1\leftarrow L_1-2L_2 \\ L_3\leftarrow L_3-L_2}}{\iff} \begin{cases} -3\beta-2\gamma-7\delta=-5 \\ \alpha+2\beta+2\gamma+4\delta=3 \\ \gamma-2\delta=-3 \\ \beta+\gamma+2\delta=1 \end{cases}$$

$$\underset{L_1\leftarrow L_1+3L_4}{\iff} \begin{cases} \gamma-\delta=-2 \\ \alpha+2\beta+2\gamma+4\delta=3 \\ \gamma-2\delta=-3 \\ \beta+\gamma+2\delta=1 \end{cases} \underset{L_1\leftarrow L_1-L_3}{\iff} \begin{cases} \delta=1 \\ \alpha+2\beta+2\gamma+4\delta=3 \\ \gamma-2\delta=-3 \\ \beta+\gamma+2\delta=1 \end{cases}$$

On obtient un système triangulaire que l'on résout par remontée :

— 1^{re} ligne : $\delta = 1$.

— 3^e ligne : $\gamma - 2 \times 1 = -3$, donc $\gamma = -1$.

— 4^e ligne : $\beta + (-1) + 2 \times 1 = 1$, donc $\beta = 0$.

— 2^e ligne : $\alpha + 0 + 2 \times (-1) + 4 \times 1 = 3$, donc $\alpha = 1$.

Vérification : $1 \cdot a + 0 \cdot b - 1 \cdot c + 1 \cdot d = (2,1,1,0) - (2,2,3,1) + (1,4,2,2) = e$.

$$\boxed{[e]_{\mathcal{B}} = (1, 0, -1, 1).}$$

5. Démontrer que l'espace

$$G = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x - z + t = 0 \text{ et } y - 2t = 0\right\}$$

est un sous-espace vectoriel de E. En donner une base et sa dimension.

G est un sous-espace vectoriel de E :
G est l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène (à second membre nul). Vérifions les trois axiomes :

— *Vecteur nul :* $(0,0,0,0)$ vérifie $0 - 0 + 0 = 0$ et $0 - 0 = 0$, donc $0_E \in G$.

— *Stabilité par addition :* Si $(x_1, y_1, z_1, t_1), (x_2, y_2, z_2, t_2) \in G$, alors $(x_1 + x_2) - (z_1 + z_2) + (t_1 + t_2) = (x_1 - z_1 + t_1) + (x_2 - z_2 + t_2) = 0$ et $(y_1 + y_2) - 2(t_1 + t_2) = 0$. Donc la somme appartient à G.

— *Stabilité par multiplication scalaire :* Si $(x,y,z,t) \in G$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda x - \lambda z + \lambda t = \lambda(x - z + t) = 0$ et $\lambda y - 2\lambda t = 0$. Donc $\lambda(x,y,z,t) \in G$.

Base et dimension :
Les équations $x - z + t = 0$ et $y - 2t = 0$ permettent d'exprimer x et y en fonction des variables libres z et t :

$$x = z - t, \qquad y = 2t.$$

Tout vecteur de G s'écrit donc :

$$(x,y,z,t) = z\,(1,0,1,0) + t\,(-1,2,0,1).$$

Posons $e_1 = (1,0,1,0)$ et $e_2 = (-1,2,0,1)$. Ces deux vecteurs sont non proportionnels (le premier a $y = 0$, le second a $y = 2 \neq 0$), donc (e_1, e_2) est libre. Comme $G = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$, on conclut :

$$\boxed{\mathcal{B}_G = \big((1,0,1,0), (-1,2,0,1)\big) \text{ est une base de } G, \quad \dim G = 2.}$$

Remarque : en montrant que $G = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$, on justifie au passage que G est un sous-espace vectoriel de E.

6. Démontrer que $c \in G$. Justifier l'existence d'une base de G comportant c, puis en donner une.

$c = (2, 2, 3, 1) \in G$. On vérifie les deux équations définissant G :

$$x - z + t = 2 - 3 + 1 = 0 \qquad y - 2t = 2 - 2 \times 1 = 0.$$

Donc $c \in G$.
Existence d'une base de G comportant c : Puisque $c \in G$ et $c \neq 0_E$, la famille (c) est libre dans G. Or $\dim G = 2$, donc d'après le théorème de la base incomplète, on peut compléter (c) en une base de G.

On cherche un vecteur de G non colinéaire à c. Prenons $e_1 = (1, 0, 1, 0) \in G$ (d'après Q5). Si $e_1 = \lambda c$ pour un $\lambda \in \mathbb{R}$, alors en particulier la deuxième coordonnée donne $0 = 2\lambda$, donc $\lambda = 0$, ce qui contredit $e_1 \neq 0$. Donc e_1 n'est pas colinéaire à c, et :

$$\boxed{\mathcal{B}'_G = \big((2, 2, 3, 1), (1, 0, 1, 0)\big)}$$

est une base de G comportant c.

7. Déterminer, suivant les valeurs du réel m, si les vecteurs $u_m = (2m, 2m, 0, 0)$ et $v_m = (m + 6, 4, m + 2, 0)$ forment une famille libre ou liée.

Cas $m = 0$: $u_0 = (0, 0, 0, 0) = 0_E$. Toute famille contenant le vecteur nul est liée. Donc (u_0, v_0) est **liée**.
Cas $m \neq 0$: $u_m \neq 0$. La famille (u_m, v_m) est liée si et seulement si $v_m = \lambda u_m$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$, soit :

$$(m + 6, 4, m + 2, 0) = \lambda(2m, 2m, 0, 0).$$

La troisième composante donne $m+2 = 0$, donc $m = -2$. Vérifions : pour $m = -2$, $u_{-2} = (-4, -4, 0, 0)$ et $v_{-2} = (4, 4, 0, 0) = -u_{-2}$. La famille est bien liée.
Pour $m \neq 0$ et $m \neq -2$, la troisième composante de v_m vaut $m + 2 \neq 0$ tandis que celle de u_m est nulle : v_m n'est donc pas colinéaire à u_m. La famille est **libre**.
Conclusion :

$$\boxed{(u_m, v_m) \text{ est liée } \iff m \in \{0, -2\}; \quad \text{libre sinon.}}$$

8. Les vecteurs u_m et v_m forment-ils une base de G ?

Pour que (u_m, v_m) soit une base de G (qui est de dimension 2), il faut et il suffit que (u_m, v_m) soit libre **et** que $u_m, v_m \in G$.
$u_m \in G$? On a $u_m = (2m, 2m, 0, 0)$. La première équation de G donne $x - z + t = 2m - 0 + 0 = 2m$, qui est nul seulement si $m = 0$. Or pour $m = 0$, $u_0 = 0$ et la famille est liée. Donc pour aucune valeur de m on n'a simultanément $u_m \in G$ et (u_m, v_m) libre.
Conclusion : Pour aucune valeur de m, les vecteurs u_m et v_m ne forment une base de G.

9. Donner les équations cartésiennes vérifiées par les vecteurs (x, y, z, t) qui sont dans $F = \text{Vect}(c, d)$.

Un vecteur (x, y, z, t) appartient à $F = \text{Vect}(c, d)$ si et seulement si il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $(x, y, z, t) = \lambda c + \mu d$, soit le système :

$$\begin{cases} 2\lambda + \mu & = & x \\ 2\lambda + 4\mu & = & y \\ 3\lambda + 2\mu & = & z \\ \lambda + 2\mu & = & t \end{cases}$$

C'est un système de 4 équations à 2 inconnues (λ, μ). On l'étudie par élimination.
De la quatrième équation : $\lambda = t - 2\mu$.
On reporte dans la première : $2(t - 2\mu) + \mu = x \Rightarrow 2t - 3\mu = x \Rightarrow \mu = \dfrac{2t - x}{3}$.
Puis $\lambda = t - 2 \cdot \dfrac{2t - x}{3} = \dfrac{3t - 4t + 2x}{3} = \dfrac{2x - t}{3}$.
On reporte dans les équations 2 et 3 :
Équation 2 :

$$2 \cdot \frac{2x - t}{3} + 4 \cdot \frac{2t - x}{3} = \frac{4x - 2t + 8t - 4x}{3} = \frac{6t}{3} = 2t = y.$$

Cela donne la condition $y - 2t = 0$.
Équation 3 :

$$3 \cdot \frac{2x - t}{3} + 2 \cdot \frac{2t - x}{3} = \frac{6x - 3t + 4t - 2x}{3} = \frac{4x + t}{3} = z.$$

Cela donne la condition $4x - 3z + t = 0$.
Les équations cartésiennes de F sont donc :

$$\boxed{F : \quad y - 2t = 0 \quad \text{et} \quad 4x - 3z + t = 0.}$$

10. Déterminer une base de $F \cap G$.

$F \cap G$ est l'ensemble des $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ vérifiant simultanément les équations de F et de G. On regroupe le système (l'équation $y - 2t = 0$ est commune aux deux) :

$$\begin{cases} y - 2t & = & 0 \\ 4x - 3z + t & = & 0 \\ x - z + t & = & 0 \end{cases}$$

De la troisième équation : $x = z - t$. On substitue dans la deuxième :

$$4(z - t) - 3z + t = z - 3t = 0 \implies z = 3t.$$

Puis $x = z - t = 3t - t = 2t$ et $y = 2t$.
Tout vecteur de $F \cap G$ s'écrit donc :

$$(x, y, z, t) = t\,(2, 2, 3, 1).$$

On reconnaît le vecteur $c = (2, 2, 3, 1)$. Comme $c \neq 0$, la famille est libre et :

$$\boxed{\mathcal{B}_{F\cap G} = \big((2, 2, 3, 1)\big), \quad \dim(F \cap G) = 1.}$$

Remarque : Ce résultat est cohérent avec le fait que $c \in G$ (d'après Q6) et $c \in F = \mathrm{Vect}(c, d)$ par définition.

Exercice 2

On note $M_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées 3×3 à coefficients réels. Pour tous réels a et b, on définit

$$P(a,b) = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}, \qquad F = \{P(a,b) : (a,b) \in \mathbb{R}^2\}, \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Partie A – Étude de l'ensemble F et de la matrice N

1. Démontrer que les matrices I_3 et N appartiennent à l'ensemble F.

On a $P(a,b) = aI_3 + bN$. Donc :
- $I_3 = P(1,0)$, obtenu en prenant $a = 1$ et $b = 0$. Donc $I_3 \in F$.
- $N = P(0,1)$, obtenu en prenant $a = 0$ et $b = 1$. Donc $N \in F$.

2. Montrer que l'ensemble F forme un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$ et que (I_3, N) est une base de F. En déduire la dimension de F.

F est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$:
- $P(0,0) = 0_{M_3(\mathbb{R})} \in F$.
- Si $P(a_1,b_1), P(a_2,b_2) \in F$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, alors $\lambda_1 P(a_1,b_1) + \lambda_2 P(a_2,b_2) = P(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2, \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2) \in F$ donc F est stable par combinaison linéaire.

(I_3, N) est une base de F :
Tout élément de F s'écrit $P(a,b) = aI_3 + bN$, donc $\mathrm{Vect}(I_3, N) = F$. Donc (I_3, N) est génératrice.
Si $aI_3 + bN = 0$, alors en lisant les coefficients diagonaux on obtient $a = 0$, et en lisant les coefficients hors-diagonaux on obtient $b = 0$. Donc (I_3, N) est libre.
Ainsi (I_3, N) est une base de F et $\boxed{\dim F = 2}$.

3. Donner deux réels a et b tels que $N^2 = aI_3 + bN$. Quelles sont les coordonnées de N^2 dans la base (I_3, N) ?

Calculons N^2 directement :

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0+1+1 & 0+0+1 & 0+1+0 \\ 0+0+1 & 1+0+1 & 1+0+0 \\ 0+1+0 & 1+0+0 & 1+1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Or $2I_3 + N = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Donc :

$$N^2 = 2I_3 + N, \qquad \text{c'est-à-dire } \boxed{a = 2,\ b = 1}.$$

Les coordonnées de N^2 dans la base (I_3, N) sont $(\mathbf{2}, \mathbf{1})$.

4. Montrer que N est inversible, que son inverse N^{-1} appartient à F et donner les coordonnées de N^{-1} dans la base (I_3, N) de F.

D'après la question précédente, $N^2 = 2I_3 + N$, soit $N^2 - N - 2I_3 = 0$, que l'on réécrit :

$$N\left(\frac{N - I_3}{2}\right) = I_3.$$

Cela montre que N est inversible et que $N^{-1} = \dfrac{N - I_3}{2} = \dfrac{1}{2}N - \dfrac{1}{2}I_3 = P\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right) \in F$.

Les coordonnées de N^{-1} dans la base (I_3, N) sont $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$.

5. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Justifier que P est inversible et déterminer P^{-1}.

La matrice P est inversible si et seulement si le système $PX = Y$ admet une unique solution pour tout second membre $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, c'est-à-dire si le système

$$\begin{cases} x - y - z = a \\ x + y = b \\ x + z = c \end{cases}$$

admet une unique solution $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{cases} x - y - z = a \\ x + y = b \\ x + z = c \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\iff} \begin{cases} x - y - z = a \\ 2y + z = b - a \\ y + 2z = c - a \end{cases}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3}{\iff} \begin{cases} x - y - z = a \\ -3z = b - 2c + a \\ y + 2z = c - a \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow -\frac{1}{3}L_2}{\iff} \begin{cases} x - y - z = a \\ z = \dfrac{-a - b + 2c}{3} \\ y + 2z = c - a \end{cases}$$

On obtient un système triangulaire que l'on résout par remontée :

— 2$^{\text{e}}$ ligne : $z = \dfrac{-a-b+2c}{3}$.

— 3$^{\text{e}}$ ligne : $y = c - a - 2z = c - a - \dfrac{2(-a-b+2c)}{3} = \dfrac{-a+2b-c}{3}$.

— 1$^{\text{re}}$ ligne : $x = a + y + z = a + \dfrac{-a+2b-c}{3} + \dfrac{-a-b+2c}{3} = \dfrac{a+b+c}{3}$.

Pour tout second membre (a, b, c), le système admet une unique solution : P est donc **inversible**. De plus,

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix},$$

donc

$$\boxed{P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.}$$

(b) Montrer que $P^{-1}NP$ est une matrice diagonale.

Calcul de $P^{-1}NP$:
On calcule d'abord NP :

$$NP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Puis $P^{-1}NP$:

$$P^{-1}NP = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On calcule le produit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Donc :

$$\boxed{P^{-1}NP = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.}$$

$P^{-1}NP$ est bien une matrice diagonale.

(c) En déduire que pour tout entier naturel n, il existe deux réels a_n et b_n tels que $N^n = P(a_n, b_n)$ et que ces réels vérifient la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Expression de N^n :

Posons $D = P^{-1}NP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, de sorte que $N = PDP^{-1}$.

Par récurrence immédiate, $N^n = PD^nP^{-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec

$$D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}.$$

On calcule PD^n :

$$PD^n = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & -(-1)^n & -(-1)^n \\ 2^n & (-1)^n & 0 \\ 2^n & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}.$$

Puis $N^n = PD^nP^{-1}$:

$$N^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2^n & -(-1)^n & -(-1)^n \\ 2^n & (-1)^n & 0 \\ 2^n & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On effectue le produit ligne par ligne :

— Ligne 1 : $\big(2^n+(-1)^n+(-1)^n,\ 2^n-2(-1)^n+(-1)^n,\ 2^n+(-1)^n-2(-1)^n\big)$
$= \big(2^n + 2(-1)^n,\ 2^n - (-1)^n,\ 2^n - (-1)^n\big)$.

— Ligne 2 : $\big(2^n - (-1)^n,\ 2^n + 2(-1)^n,\ 2^n - (-1)^n\big)$.

— Ligne 3 : $\big(2^n - (-1)^n,\ 2^n - (-1)^n,\ 2^n + 2(-1)^n\big)$.

On reconnaît la structure de $P(a, b)$ avec :

$$a_n = \frac{2^n + 2(-1)^n}{3}, \qquad b_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}.$$

Ainsi $N^n = P(a_n, b_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Relation de récurrence :

Puisque $N^{n+1} = N \cdot N^n$, on a $P(a_{n+1}, b_{n+1}) = N \cdot P(a_n, b_n)$, soit :

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} & b_{n+1} \\ b_{n+1} & a_{n+1} & b_{n+1} \\ b_{n+1} & b_{n+1} & a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b_n & a_n + b_n & a_n + b_n \\ a_n + b_n & 2b_n & a_n + b_n \\ a_n + b_n & a_n + b_n & 2b_n \end{pmatrix}.$$

En identifiant les coefficients diagonaux et extra-diagonaux :

$$a_{n+1} = 2b_n, \qquad b_{n+1} = a_n + b_n,$$

ce qui s'écrit bien sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}.$$

6. Soient les matrices $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   Montrer que $A = QBQ^{-1}$.

On calcule d'abord Q^{-1}. Le déterminant de Q vaut $\det(Q) = (-2) \times 1 - 1 \times 1 = -3$, donc :

$$Q^{-1} = \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On calcule ensuite QB :

$$QB = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2) \times (-1) + 1 \times 0 & (-2) \times 0 + 1 \times 2 \\ 1 \times (-1) + 1 \times 0 & 1 \times 0 + 1 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Puis QBQ^{-1} :

$$QBQ^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \times (-1) + 2 \times 1 & 2 \times 1 + 2 \times 2 \\ (-1) \times (-1) + 2 \times 1 & (-1) \times 1 + 2 \times 2 \end{pmatrix}$$

Donc

$$QBQ^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = A.$$

On a bien $A = QBQ^{-1}$.

7. En déduire, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, une expression de A^n.

$A = QBQ^{-1}$ donc $A^n = QB^nQ^{-1}$ (récurrence immédiate) :

$$A^n = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2(-1)^{n+1} & 1 \cdot 2^n \\ (-1)^n & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot (-1).$$

En calculant le produit ligne par ligne :

$$\boxed{A^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2(-1)^n + 2^n & -2(-1)^n + 2^{n+1} \\ (-1)^{n+1} + 2^n & (-1)^n + 2^{n+1} \end{pmatrix}.}$$

8. En déduire, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, une expression de N^n.

D'après la question 5c, $N^n = P(a_n, b_n)$ où $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$.
Pour $n = 0$: $N^0 = I_3 = P(1, 0)$, donc $(a_0, b_0) = (1, 0)$.
On calcule :

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2(-1)^n + 2^n \\ (-1)^{n+1} + 2^n \end{pmatrix},$$

soit $a_n = \dfrac{2^n + 2(-1)^n}{3}$ et $b_n = \dfrac{2^n - (-1)^n}{3}$.
Donc :

$$\boxed{N^n = \frac{2^n + 2(-1)^n}{3} I_3 + \frac{2^n - (-1)^n}{3} N = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2^n + 2(-1)^n & 2^n - (-1)^n & 2^n - (-1)^n \\ 2^n - (-1)^n & 2^n + 2(-1)^n & 2^n - (-1)^n \\ 2^n - (-1)^n & 2^n - (-1)^n & 2^n + 2(-1)^n \end{pmatrix}.}$$

Partie B – Inversibilité des matrices de F

On dit qu'une matrice $M \in M_3(\mathbb{R})$ admet un inverse dans F si M est inversible et $M^{-1} \in F$.

9. Soient b un réel et (x, y) un couple de réels. Montrer que

$$P(1,b)\,P(x,y) = P(x+2by,\ bx+y+by) = P(x,y)\,P(1,b).$$

Calculons $P(1,b)\,P(x,y) = (I_3 + bN)(xI_3 + yN) = xI_3 + yN + bxN + byN^2$.
Or $N^2 = 2I_3 + N$ (question Q3), donc $byN^2 = 2byI_3 + byN$. Ainsi :

$$P(1,b)\,P(x,y) = (x+2by)I_3 + (y+bx+by)N = P(x+2by,\ bx+y+by).$$

De même, $P(x,y)\,P(1,b) = (xI_3 + yN)(I_3 + bN) = xI_3 + bxN + yN + byN^2 = (x+2by)I_3 + (bx+y+by)N = P(x+2by, bx+y+by)$.
Les deux produits sont égaux. Les matrices de F commutent entre elles.

10. Déduire de la question précédente que pour tout réel b, la matrice $P(1,b)$ admet un inverse dans F si et seulement si le système

$$\begin{cases} x = 1 - 2by \\ (1+b-2b^2)\,y = -b \end{cases}$$

admet une solution (x, y).

$P(1,b)$ admet un inverse dans F s'il existe $P(x,y) \in F$ tel que $P(1,b)\,P(x,y) = I_3 = P(1,0)$.
D'après la question précédente, cette condition s'écrit :

$$P(x+2by,\ bx+y+by) = P(1,0),$$

soit le système :

$$\begin{cases} x + 2by &= 1 \\ bx + (1+b)y &= 0. \end{cases}$$

De la première équation : $x = 1 - 2by$. En substituant dans la seconde :

$$b(1-2by) + (1+b)y = 0 \implies b - 2b^2y + (1+b)y = 0 \implies (1+b-2b^2)y = -b.$$

On retrouve bien le système indiqué :

$$\begin{cases} x = 1 - 2by \\ (1+b-2b^2)\,y = -b \end{cases}$$

11. Montrer que la matrice $P(1,b)$ admet un inverse dans F si et seulement si $b \in \mathbb{R}\setminus\left\{1, -\frac{1}{2}\right\}$.

Le système admet une solution (x, y) si et seulement si :

- Soit $1 + b - 2b^2 \neq 0$: alors $y = \dfrac{-b}{1+b-2b^2}$ et $x = 1 - 2by$ sont déterminés de façon unique.
- Soit $1 + b - 2b^2 = 0$ et $b = 0$: la deuxième équation devient $0 \cdot y = 0$, soit une

infinité de solutions. Mais $b = 0$ donne $1 + 0 - 0 = 1 \neq 0$, donc ce cas ne se présente pas.

— Soit $1 + b - 2b^2 = 0$ et $-b \neq 0$ (i.e. $b \neq 0$) : le système est incompatible.

Les racines de $1 + b - 2b^2 = 0$, soit $2b^2 - b - 1 = 0$, sont :

$$\Delta = 1 + 8 = 9, \quad b = \frac{1 \pm 3}{4} \implies b = 1 \text{ ou } b = -\frac{1}{2}.$$

Pour ces deux valeurs, $b \neq 0$, donc le système est incompatible.

Conclusion : $P(1, b)$ admet un inverse dans $F \iff b \notin \left\{1, -\frac{1}{2}\right\}$.

12. Quelles sont les valeurs de b pour lesquelles la matrice $P(1, b)$ est inversible ?

— Si $b \notin \left\{1, -\frac{1}{2}\right\}$: d'après la question précédente, $P(1, b)$ est inversible (et son inverse est dans F).

— Si $b = 1$:
$P(1, 1)$ est inversible si et seulement si le système $P(1, 1)\,X = B$ admet une unique solution pour tout second membre $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ x + y + z = b \\ x + y + z = c \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\iff} \begin{cases} x + y + z = a \\ 0 = b - a \\ 0 = c - a \end{cases}$$

Ainsi, le système $P(1, 1)X = B$ n'admet pas toujours de solution (pour $a \neq b$ par exemple) : $P(1, 1)$ **n'est pas inversible.**

— Si $b = -\frac{1}{2}$:
$P(1, -\frac{1}{2})$ est inversible si et seulement si le système $P(1, -\frac{1}{2})\,X = B$ admet une unique solution pour tout second membre $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

$$\begin{cases} x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z = a \\ -\frac{1}{2}x + y - \frac{1}{2}z = b \\ -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + z = c \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2 + L_1}{\iff} \begin{cases} x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z = a \\ -\frac{1}{2}x + y - \frac{1}{2}z = b \\ 0 = a + b + c \end{cases}$$

Ainsi, le système $P(1, 1)X = B$ n'admet pas toujours de solution (pour $a = b = c = 1$ par exemple) : $P(1, -\frac{1}{2})$ **n'est pas inversible.**

Conclusion :

$$P(1, b) \text{ est inversible dans } M_3(\mathbb{R}) \iff b \notin \left\{1, -\frac{1}{2}\right\}.$$

C'est exactement la même condition qu'en Q11 : pour les matrices de F, être inversible dans $M_3(\mathbb{R})$ équivaut à admettre un inverse dans F.

13. Soit a un réel non nul. Justifier que pour tout réel b, on a $P(a, b) = a\,P(1, b/a)$ et en déduire les valeurs de b pour lesquelles la matrice $P(a, b)$ est inversible.

Pour $a \neq 0$:

$$a\,P\left(1, \frac{b}{a}\right) = a\left(I_3 + \frac{b}{a}N\right) = aI_3 + bN = P(a,b).$$

$P(a,b)$ est inversible $\iff a\,P\left(1, \frac{b}{a}\right)$ est inversible $\iff P\left(1, \frac{b}{a}\right)$ est inversible (car $a \neq 0$) $\iff \frac{b}{a} \notin \left\{1, -\frac{1}{2}\right\}$, soit $b \notin \left\{a, -\dfrac{a}{2}\right\}$.

Conclusion : Pour $a \neq 0$, $P(a,b)$ est inversible $\iff b \notin \left\{a, -\dfrac{a}{2}\right\}$.

14. Donner les valeurs de b pour lesquelles la matrice $P(0,b)$ est inversible.

$P(0,b) = bN$.

— Si $b = 0$: $P(0,0) = 0_{M_3(\mathbb{R})}$, qui n'est pas inversible.

— Si $b \neq 0$: $P(0,b) = bN$ est le produit d'un scalaire non nul par N, qui est inversible (Q4). Donc bN est inversible.

$P(0,b)$ est inversible $\iff b \neq 0$.

15. Conclure en donnant l'ensemble des matrices de F qui ne sont pas inversibles.

D'après les questions précédentes, récapitulons selon la valeur de a :

— $a = 0$ **:** $P(0,b) = bN$ est non inversible si, et seulement si, $b = 0$. La seule matrice non inversible est $P(0,0) = 0$.

— $a \neq 0$ **:** $P(a,b)$ est non inversible si, et seulement si, $b = a$ ou $b = -\dfrac{a}{2}$.

  — $b = a$ donne les matrices $P(a,a) = a(I_3 + N) = aP(1,1)$.

  — $b = -\dfrac{a}{2}$ donne les matrices $P(a, -\frac{a}{2}) = a\,P(1, -\frac{1}{2})$.

En résumé, les matrices de F non inversibles sont exactement :

$$\boxed{\left\{P(a,b) \in F \;:\; b = a \text{ ou } b = -\frac{a}{2}\right\},}$$

c'est-à-dire les matrices de la forme $P(a,a)$ $(a \in \mathbb{R})$ et $P(a, -a/2)$ $(a \in \mathbb{R})$.

Exercice 3 : étude d'une suite de polynômes

On considère la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\begin{cases} P_1 = 1 \\ P_2 = X \\ \forall n \geq 3, \quad P_n = XP_{n-1} - P_{n-2}. \end{cases}$$

1. Déterminer les polynômes P_3 et P_4. On les écrira sous forme développée et factorisée.

$P_3 = XP_2 - P_1 = X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$.
$P_4 = XP_3 - P_2 = X(X^2-1) - X = X^3 - 2X = X(X^2-2) = X(X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2})$.

2. Déterminer, en le justifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le degré de P_n ainsi que son coefficient dominant.

Montrons par récurrence double que $\deg P_n = n-1$ et que le coefficient dominant de P_n est 1.
Initialisation :
$P_1 = 1$ a degré $0 = 1-1$ et coefficient dominant 1.
$P_2 = X$ a degré $1 = 2-1$ et coefficient dominant 1.
Donc l'initialisation est vérifiée.
Hérédité : Soit $n \geq 3$. Supposons que pour tout $k \in \{n-2, n-1\}$, $\deg P_k = k-1$ et le coefficient dominant de P_k est 1. Alors :

$$P_n = XP_{n-1} - P_{n-2}.$$

XP_{n-1} est de degré $(n-1-1)+1 = n-1$ et de coefficient dominant 1.
P_{n-2} est de degré $(n-2)-1 = n-3 < n-1$.
Donc P_n est de degré $n-1$ (car $\deg(P+Q) = \max(\deg(P), \deg(Q))$ si $\deg(P) \neq \deg(Q)$) et de coefficient dominant 1 (car c'est celui de XP_{n-1} qui est celui P_{n-1}).
Conclusion :
Par le principe de récurrence double, la propriété est établie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Développer et simplifier $\sin(a+b) + \sin(a-b)$.

On a :

$$\sin(a+b) + \sin(a-b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a + \sin a \cos b - \sin b \cos a = 2 \sin a \cos b.$$

4. Soit $\theta \in \,]0, \pi[$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$P_n(2\cos\theta) = \frac{\sin(n\theta)}{\sin\theta}.$$

Montrons par récurrence double la propriété $\mathcal{H}_n$:
« pour tout $\theta \in]0, \pi[\quad P_n(2\cos\theta) = \dfrac{\sin(n\theta)}{\sin\theta}$ ».
Initialisation :
$\mathcal{H}_1$ **:** $P_1(2\cos\theta) = 1$ et $\dfrac{\sin\theta}{\sin\theta} = 1$ (car $\sin\theta > 0$ sur $]0, \pi[$).
$\mathcal{H}_2$ **:** $P_2(2\cos\theta) = 2\cos\theta$ et $\dfrac{\sin(2\theta)}{\sin\theta} = \dfrac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta} = 2\cos\theta$.
L'initialisation est vérifiée.
Hérédité $(n \geq 3)$ **:** Supposons $\mathcal{H}_k$ vraie pour tout $k \in \{n-2, n-1\}$. Alors :

$$\begin{aligned} P_n(2\cos\theta) &= 2\cos\theta \cdot P_{n-1}(2\cos\theta) - P_{n-2}(2\cos\theta) \\ &= 2\cos\theta \cdot \frac{\sin((n-1)\theta)}{\sin\theta} - \frac{\sin((n-2)\theta)}{\sin\theta} \\ &= \frac{2\cos\theta\sin((n-1)\theta) - \sin((n-2)\theta)}{\sin\theta}. \end{aligned}$$

Or, d'après la question précédente,

$$2\cos\theta\sin((n-1)\theta) = \sin(n\theta) + \sin((n-2)\theta).$$

Donc :

$$P_n(2\cos\theta) = \frac{\sin(n\theta) + \sin((n-2)\theta) - \sin((n-2)\theta)}{\sin\theta} = \frac{\sin(n\theta)}{\sin\theta}.$$

Conclusion : La propriété est établie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

5. Soit $n \geq 2$ et $\theta \in]0;\pi[$. Montrer que :

$$\sin(n\theta) = 0 \iff \exists\, k \in [\![0, n-1]\!] \text{ tel que } \theta = \frac{k\pi}{n}.$$

On a $\sin(n\theta) = 0 \iff n\theta \in \pi\mathbb{Z} \iff \theta = \dfrac{k\pi}{n}$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$.

Parmi ces valeurs, celles appartenant à $]0,\pi[$ vérifient $0 < \dfrac{k\pi}{n} < \pi$, soit $0 < k < n$, i.e. $k \in [\![1, n-1]\!]$. Donc, dans $]0,\pi[$:

$$\sin(n\theta) = 0 \iff \exists k \in [\![1, n-1]\!],\ \theta = \frac{k\pi}{n}.$$

6. En déduire que pour tout entier $n \geq 2$, le polynôme P_n a exactement $n-1$ racines deux à deux distinctes dans l'intervalle $]-2,2[$ et les calculer.

Pour $\theta \in]0,\pi[$, on a $\sin\theta > 0$, donc la question 4 donne :

$$P_n(2\cos\theta) = 0 \iff \sin(n\theta) = 0.$$

D'après la question 5, cela se produit exactement pour $\theta_k = \dfrac{k\pi}{n}$, $k \in [\![1, n-1]\!]$, donnant les racines :

$$x_k = 2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right), \quad k \in [\![1, n-1]\!].$$

De plus $x_k \in]-2,2[$. En effet, pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, $\theta_k \in]0,\pi[$, donc $\cos\theta_k \in]-1,1[$ et $x_k \in]-2,2[$.

Les x_k sont deux à deux distincts. En effet, la fonction $k \mapsto \cos(k\pi/n)$ est strictement décroissante sur $[\![1, n-1]\!]$ (cosinus strictement décroissant sur $[0,\pi]$). Donc les x_k sont tous distincts.

Conclusion : P_n est de degré $n-1$ et admet exactement $n-1$ racines distinctes dans $]-2,2[$. Ces racines sont nécessairement **toutes** les racines de P_n (qui admet au plus $\deg(P_n) = n-1$ racines).

7. Factoriser P_n dans $\mathbb{R}[X]$, pour tout entier $n \geq 2$.

P_n est un polynôme de degré $n-1$, de coefficient dominant 1, ayant exactement les racines simples $x_k = 2\cos(k\pi/n)$ pour $k \in [\![1, n-1]\!]$. Donc :

$$\boxed{P_n = \prod_{k=1}^{n-1}\left(X - 2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right).}$$

8. Établir à partir de ce qui précède que pour tout entier $n \geq 2$:

$$\frac{\sin(n\theta)}{\sin\theta} = 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\left(\cos\theta - \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right).$$

On évalue la factorisation de P_n (question 7) en $X = 2\cos\theta$:

$$P_n(2\cos\theta) = \prod_{k=1}^{n-1}\left(2\cos\theta - 2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right) = 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\left(\cos\theta - \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right).$$

D'après la question 4, $P_n(2\cos\theta) = \dfrac{\sin(n\theta)}{\sin\theta}$ pour tout $\theta \in]0, \pi[$. On conclut :

$$\boxed{\frac{\sin(n\theta)}{\sin\theta} = 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\left(\cos\theta - \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right).}$$

Exercice 4

Pour toute fonction $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ continue et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n(f) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

1. Quelle est la limite de la suite $\big(S_n(f)\big)$? (Aucune démonstration n'est attendue.)

La somme $S_n(f)$ est une somme de Riemann de f sur $[0,1]$ associée à la subdivision régulière de pas $\frac{1}{n}$. Puisque f est continue sur le segment $[0,1]$, on a :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n(f) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t}.$$

2. Considérons la suite (u_n) définie par $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+n}$ et la suite (v_n) définie par $v_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{2k+1}$.

   (a) Démontrer que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.

On réécrit u_n :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+k/n} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = S_n(f)$$

avec $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$, qui est continue sur $[0,1]$.
D'après la question 1 :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \big[\ln(1+t)\big]_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$$

La suite (u_n) converge et $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \ln 2}$.

(b) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n + \dfrac{1}{2}u_n = u_{2n}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculons $\dfrac{1}{2}u_n$:

$$\frac{1}{2}u_n = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2(k+n)} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2k+2n}.$$

En posant le changement d'indice $j = k+n$ (quand $k : 0 \to n-1$, $j : n \to 2n-1$) :

$$\frac{1}{2}u_n = \sum_{j=n}^{2n-1} \frac{1}{2j}.$$

Donc :

$$v_n + \frac{1}{2}u_n = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{2k+1} + \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{2k} = \sum_{k=n}^{2n-1} \left(\frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1}\right).$$

Or, $\dfrac{1}{2k}$ (pour $k : n \to 2n-1$) parcourt les entiers pairs de $2n$ à $4n-2$, et $\dfrac{1}{2k+1}$ parcourt les entiers impairs de $2n+1$ à $4n-1$. En réunissant, on obtient tous les entiers de $2n$ à $4n-1$:

$$\sum_{k=n}^{2n-1} \left(\frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1}\right) = \sum_{j=2n}^{4n-1} \frac{1}{j} = \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{1}{k+2n} = u_{2n}.$$

Donc $\boxed{v_n + \dfrac{1}{2}u_n = u_{2n}}$.

(c) Démontrer alors que la suite (v_n) converge vers $\dfrac{1}{2}\ln 2$.

D'après la question Q2.b, $v_n = u_{2n} - \dfrac{1}{2}u_n$.
La suite (u_n) converge vers $\ln 2$ (question Q2.a), donc la sous-suite (u_{2n}) converge également vers $\ln 2$. On obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty}\left(u_{2n} - \frac{1}{2}u_n\right) = \ln 2 - \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{\ln 2}{2}.$$

La suite (v_n) converge vers $\dfrac{\ln 2}{2}$.

3. Pour $\alpha > 1$, déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k^\alpha}$ et un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k^\alpha}$ en $+\infty$.

Limite :
La somme $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k^\alpha}$ comporte exactement $n+1$ termes (pour $k = n, n+1, \ldots, 2n$), tous inférieurs ou égaux à $\dfrac{1}{n^\alpha}$. Donc :

$$0 \leqslant \sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{n+1}{n^\alpha}.$$

Or, pour $\alpha > 1$, on a $\alpha - 1 > 0$, donc :

$$\frac{n+1}{n^\alpha} \sim \frac{n}{n^\alpha} = \frac{1}{n^{\alpha-1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Donc d'après le théorème des gendarmes : $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{n^\alpha} = 0}$

Équivalent :
On effectue le changement d'indice $k = n + j$, avec j allant de 0 à n :

$$\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k^\alpha} = \sum_{j=0}^{n}\frac{1}{(n+j)^\alpha} = \frac{1}{n^{\alpha-1}}\cdot\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{\left(1+\frac{j}{n}\right)^\alpha}$$

La somme $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{\left(1+\frac{j}{n}\right)^\alpha}$ est une somme de Riemann de $f(t) = \dfrac{1}{(1+t)^\alpha}$ sur $[0,1]$, donc :

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{\left(1+\frac{j}{n}\right)^\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{dt}{(1+t)^\alpha} = \left[\frac{(1+t)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_0^1 = \frac{2^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} = \frac{1-2^{1-\alpha}}{\alpha-1}$$

Ainsi :

$$\boxed{\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k^\alpha} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1-2^{1-\alpha}}{\alpha-1}\cdot\frac{1}{n^{\alpha-1}}}$$

Remarque : on aurait aussi pu déduire la limite de l'équivalent.

Exercice 5

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$I_n = \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{x/2}\,\mathrm{d}x.$$

Le but de cet exercice est de montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 2.

1. Calculer I_1.

On a

$$\begin{aligned} \text{On pose } u = 1 - x \quad &\Rightarrow \quad du = -\mathrm{d}x, \\ dv = e^{x/2}\,\mathrm{d}x \quad &\Rightarrow \quad v = 2e^{x/2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \Big[(1-x)\,2e^{x/2}\Big]_0^1 - \int_0^1 2e^{x/2}\,(-\mathrm{d}x) \\ &= \Big[2(1-x)e^{x/2}\Big]_0^1 + 2\int_0^1 e^{x/2}\,\mathrm{d}x \\ &= \Big(2(1-1)e^{1/2} - 2(1-0)e^0\Big) + 2\Big[2e^{x/2}\Big]_0^1 \\ &= (0-2) + 4\big(e^{1/2} - 1\big) \\ &= 4e^{1/2} - 6. \end{aligned}$$

$$\boxed{I_1 = 4e^{1/2} - 6 = 4\sqrt{e} - 6.}$$

2. Pour $x \in [0, n[$ fixé, donner un équivalent simple quand n tend vers l'infini de $\ln\big(1 - \frac{x}{n}\big)$.

Pour $n \to +\infty$, on a $\frac{x}{n} \to 0$ (avec x fixé) et

$$\ln(1-u) \sim -u \quad (u \to 0).$$

Donc

$$\boxed{\ln\Big(1 - \frac{x}{n}\Big) \sim -\frac{x}{n}}.$$

3. Ecrire sous forme exponentielle $\big(1 - \frac{x}{n}\big)^n$.

Pour $x \in [0, n[$,

$$\Big(1 - \frac{x}{n}\Big)^n = \exp\Big(n\ln\Big(1 - \frac{x}{n}\Big)\Big).$$

4. A l'aide d'une étude de fonction, montrer que pour tout $t \in [0, 1[$, $\ln(1-t) \leqslant -t$.

   En déduire que $I_n \leq 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Posons $\varphi(t) = \ln(1-t) + t$ sur $[0, 1[$. Alors φ est dérivable sur $[0, 1[$ et pour $t > 0$:

$$\varphi'(t) = -\frac{1}{1-t} + 1 = \frac{-t}{1-t} \leq 0,$$

donc φ est décroissante sur $[0,1[$ et $\varphi(0)=0$. Ainsi, pour tout $t\in[0,1[$,

$$\ln(1-t)+t=\varphi(t)\leq 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ln(1-t)\leq -t}.$$

Avec $t=\frac{x}{n}\in[0,1[$,

$$n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)\leq -x \quad \Rightarrow \quad \left(1-\frac{x}{n}\right)^n\leq e^{-x}.$$

Donc, pour $x\in[0,n]$,

$$\left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{x/2}\leq e^{-x}e^{x/2}=e^{-x/2}.$$

Ainsi

$$I_n\leq\int_0^n e^{-x/2}\,\mathrm{d}x=2\left(1-e^{-n/2}\right)\leq 2,$$

d'où $\boxed{I_n\leq 2}$.

5. Montrer de même que pour tout $t\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$, on a $-t-t^2\leqslant\ln(1-t)$.

Posons $\psi(t)=\ln(1-t)+t+t^2$ sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$. Alors ψ est dérivable sur $[0,1[$ et pour tout $t\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$:

$$\psi'(t)=-\frac{1}{1-t}+1+2t=-\frac{t}{1-t}+2t=t\left(2-\frac{1}{1-t}\right)=t\frac{1-2t}{1-t}\geq 0$$

sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$. Donc ψ est croissante sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ et $\psi(0)=0$, d'où $\psi(t)\geq 0$. Ainsi, pour tout $t\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$,

$$\boxed{-t-t^2\leq\ln(1-t)}.$$

6. En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $a\in\left[0,\frac{n}{2}\right]$,

$$\int_0^a\left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{x/2}\,\mathrm{d}x\geqslant 2e^{-a^2/n}\left(1-e^{-a/2}\right).$$

Soient $n\geq 1$ et $a\in\left[0,\frac{n}{2}\right]$. Pour $x\in[0,a]$, on a $t=\frac{x}{n}\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$. D'après la question précédente,

$$\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)\geq -\frac{x}{n}-\frac{x^2}{n^2}.$$

En multipliant par $n>0$,

$$n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)\geq -x-\frac{x^2}{n},$$

donc

$$\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\geq e^{-x}e^{-x^2/n}.$$

Ainsi

$$\left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{x/2}\geq e^{-x/2}e^{-x^2/n}.$$

Or, sur $[0, a]$, on a $x^2 \leq a^2$, donc $e^{-x^2/n} \geq e^{-a^2/n}$. Par conséquent

$$\int_0^a \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{x/2}\,\mathrm{d}x \geq e^{-a^2/n} \int_0^a e^{-x/2}\,\mathrm{d}x = e^{-a^2/n} \cdot 2\left(1 - e^{-a/2}\right),$$

soit

$$\boxed{\int_0^a \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{x/2}\,\mathrm{d}x \geq 2e^{-a^2/n}\left(1 - e^{-a/2}\right).}$$

7. En déduire que

$$I_n \geqslant 2e^{-a^2/n}\left(1 - e^{-a/2}\right),$$

puis déterminer une expression de a en fonction de n vérifiant que

— $a \leq \frac{n}{2}$

— $\frac{a^2}{n}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini,

— a tend vers l'infini quand n tend vers l'infini.

Comme $I_n = \displaystyle\int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{x/2}\,\mathrm{d}x$ et que la fonction que l'on intègre est positive, on a pour $a \leq \frac{n}{2}$:

$$I_n \geq \int_0^a \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{x/2}\,\mathrm{d}x.$$

En appliquant la question 6), on obtient bien

$$\boxed{I_n \geq 2e^{-a^2/n}\left(1 - e^{-a/2}\right)} \qquad \text{pour tout } a \in \left[0, \frac{n}{2}\right].$$

Un choix simple est $a = n^{1/3}$: alors $a \to +\infty$, $\dfrac{a^2}{n} = n^{-1/3} \to 0$, et pour n assez grand, $a = n^{1/3} \leq \dfrac{n}{2} \iff 8n \leq n^3$ (vrai à partir de $n \geq 1$).

8. Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 2.

D'après la question 4), pour tout n, $I_n \leq 2$. D'après la question 7), en prenant $a = n^{1/3}$, on a

$$I_n \geq 2e^{-n^{-1/3}}\left(1 - e^{-n^{1/3}/2}\right).$$

Or $e^{-n^{-1/3}} \to 1$ et $e^{-n^{1/3}/2} \to 0$, donc le membre de droite tend vers 2. Ainsi,

$$2 \geq I_n \geq 2e^{-n^{-1/3}}\left(1 - e^{-n^{1/3}/2}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 2.$$

Par encadrement (théorème des gendarmes),

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} I_n = 2}.$$