25

Développements limités

Table des matières

Lorsqu'on étudie une fonction au voisinage de 0, on dispose déjà, depuis le chapitre sur la dérivation, d'une approximation *affine* : si f est dérivable en 0, on peut écrire

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x.$$

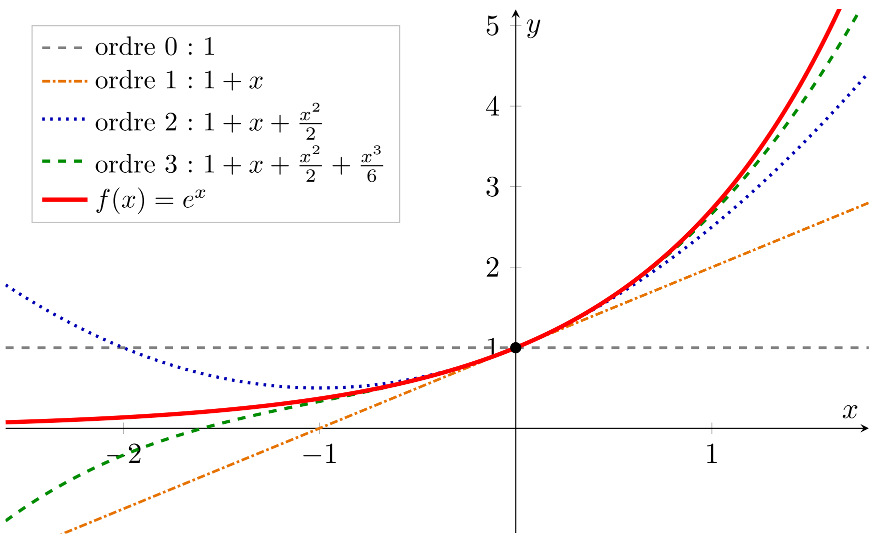
Cette tangente n'est que la première étape d'une suite d'approximations de plus en plus fines : par un polynôme de degré 2, puis 3, et ainsi de suite. C'est précisément l'objet du présent chapitre : remplacer une fonction « régulière » par une fonction polynomiale, avec un contrôle de l'erreur commise.

Cette idée trouve son application dans des calculs très divers : limites présentant des formes indéterminées, recherche d'équivalents, étude fine d'une courbe au voisinage d'un point, mise en évidence d'asymptotes.

Pour fixer les idées, illustrons cette progression sur la fonction $f : x \longmapsto e^x$. Ses approximations polynomiales successives au voisinage de 0 sont

$$\underbrace{1}_{\text{ordre } 0}, \qquad \underbrace{1+x}_{\text{ordre } 1}, \qquad \underbrace{1+x+\frac{x^2}{2}}_{\text{ordre } 2}, \qquad \underbrace{1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}}_{\text{ordre } 3}.$$

La figure ci-dessous montre comment chaque approximation « épouse » la courbe de f de plus en plus fidèlement au voisinage de 0 : l'ordre 0 ne retient que la valeur $f(0) = 1$, l'ordre 1 ajoute la tangente, et les ordres 2 et 3 recollent la courbure, élargissant à chaque fois la zone où l'approximation est visuellement confondue avec f.



Tout au long du chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide contenant 0, et f désigne une application de I dans $\mathbb{R}$. Conformément au programme, les développements limités sont définis *en* 0 ; l'étude au voisinage d'un point $a \neq 0$ ou de l'infini se ramènera systématiquement en 0 par un changement de variable, comme on le verra à la fin du chapitre.

25.1 Comparaison locale de fonctions

Avant d'entrer dans le vif du sujet, on prend le temps de mettre en place une notation qui sera omniprésente dans la suite : la notation de Landau « petit o ».

25.1.1 La notation « petit o »

Définition 1: Fonction négligeable devant x^n

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in \bar{I}$ et $n \in \mathbb{Z}$.
On dit que f est *négligeable devant la fonction $x \longmapsto x^n$ au voisinage de a*, et l'on note $f(x) \underset{a}{=} o(x^n)$, lorsque

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{x^n} = 0.$$

On dit aussi que f est un « petit o » de x^n au voisinage de a.

Exemple 1.

- $x^4 \underset{0}{=} o(x)$ et $x^3 \underset{0}{=} o(x)$. Plus généralement, si $n < m$, alors $x^m \underset{0}{=} o(x^n)$.
- $\sin(x) - x \underset{0}{=} o(x)$. En effet, $\dfrac{\sin(x) - x}{x} = \dfrac{\sin(x)}{x} - 1 \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$.
- $x^2 \underset{0}{=} o(x)$ mais attention, ce n'est plus vrai au voisinage de $+\infty$: c'est le contraire $x \underset{+\infty}{=} o(x^2)$.
- $\ln(x) \underset{+\infty}{=} o(x)$ car $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$.

Remarque 1.

- Plus généralement, si $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction non nulle au voisinage de $a \in \bar{I}$, on définit $f(x) \underset{a}{=} o(g(x))$ si $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.
- Cette notation s'emploie surtout pour $n \in \mathbb{N}$ au voisinage de 0 : $f(x) \underset{0}{=} o(x^n)$ exprime alors que f tend vers 0 *plus vite* que x^n.
- De même, on a au voisinage de $+\infty$: $f(x) \underset{+\infty}{=} o(x^n)$ signifie $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x^n} = 0$.
  Avec $n < 0$, cela traduit que f décroît vers 0 plus vite que la puissance x^n. Ce cadre servira pour les développements asymptotiques en fin de chapitre.
- Cas particulier remarquable : $f(x) \underset{0}{=} o(1)$ équivaut à $\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.
- Le symbole $o(x^n)$ ne désigne pas une fonction fixée mais une *classe* de fonctions négligeables devant x^n. Deux apparitions du même symbole dans une expression ne désignent donc pas la même fonction en général. Ainsi, $x^4 \underset{0}{=} o(x)$ et $x^3 \underset{0}{=} o(x)$ mais $x^4 \underset{0}{\neq} x^3$ (sauf en 0).

Proposition 1

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$. On a équivalence entre :

(i) $f(x) \underset{0}{=} o(x^n)$;

(ii) il existe une application $\varepsilon : I \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in I \setminus \{0\}$, $f(x) = x^n \varepsilon(x)$, avec $\displaystyle\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

Démonstration. $(i) \Rightarrow (ii)$: posons $\varepsilon(x) = \dfrac{f(x)}{x^n}$ pour $x \in I \setminus \{0\}$. Alors $f(x) = x^n \varepsilon(x)$ pour tout $x \in I \setminus \{0\}$, et $\varepsilon(x) \to 0$ par définition.

$(ii) \Rightarrow (i)$: si $f(x) = x^n \varepsilon(x)$ avec $\varepsilon \to 0$ en 0, alors $\dfrac{f(x)}{x^n} = \varepsilon(x) \to 0$, donc $f(x) \underset{0}{=} o(x^n)$. ■

25.1.2 Manipuler les « petits o »

Les règles suivantes seront utilisées en permanence dans les calculs de développements limités.

Proposition 2: Règles de calcul

Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$. On suppose $f(x) \underset{0}{=} o(x^n)$.

1. *(Transitivité)* Si $x^n \underset{0}{=} o(x^m)$, alors $f(x) \underset{0}{=} o(x^m)$.
2. *(Multiplication par x^p)* Pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $f(x) \cdot x^p \underset{0}{=} o(x^{n+p})$.
3. *(Combinaison linéaire)* Si de plus $g(x) \underset{0}{=} o(x^n)$, alors pour tous $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, on a $\lambda f(x) + \mu g(x) \underset{0}{=} o(x^n)$.
4. *(Produit)* Si de plus $g(x) \underset{0}{=} o(x^p)$ avec $p \in \mathbb{Z}$, alors $f(x)g(x) \underset{0}{=} o(x^{n+p})$.

Démonstration. Par hypothèse, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x^n} = 0$.

1. Si $x^n \underset{0}{=} o(x^m)$, alors $\dfrac{x^n}{x^m} \to 0$ en 0, donc
$$\frac{f(x)}{x^m} = \frac{f(x)}{x^n} \cdot \frac{x^n}{x^m} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0 \cdot 0 = 0,$$
d'où $f(x) \underset{0}{=} o(x^m)$.
2. Soit $p \in \mathbb{Z}$. On a $\dfrac{f(x) \cdot x^p}{x^{n+p}} = \dfrac{f(x)}{x^n} \to 0$ en 0.
3. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Puisque $\dfrac{g(x)}{x^n} \to 0$ également,
$$\frac{\lambda f(x) + \mu g(x)}{x^n} = \lambda \cdot \frac{f(x)}{x^n} + \mu \cdot \frac{g(x)}{x^n} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0.$$
4. Puisque $\dfrac{g(x)}{x^p} \to 0$,
$$\frac{f(x)g(x)}{x^{n+p}} = \frac{f(x)}{x^n} \cdot \frac{g(x)}{x^p} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0 \cdot 0 = 0.$$

■

Remarque 2. Une règle pratique en découle, particulièrement utile au voisinage de 0 : dans une expression mêlant plusieurs termes $o(x^{n_1}), o(x^{n_2}), \ldots$, on peut tous les remplacer par $o(x^N)$ où N est le plus petit des exposants. Concrètement, $o(x^2) + o(x^5) \underset{0}{=} o(x^2)$, puisque $x^5 \underset{0}{=} o(x^2)$.

25.1.3 Reformulation des équivalents

Le lecteur averti reconnaîtra que les équivalents peuvent s'exprimer naturellement avec la notation o.

Proposition 3: Équivalents et « petits o »

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}, K \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}$. On suppose que f ne s'annule pas au voisinage de 0 (sauf éventuellement en 0). On a équivalence entre :

(i) $f(x) \underset{0}{\sim} Kx^n$;

(ii) $f(x) - Kx^n \underset{0}{=} o(x^n)$.

Démonstration. On a la chaîne d'équivalences :

$$f(x) \underset{0}{\sim} Kx^n \iff \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{Kx^n} = 1 \iff \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - Kx^n}{Kx^n} = 0 \iff \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - Kx^n}{x^n} = 0,$$

ce qui équivaut à $f(x) - Kx^n \underset{0}{=} o(x^n)$. ■

25.2 Approximation polynomiale d'une fonction

25.2.1 Le concept de développement limité

Définition 2: Développement limité d'ordre n en 0

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.
On dit que f *admet un développement limité d'ordre n en* 0 (abrégé : $DL_n(0)$) lorsqu'il existe $(c_0, c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que

$$f(x) \underset{0}{=} c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + o(x^n).$$

Le polynôme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} c_k x^k$ est nommé *partie principale* du développement, et $o(x^n)$ en est le *reste*.

Remarque 3. Reformulation équivalente avec une fonction d'erreur explicite : f admet un $DL_n(0)$ si et seulement si il existe des réels $c_0, \dots, c_n$ et une fonction $\epsilon : I \longrightarrow \mathbb{R}$ tendant vers 0 en 0 tels que pour tout $x \in I$,

$$f(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n + x^n \epsilon(x).$$

Exemple 2. Soit $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$. Alors f admet un développement limité d'ordre n en 0 pour tout $n \in \mathbb{N}$, car

$$f(x) = 2 - 5x + 3x^2 + 0 \cdot x^3 + \cdots + 0 \cdot x^n + o(x^n)$$

puisque $o(x^n) = 0$ convient : tout polynôme est son propre développement limité.

25.2.2 DL d'ordre 0 et d'ordre 1 : continuité et dérivabilité

Ces deux cas particuliers méritent d'être isolés car ils établissent un pont fondamental entre l'existence d'un développement limité et les notions de continuité et de dérivabilité, que l'on connaît bien.

Proposition 4: DL d'ordre 0 et continuité

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f est continue en a ;

(ii) f admet un $DL_0(a)$, c'est-à-dire $f(x) \underset{a}{=} f(a) + o(1)$.

Démonstration. Par définition, f est continue en a si et seulement si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, autrement dit $\lim\limits_{x \to a}(f(x) - f(a)) = 0$, ce qui s'écrit précisément $f(x) - f(a) \underset{a}{=} o(1)$, soit $f(x) \underset{a}{=} f(a) + o(1)$. ∎

Proposition 5: DL d'ordre 1 et dérivabilité

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f est dérivable en a ;

(ii) f admet un $DL_1(a)$, c'est-à-dire $f(x) \underset{a}{=} f(a) + f'(a)\,(x-a) + o(x-a)$.

Dans ce cas, le coefficient de x dans la partie principale est exactement $f'(a)$, et la droite d'équation $y = f(a) + f'(a)(x-a)$ est la tangente à la courbe de f en a.

Démonstration. Par définition, f est dérivable en a si et seulement si le taux d'accroissement $\dfrac{f(x) - f(a)}{x-a}$ admet une limite finie ℓ (qui est en fait $f'(a)$) lorsque $x \to a$. Cela revient à dire que $\dfrac{f(x) - f(a) - \ell(x-a)}{x-a} \to 0$, autrement dit $f(x) - f(a) - \ell(x-a) \underset{a}{=} o(x-a)$, soit $f(x) \underset{a}{=} f(a) + \ell(x-a) + o(x-a)$. On identifie alors $\ell = f'(a)$. ∎

Remarque 4. Ces deux résultats constituent la *hiérarchie* fondamentale : tout $DL_1(a)$ implique un $DL_0(a)$ (par troncature), ce qui traduit qu'une fonction dérivable en a y est en particulier continue. La réciproque est bien entendu fausse : $x \mapsto |x|$ est continue en 0 mais n'y est pas dérivable.

Exemple 3.

- La fonction $f(x) = \sqrt[3]{x}$ est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0 (la tangente est verticale). Elle admet un $DL_0(0)$ de partie principale 0, mais n'admet pas de $DL_1(0)$.
- La fonction $f(x) = x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ est dérivable en 0 (avec $f'(0) = 0$), ce qu'exprime le $DL_1(0)$: $f(x) \underset{0}{=} 0 + o(x) = o(x)$.

25.2.3 Unicité du développement

L'intérêt fondamental de la notion réside dans le fait que la partie principale est entièrement caractérisée par la fonction.

Théorème 1: Unicité de la partie principale

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Si f admet un $DL_n(0)$, alors les coefficients $c_0, c_1, \dots, c_n$ de sa partie principale sont uniquement déterminés.

Démonstration. Supposons que f admette deux développements à l'ordre n en 0 :

$$f(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} c_k x^k + o(x^n) \quad \text{et} \quad f(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} d_k x^k + o(x^n).$$

En soustrayant et en posant $\gamma_k = c_k - d_k$ pour $k \in [\![0, n]\!]$, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n} \gamma_k x^k \underset{0}{=} o(x^n).$$

Raisonnons par l'absurde : supposons qu'il existe au moins un indice k tel que $\gamma_k \neq 0$, et notons j le plus petit tel indice (on a en fait $j = \min\{k \in [\![0, n]\!], c_k \neq d_k\}$). Alors $\gamma_0 = \gamma_1 = \cdots = \gamma_{j-1} = 0$ et

$$\gamma_j x^j + \gamma_{j+1} x^{j+1} + \cdots + \gamma_n x^n \underset{0}{=} o(x^n).$$

En divisant par x^j (pour $x \neq 0$),

$$\gamma_j + \gamma_{j+1} x + \cdots + \gamma_n x^{n-j} \underset{0}{=} o(x^{n-j}).$$

Le membre de gauche tend vers γ_j lorsque $x \to 0$, tandis que le membre de droite tend vers 0. On a donc $\gamma_j = 0$, ce qui contredit le choix de j.

Conclusion : tous les γ_k sont nuls, soit $c_k = d_k$ pour tout k. ■

Corollaire 1: Troncature

Si f admet un $DL_n(0)$, alors f admet aussi un $DL_p(0)$ pour tout $p \in [\![0, n]\!]$, obtenu en « coupant » le développement à l'ordre p.

Démonstration. Si $f(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} c_k x^k + o(x^n)$, on regroupe les termes de degré strictement supérieur à p avec le reste. Pour $p < n$, on a $x^k \underset{0}{=} o(x^p)$ pour tout $k \geqslant p+1$ (multiplication par x^{k-p}), donc

$$\sum_{k=p+1}^{n} c_k x^k \underset{0}{=} o(x^p) \quad \text{et} \quad o(x^n) \underset{0}{=} o(x^p),$$

d'où $f(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{p} c_k x^k + o(x^p)$. ■

25.2.4 Cas particulier des fonctions paires et impaires

Corollaire 2: Parité du développement limité

Soit f admettant un $DL_n(0)$ de partie principale $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} c_k x^k$, et définie sur un intervalle symétrique par rapport à 0.

- Si f est paire, alors $c_k = 0$ pour tout indice $k \in [\![0, n]\!]$ impair.
- Si f est impaire, alors $c_k = 0$ pour tout indice $k \in [\![0, n]\!]$ pair.

Démonstration. Supposons f paire et soit $x \in I$. On compare alors les développements de $f(x)$ et de $f(-x)$. D'une part,

$$f(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} c_k x^k + o(x^n).$$

D'autre part, en substituant $-x$ à x (ce qui ne change pas la nature du reste : $(-x)^n = \pm x^n$ donc $o((-x)^n) = o(x^n)$),

$$f(-x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} c_k(-1)^k x^k + o(x^n).$$

La parité de f ($f(x) = f(-x)$) et l'unicité du développement entraînent $c_k = (-1)^k c_k$ pour chaque k. Si k est impair, on en déduit $c_k = -c_k$, donc $c_k = 0$.

Le cas impair se traite de la même façon en utilisant $f(x) = -f(-x)$. ■

Remarque 5. On prendra garde au piège suivant : l'existence d'un $DL_n(0)$ pour $n \geqslant 2$ *n'entraîne pas* que f soit n fois dérivable en 0. Un contre-exemple classique : la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \begin{cases} x^4 \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

On vérifie que $|g(x)| \leqslant x^4$, donc $\dfrac{g(x)}{x^3} \to 0$ en 0, ce qui signifie $g(x) \underset{0}{=} o(x^3)$: ainsi g admet un $DL_3(0)$ trivial dont tous les coefficients sont nuls. Pourtant un calcul montre que g' n'est pas continue en 0, ce qui exclut la dérivabilité d'ordre 2.

25.3 Combiner les développements limités

Au-delà des cas immédiats (continuité, dérivabilité) vus précédemment, nous ne disposons pour l'instant d'aucun moyen *général* d'obtenir des développements limités. Pour amorcer la mécanique des combinaisons, commençons par établir directement deux développements géométriques qui serviront de briques de base avant l'arrivée du théorème de Taylor-Young à la section suivante.

25.3.1 Deux développements géométriques de référence

Lemme 1: DL de $\dfrac{1}{1-x}$ et de $\dfrac{1}{1+x}$ en 0

Pour tout entier $n \geqslant 0$, au voisinage de 0,

$$\frac{1}{1-x} \underset{0}{=} 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n),$$

$$\frac{1}{1+x} \underset{0}{=} 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n).$$

Démonstration. On part de l'identité algébrique $1 - x^{n+1} = (1-x)(1 + x + x^2 + \cdots + x^n)$, valable pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$. Pour $x \in]-1, 1[$ (donc $x \neq 1$), on peut diviser par $1 - x$:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + \frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

Or $\dfrac{x^{n+1}/(1-x)}{x^n} = \dfrac{x}{1-x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$, donc $\dfrac{x^{n+1}}{1-x} \underset{0}{=} o(x^n)$, ce qui établit le premier développement. Le second s'en déduit par la substitution $x \mapsto -x$. ■

Munis de ces deux briques, nous pouvons à présent énoncer les règles opératoires qui permettent, à partir de DL connus, d'en construire de nouveaux.

25.3.2 Addition et multiplication par un scalaire

Proposition 6: Linéarité

Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ admettant respectivement un $DL_n(0)$ et un $DL_m(0)$ de parties principales P et Q, avec $n \leqslant m$. Alors pour tous $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, la fonction $\lambda f + \mu g$ admet un $DL_n(0)$ de partie principale $\lambda P + \mu Q$ (en ne conservant dans $\lambda P + \mu Q$ que les termes de degré inférieur ou égal à n).

Démonstration. Écrivons les développements sous forme « fonction d'erreur » :

$$f(x) = P(x) + x^n \varphi(x), \qquad g(x) = Q(x) + x^m \psi(x),$$

avec $\varphi, \psi \to 0$ en 0. Comme $m \geqslant n$, on a $x^m \psi(x) \underset{0}{=} o(x^n)$, d'où $g(x) \underset{0}{=} Q(x) + o(x^n)$. La combinaison linéaire donne alors immédiatement $\lambda f + \mu g \underset{0}{=} \lambda P + \mu Q + o(x^n)$. ■

Exemple 4. La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{1+x}$ est paire, et son $DL_3(0)$ est par linéarité

$$\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \underset{0}{=} (1 + x + x^2 + x^3) + (1 - x + x^2 - x^3) + o(x^3) = 2 + 2x^2 + o(x^3).$$

Les coefficients impairs sont nuls, conformément à la parité, ce qui sert ici de petit test de cohérence. On reconnaît par ailleurs $\dfrac{2}{1-x^2}$.

25.3.3 Multiplication

Proposition 7: Produit

Soient f et g admettant un $DL_n(0)$ de parties principales respectives P et Q. Alors fg admet un $DL_n(0)$ dont la partie principale est obtenue en effectuant le produit PQ et en ne conservant que les termes de degré inférieur ou égal à n.

Démonstration. Écrivons $f = P + x^n \varphi$ et $g = Q + x^n \psi$ avec $\varphi, \psi \to 0$ en 0. Alors

$$fg = PQ + x^n (P\psi + Q\varphi + x^n \varphi\psi).$$

Le facteur $P\psi + Q\varphi + x^n\varphi\psi$ tend vers 0 en 0 (puisque P, Q ont une limite finie en 0 et $\varphi, \psi \to 0$), donc $x^n(P\psi + Q\varphi + x^n\varphi\psi) \underset{0}{=} o(x^n)$. D'autre part, le produit PQ est un polynôme : ses termes de degré $> n$ sont également en $o(x^n)$. En les regroupant dans le reste, on obtient un développement de la forme annoncée. ■

Exemple 5. Calculons un $DL_3(0)$ de $\dfrac{1+x^2}{1-x}$. On a $\dfrac{1}{1-x} \underset{0}{=} 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$, et l'on distribue par $1 + x^2$:
$\dfrac{1+x^2}{1-x} = (1+x^2)(1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^2 + x^3 + o(x^3)$.
Les termes de degré strictement supérieur à 3 étant négligeables devant x^3, la somme donne

$$\frac{1+x^2}{1-x} \underset{0}{=} 1 + x + 2x^2 + 2x^3 + o(x^3).$$

25.3.4 Composition (à droite)

C'est une opération très puissante : elle permet, à partir d'un seul DL usuel, d'en obtenir beaucoup d'autres.

Proposition 8: Composition des développements limités (à droite)

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ admettant chacun un $DL_n(0)$. Si la limite de f en 0 est nulle (de manière équivalente, si le terme constant du $DL_n(0)$ de f vaut 0), alors $g \circ f$ admet un $DL_n(0)$ obtenu en remplaçant la variable du développement de g par la partie principale du développement de f et en tronquant le résultat à l'ordre n.
Si

$$f(x) = a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n) \qquad (x \to 0),$$

et

$$g(y) = b_0 + b_1 y + \cdots + b_n y^n + o(y^n) \qquad (y \to 0).$$

Alors

$$g(f(x)) = b_0 + b_1(a_1 x + \cdots + a_n x^n) + \cdots + b_n(a_1 x + \cdots + a_n x^n)^n + o(x^n).$$

On tronque ensuite les termes de degré strictement supérieur à n.

Démonstration. Admise. ∎

Remarque 6. L'hypothèse « f tend vers 0 en 0 » est cruciale. Sans elle, $g(f(x))$ s'évalue non pas en 0 mais en $f(0) \neq 0$, ce qui rend la composition avec un DL de g *en zéro* caduque. Le bon réflexe quand $f(0) \neq 0$: écrire $f(x) = f(0) + \widetilde{f}(x)$ où $\widetilde{f}$ tend vers 0, puis composer avec un DL de g adapté.

Exemple 6.

- Construisons un $DL_4(0)$ de $\dfrac{1}{1+x^2}$. Posons $y = x^2$, qui tend vers 0 lorsque $x \to 0$. Par composition avec

$$\frac{1}{1+y} \underset{0}{=} 1 - y + y^2 + o(y^2),$$

et puisque l'ordre 4 en x correspond à l'ordre 2 en $y = x^2$,

$$\frac{1}{1+x^2} \underset{0}{=} 1 - x^2 + x^4 + o(x^4).$$

- Calculons un $DL_3(0)$ de $\dfrac{1}{1+x+x^2}$. Posons $u(x) = x + x^2$, qui tend vers 0. Alors $\dfrac{1}{1+u(x)} \underset{0}{=} 1 - u(x) + u(x)^2 - u(x)^3 + o(u(x)^3)$. Comme $u(x)$ se comporte en x au voisinage de 0, il faut calculer u^2 et u^3 à l'ordre 3 :
  - $u(x)^2 \underset{0}{=} (x + x^2)^2 = x^2 + 2x^3 + o(x^3)$,
  - $u(x)^3 \underset{0}{=} x^3 + o(x^3)$.

  Donc

$$\frac{1}{1+x+x^2} \underset{0}{=} 1 - (x + x^2) + (x^2 + 2x^3) - x^3 + o(x^3) = 1 - x + x^3 + o(x^3).$$

25.3.5 Primitivation

Proposition 9: Primitivation terme à terme

Soit $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable, telle que F' soit continue sur I et admette un $DL_n(0)$:

$$F'(x) \underset{0}{=} a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n).$$

Alors F admet un $DL_{n+1}(0)$ obtenu en intégrant terme à terme la partie principale :

$$F(x) \underset{0}{=} F(0) + a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + o(x^{n+1}).$$

Démonstration. Écrivons $F'(t) = A(t) + t^n \varphi(t)$, où A est le polynôme partie principale et $\varphi \to 0$ en 0. Pour $x \in I$, par continuité de F' et théorème fondamental de l'analyse,

$$F(x) - F(0) = \int_0^x F'(t)\,dt = \int_0^x A(t)\,dt + \int_0^x t^n \varphi(t)\,dt.$$

La première intégrale est exactement la primitive polynomiale annoncée. Il reste à montrer que la seconde est en $o(x^{n+1})$.

Soit $\delta > 0$. Comme $\varphi \to 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $t \in I$ avec $|t| \leqslant \eta, |\varphi(t)| \leqslant \delta$. Pour un tel x avec $|x| \leqslant \eta$,

$$\left| \int_0^x t^n \varphi(t)\,dt \right| \leqslant \left| \int_0^x |t|^n \cdot |\varphi(t)|\,dt \right| \leqslant \delta \left| \int_0^x |t|^n\,dt \right| = \delta \cdot \frac{|x|^{n+1}}{n+1} \leqslant \delta \cdot |x|^{n+1}.$$

Le quotient $\dfrac{\int_0^x t^n \varphi(t) dt}{x^{n+1}}$ est donc majoré en valeur absolue par δ pour $|x| \leqslant \eta$, ce qui établit la convergence vers 0. ∎

Remarque 7. Attention : la dérivation *ne se transporte pas* aux développements limités : on peut avoir un DL à un certain ordre pour f sans que f' admette de DL à l'ordre inférieur.

Exemple 7. Développement de $\arctan$. La fonction arctangente vérifie $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$, et $\arctan(0) = 0$. On a vu plus haut, par composition,

$$\frac{1}{1+x^2} \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + o(x^{2n}) = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n}).$$

La primitivation donne alors directement

$$\arctan(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1}) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}).$$

On notera la beauté de la chose : sans dériver la moindre fois la fonction arctan, uniquement par composition puis primitivation, on a accès à son développement à tout ordre.

25.4 La machine à fabriquer des développements limités : formule de Taylor-Young

Les règles opératoires précédentes permettent déjà beaucoup, à condition de disposer d'un « stock » de développements de référence. Le théorème de Taylor-Young va précisément alimenter ce stock : il fournit *automatiquement* un développement limité dès qu'on dispose d'une fonction suffisamment régulière.

25.4.1 L'énoncé fondamental

Théorème 2: Taylor-Young

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur I. Alors f admet un $DL_n(0)$ donné par

$$f(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n).$$

Démonstration. On procède par récurrence sur n, en s'appuyant sur la proposition de primitivation établie à la section précédente.

Initialisation $n = 0$. Si f est de classe $\mathcal{C}^0$, donc continue, on a $f(x) \underset{0}{=} f(0) + o(1)$, qui est bien le développement annoncé.

Hérédité. Supposons le résultat acquis pour un certain $n \in \mathbb{N}$, et donnons-nous f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I. La fonction dérivée f' est alors de classe $\mathcal{C}^n$, et l'hypothèse de récurrence lui fournit le développement

$$f'(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(f')^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(0)}{k!} x^k + o(x^n).$$

Comme f' est continue, la proposition de primitivation s'applique et fournit, par intégration terme à terme,

$$f(x) \underset{0}{=} f(0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(0)}{(k+1)!} x^{k+1} + o(x^{n+1}).$$

En réindexant la somme par $\ell = k + 1$,

$$f(x) \underset{0}{=} f(0) + \sum_{\ell=1}^{n+1} \frac{f^{(\ell)}(0)}{\ell!} x^\ell + o(x^{n+1}) = \sum_{\ell=0}^{n+1} \frac{f^{(\ell)}(0)}{\ell!} x^\ell + o(x^{n+1}).$$

■

Remarque 8.

- Toute fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0 admet donc un $DL_n(0)$ *à tout ordre.*
- Conformément au programme, la formule de Taylor-Young pourra être admise.
- Cette formule se généralise en tout point $a \in I$: $f(x) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n)$.
- Attention à la réciproque : la formule Taylor-Young donne une condition *suffisante* d'existence d'un développement limité, mais non nécessaire.

25.4.2 Le catalogue des développements limités de référence

L'application directe de Taylor-Young aux fonctions usuelles, complétée par les deux développements géométriques du lemme préliminaire, fournit la liste suivante, qu'il faut savoir restituer *de mémoire et sans hésitation.*

Théorème 3: Développements limités usuels en 0

Pour tout entier $n \geqslant 0$, on a les développements suivants au voisinage de 0 :

1. $e^x \underset{0}{=} 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + o(x^n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n).$
2. $\cos(x) \underset{0}{=} 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}).$
3. $\sin(x) \underset{0}{=} x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}).$
4. $\dfrac{1}{1-x} \underset{0}{=} 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n).$
5. $\dfrac{1}{1+x} \underset{0}{=} 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n).$
6. Pour $n \geqslant 1$, $\ln(1+x) \underset{0}{=} x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + o(x^n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n).$
7. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,
$$(1+x)^\alpha \underset{0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n).$$

Démonstration. Les développements 4 et 5 ont été établis par calcul algébrique direct dans le lemme préliminaire de la section précédente. Les autres résultent de Taylor-Young, en remarquant que chacune des fonctions est $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle ouvert contenant 0.

1. L'exponentielle vérifie $\exp^{(k)} = \exp$, donc $\exp^{(k)}(0) = 1$ pour tout k, d'où le résultat.
2. Le cosinus a pour dérivée k-ième la fonction $x \longmapsto \cos\left(x + \dfrac{k\pi}{2}\right)$. En 0, cela donne $\cos\left(\dfrac{k\pi}{2}\right)$, qui vaut 0 pour k impair et $(-1)^{k/2}$ pour k pair. Les coefficients d'indices impairs sont donc nuls, en conformité avec la parité du cosinus. En appliquant Taylor-Young à l'ordre $2n+1$, le terme d'ordre $2n+1$ est nul (car $2n+1$ est impair), ce qui justifie le reste en $o(x^{2n+1})$.
3. Symétriquement pour le sinus, qui est impair : seules les puissances impaires interviennent. Le reste en $o(x^{2n+2})$ s'obtient en appliquant Taylor-Young à l'ordre $2n+2$ et en constatant que le terme d'ordre $2n+2$ (pair) est nul.
6. La fonction $x \longmapsto \ln(1+x)$ est dérivable sur $]-1, +\infty[$ de dérivée continue $\dfrac{1}{1+x}$, dont le $DL_n(0)$ est connu. La proposition de primitivation appliquée à $f(x) = \ln(1+x)$ (avec $f(0) = 0$) donne directement, en intégrant terme à terme,
$$\ln(1+x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + o(x^{n+1}) = \sum_{\ell=1}^{n+1} (-1)^{\ell-1} \frac{x^\ell}{\ell} + o(x^{n+1}),$$
ce qui est bien la formule annoncée (à l'ordre $n+1$, donc valable à tout ordre $n \geqslant 1$).
7. Posons $f(x) = (1+x)^\alpha$, dérivable indéfiniment sur $]-1, +\infty[$. Une récurrence immédiate donne $f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$, d'où $f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)$.

■

Remarque 9. On extrait du dernier développement quelques cas particuliers utiles :

$$\sqrt{1+x} \underset{0}{=} 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3), \qquad \frac{1}{\sqrt{1+x}} \underset{0}{=} 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{5x^3}{16} + o(x^3).$$

Remarque 10. Conformément au programme, on évitera, sur les exemples numériques, tout développement limité au-delà de l'ordre 3. Les développements à l'ordre n ci-dessus sont donnés pour la culture et pour la mémorisation des coefficients, mais les calculs concrets resteront d'ordre modeste.

Le catalogue ci-dessus, joint aux règles de combinaison de la section précédente, donne accès à une vaste classe de développements. Donnons-en trois illustrations classiques, devenues désormais accessibles grâce aux nouveaux DL usuels.

Exemple 8. Produit de Taylor-Young : $DL_3(0)$ de $e^x \sin x$. On dispose maintenant des deux développements

$$e^x \underset{0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3), \qquad \sin x \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

On distribue les deux polynômes et l'on ne garde que les puissances inférieures à 3 puis on somme et on obtient :

$$e^x \sin x \underset{0}{=} x + x^2 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3) = x + x^2 + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

Exemple 9. Composition : $DL_4(0)$ de $\ln(\cos x)$. On part de

$$\cos(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4).$$

Posons $u(x) = \cos(x) - 1 = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$, qui tend vers 0 en 0. On compose avec $\ln(1+u) \underset{0}{=} u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$. Comme $u(x)$ se comporte en x^2 au voisinage de 0, on a $u(x)^3 \underset{0}{=} o(x^4)$: inutile de calculer plus loin que u^2. On a

$$u(x)^2 \underset{0}{=} \left(-\frac{x^2}{2}\right)^2 + o(x^4) = \frac{x^4}{4} + o(x^4).$$

Par conséquent,

$$\ln(\cos x) \underset{0}{=} -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^4}{4} + o(x^4) = -\frac{x^2}{2} + \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{8}\right) x^4 + o(x^4).$$

Le calcul donne $\frac{1}{24} - \frac{1}{8} = -\frac{1}{12}$, d'où

$$\ln(\cos x) \underset{0}{=} -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4).$$

Exemple 10. Quotient : $DL_3(0)$ de $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. On a $\sin x \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ et $\cos x \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$. Posons $u(x) = -\frac{x^2}{2} + o(x^3)$, qui tend vers 0. Alors $\frac{1}{\cos x} \underset{0}{=} \frac{1}{1+u(x)} \underset{0}{=} 1 - u(x) + o(x^3) = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$. Par produit,

$$\tan x \underset{0}{=} \left(x - \frac{x^3}{6}\right)\left(1 + \frac{x^2}{2}\right) + o(x^3) = x + \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

Exemple 11. Combinaison linéaire : $DL_3(0)$ de sh x. Les fonctions hyperboliques, hors programme mais utiles, s'obtiennent par combinaison linéaire d'exponentielles. En remplaçant x par $-x$ dans le DL de exp,

$$e^{-x} \underset{0}{=} 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3),$$

et après soustraction puis division par 2, tous les termes d'indices pairs disparaissent :

$$\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \underset{0}{=} x + \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

On retrouve bien le fait que sh est impaire.

25.5 Se ramener en zéro : point quelconque et infini

Conformément au programme, les développements limités sont définis en 0. Lorsqu'on souhaite étudier une fonction au voisinage d'un point $a \neq 0$ ou de l'infini, on se ramène *toujours* en 0 par un changement de variable.

25.5.1 Au voisinage d'un point $a \in \mathbb{R}$

Méthode 1: Étude au voisinage d'un point $a \neq 0$

Pour étudier f au voisinage de a, poser $t = x - a$ (de sorte que $x = a + t$ et $t \to 0$ lorsque $x \to a$), puis chercher un $DL_n(0)$ de la fonction auxiliaire $\widetilde{f} : t \longmapsto f(a+t)$.
Si l'on obtient $\widetilde{f}(t) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} c_k t^k + o(t^n)$, on dispose alors d'une approximation polynomiale de f au voisinage de a, en revenant à la variable x par $t = x - a$.

Exemple 12. Étudions la fonction cosinus au voisinage de $\frac{\pi}{4}$. Posons $t = x - \frac{\pi}{4}$.

La formule d'addition donne

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + t\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos t - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin t = \frac{\sqrt{2}}{2}\big(\cos t - \sin t\big).$$

Or

$$\cos t \underset{0}{=} 1 + o(t), \qquad \sin t \underset{0}{=} t + o(t).$$

Ainsi,

$$\cos t - \sin t \underset{0}{=} 1 - t + o(t).$$

Par conséquent,

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + t\right) \underset{0}{=} \frac{\sqrt{2}}{2}\big(1 - t + o(t)\big) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} t + o(t).$$

En revenant à la variable x, on obtient

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + o\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

La tangente à la courbe de cos au point d'abscisse $\frac{\pi}{4}$ a donc pour pente $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

25.5.2 Au voisinage de l'infini : développements asymptotiques

L'étude en $\pm\infty$ utilise le même principe, avec le changement de variable $u = \dfrac{1}{x}$.

Définition 3: Développement limité en $+\infty$

Soit $f : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, où $a \in \mathbb{R}$.
On dit que f admet un *développement limité en* $+\infty$ s'il existe deux entiers $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ et des réels $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $(b_1, \dots, b_p) \in \mathbb{R}^p$ tels que, au voisinage de $+\infty$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \sum_{k=1}^{p} b_k \frac{1}{x^k} + o\left(\frac{1}{x^p}\right) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 + \frac{b_1}{x} + \cdots + \frac{b_p}{x^p} + o\left(\frac{1}{x^p}\right).$$

Remarque 11.
- On définit de même un développement limité en $-\infty$ en posant $u = -1/x \to 0^-$.
- En pratique, un tel développement sert surtout à *deux* choses : identifier d'éventuelles asymptotes (droites ou courbes), et préciser la position de la courbe par rapport à ces asymptotes.
- La définition ci-dessus est assez générale : en pratique, on rencontre surtout des cas où $n \leqslant 1$ (asymptote oblique ou horizontale) et $p = 1$ (premier terme correcteur en $1/x$).

Méthode 2: Développement asymptotique en $+\infty$ par changement de variable

1. Poser $u = \dfrac{1}{x}$, qui tend vers 0^+ lorsque $x \to +\infty$.
2. Exprimer $f(x) = g(u)$ en termes de u, en factorisant judicieusement si nécessaire (par exemple x^2 sous une racine).
3. Calculer un DL de g en 0 par les techniques habituelles.
4. Revenir à la variable x en substituant $u = 1/x$.

On obtient typiquement $f(x) \underset{+\infty}{=} \alpha x + \beta + \dfrac{\gamma}{x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$, qui renseigne sur les asymptotes.

Exemple 13. Développement asymptotique de $f(x) = \dfrac{2x^2 + 3x - 1}{x + 1}$ en $+\infty$.

On effectue la division euclidienne : $2x^2 + 3x - 1 = (x + 1)(2x + 1) + (-2)$, donc

$$f(x) = 2x + 1 - \frac{2}{x + 1}.$$

Pour x grand, on factorise $\dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{1 + 1/x} \underset{+\infty}{=} \dfrac{1}{x}\left(1 - \dfrac{1}{x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)\right) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} + o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.
Donc

$$f(x) \underset{+\infty}{=} 2x + 1 - \frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

La droite $y = 2x + 1$ est asymptote oblique en $+\infty$. Comme le terme en $1/x$ vaut $-2/x < 0$, la courbe est *en dessous* de cette asymptote pour x grand.

Exemple 14. Développement asymptotique de $f(x) = \sqrt{x^2+x+1}$ en $+\infty$.
On factorise sous la racine par x^2 (avec $x > 0$) :

$$f(x) = x\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}.$$

Posons $u = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x}\left(1 + \frac{1}{x}\right)$, qui tend vers 0 en $+\infty$. On compose avec $\sqrt{1+u} \underset{0}{=} 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + o(u^2)$. On a $u^2 = \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$, d'où

$$\sqrt{1+u} \underset{+\infty}{=} 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) = 1 + \frac{1}{2x} + \frac{3}{8x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

On multiplie par x :

$$f(x) \underset{+\infty}{=} x + \frac{1}{2} + \frac{3}{8x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

La droite $y = x + \frac{1}{2}$ est asymptote oblique en $+\infty$, et la courbe est au-dessus (coefficient $\frac{3}{8} > 0$).

Exemple 15. Asymptote horizontale : $f(x) = \arctan(x)$ en $+\infty$.
On sait que $\arctan(x) \to \frac{\pi}{2}$ lorsque $x \to +\infty$. En posant $u = \frac{1}{x} \to 0^+$, et en utilisant la relation $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$ pour $x > 0$, on obtient

$$\arctan(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \underset{+\infty}{=} \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

La droite $y = \frac{\pi}{2}$ est asymptote horizontale en $+\infty$, et la courbe est en dessous (terme dominant en $-1/x < 0$).

Remarque 12. Asymptote parabolique. Si le DL en $+\infty$ commence par $ax^2 + bx + c + \ldots$, la courbe admet une *branche parabolique* de direction l'axe des ordonnées, et non une asymptote droite. Ce cas, moins fréquent au niveau BCPST, est identifié par le fait que $a \neq 0$.

25.6 Trois applications fondamentales

On présente maintenant les utilisations classiques des développements limités : extraction d'équivalents et de limites, comportement local d'une courbe, comportement à l'infini.

25.6.1 Lever une indétermination : calcul de limites ou d'équivalents

Proposition 10: Équivalent du terme dominant

Soit f admettant un $DL_n(0)$ et soit $p \in [\![0, n]\!]$ le plus petit indice tel que $c_p \neq 0$ (autrement dit, c_p est le premier coefficient non nul de la partie principale). Alors

$$f(x) \underset{0}{\sim} c_p\, x^p.$$

Démonstration. Par hypothèse, $f(x) \underset{0}{=} c_p x^p + \sum_{k=p+1}^{n} c_k x^k + o(x^n)$. En divisant par $c_p x^p$ et en passant à la limite,

$$\frac{f(x)}{c_p x^p} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 1,$$

ce qui équivaut à l'équivalence annoncée. ■

Méthode 3: Limite d'une forme indéterminée $\frac{0}{0}$ en 0

Pour calculer $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$, où f et g tendent vers 0 en 0 :

1. Identifier l'ordre p d'annulation prévu pour g (i.e. $g(x) \underset{0}{\sim} c\,x^p$).
2. Effectuer un $DL_p(0)$ du numérateur f.
3. Si le numérateur s'écrit $f(x) \underset{0}{=} c'x^q + o(x^p)$, comparer p et q. Trois cas : $q > p$, la limite est nulle ; $q = p$, la limite vaut c'/c ; $q < p$, la limite est infinie et l'on regarde le signe.

Exemple 16. Calculons $L = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{\sin^2 x}$. Le dénominateur s'annule à l'ordre 2 en 0, avec $\sin^2 x \underset{0}{\sim} x^2$. Il nous suffit donc d'un $DL_2(0)$ du numérateur. On a vu que $\ln(\cos x) \underset{0}{=} -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$, donc $\ln(\cos x) \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$. Par quotient, $\frac{\ln(\cos x)}{\sin^2 x} \underset{0}{\sim} \frac{-x^2/2}{x^2} = -\frac{1}{2}$, et $L = -\frac{1}{2}$.

Exemple 17. Reprenons un classique qui réclame de pousser le développement plus loin :

$$M = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right).$$

Mis sous le même dénominateur, le quotient s'écrit $\frac{x - \sin x}{x \sin x}$. Le dénominateur étant équivalent à x^2 en 0, il faut un DL d'ordre 3 du numérateur. On a $\sin x \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$, d'où $x - \sin x \underset{0}{=} \frac{x^3}{6} + o(x^3)$. Donc

$$\frac{x - \sin x}{x \sin x} \underset{0}{\sim} \frac{x^3/6}{x^2} = \frac{x}{6},$$

qui tend vers 0. Donc $M = 0$.

25.6.2 Étude du comportement local d'une courbe

Le terme suivant la tangente dans le développement renseigne sur la position de la courbe par rapport à sa tangente.

Proposition 11: Position relative par rapport à la tangente en 0

Soit f admettant un DL en 0 de la forme

$$f(x) \underset{0}{=} f(0) + f'(0)x + c_p\,x^p + o(x^p),$$

où $p \geqslant 2$ et c_p est le premier coefficient non nul d'indice $\geqslant 2$. Notons T la tangente d'équation $y = f(0) + f'(0)x$. Alors :

- Si p est *pair* : la courbe est entièrement d'un seul côté de T au voisinage de 0 — au-dessus si $c_p > 0$, en-dessous si $c_p < 0$.
- Si p est *impair* : la courbe traverse T au point $(0, f(0))$.

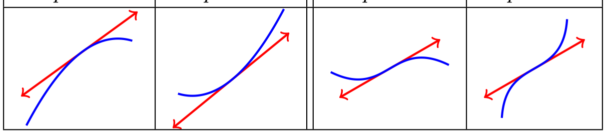
Démonstration. La différence ordonnée-tangente vaut $f(x) - (f(0) + f'(0)x) \underset{0}{\sim} c_p x^p$, d'après la proposition précédente. Son signe au voisinage de 0 (sauf en 0) est donc celui de $c_p x^p$.

- Si p est pair, $x^p > 0$ pour $x \neq 0$, donc le signe est celui de c_p.
- Si p est impair, x^p change de signe en 0, et la courbe traverse T.

■

Remarque 13. Les schémas suivants illustrent le résultat précédent :

Si p est pair		**Si p est impair**	
$a_p < 0$	$c_p > 0$	$c_p < 0$	$c_p > 0$



Ces schémas ne sont pas à apprendre par cœur ; il suffit de comprendre et de retenir le raisonnement suivant pour les retrouver sans effort.

La différence entre la fonction et sa tangente est équivalente à $c_p x^p$.

- Si p est **pair**, alors $x^p \geq 0$ au voisinage de 0, et $f(x) - T(x)$ est donc du signe de c_p localement.
  - Si $c_p < 0$, alors $f(x) - T(x) \leq 0$ au voisinage de 0 : la courbe est *en dessous* de sa tangente.
  - Si $c_p > 0$, alors $f(x) - T(x) \geq 0$ au voisinage de 0 : la courbe est *au dessus* de sa tangente.

  Dans les deux cas, la courbe ne traverse pas sa tangente : 0 est un **extremum local**.
- Si p est **impair**, alors x^p est du même signe que x : négatif pour $x < 0$, positif pour $x > 0$.
  - Si $c_p < 0$: pour $x < 0$, on a $c_p x^p > 0$ (produit de deux termes négatifs), donc $f(x) - T(x) > 0$ et la courbe est *au dessus* de la tangente ; pour $x > 0$, l'écart change de signe et la courbe passe *en dessous*.
  - Si $c_p > 0$: pour $x < 0$, on a $c_p x^p < 0$, donc la courbe est *en dessous* de la tangente ; pour $x > 0$, elle passe *au dessus*.

  Dans les deux cas, la courbe traverse sa tangente en 0 (on parle alors de point d'inflexion).

Remarque 14. Pour étudier la position de la courbe par rapport à sa tangente en un point $a \neq 0$, on se ramène en 0 par le changement de variable $t = x - a$, exactement comme expliqué à la section précédente.

Exemple 18. La courbe de arctan au voisinage de 0. On a $\arctan(x) \underset{0}{=} x - \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$. La tangente en 0 est la droite $y = x$, et le terme suivant est $-\dfrac{x^3}{3}$. L'indice $p = 3$ étant impair, 0 est un point d'inflexion de la courbe de arctan . De plus, pour $x > 0$ proche de 0, $-\dfrac{x^3}{3} < 0$, donc la courbe passe sous la tangente ; pour $x < 0$ proche de 0, elle passe au-dessus.

Exemple 19. La courbe de $f : x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ au voisinage de 0. On a $f(x) \underset{0}{=} 1 - x^2 + o(x^2)$. La tangente en 0 est $y = 1$ (car $f'(0) = 0$), et le terme suivant est $-x^2$. Comme $p = 2$ est pair et le coefficient négatif, la courbe est strictement en-dessous de la tangente au voisinage de 0, et 0 est un *maximum local* strict.

25.6.3 Asymptotes obliques à l'infini

Méthode 4: Détection d'une asymptote oblique en $+\infty$

Calculer un développement asymptotique de la forme

$$f(x) \underset{+\infty}{=} \alpha x + \beta + \frac{\gamma}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Alors :

- La droite $\Delta : y = \alpha x + \beta$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.
- Si $\gamma > 0$, la courbe est au-dessus de Δ au voisinage de $+\infty$.
- Si $\gamma < 0$, la courbe est en-dessous.
- Si $\gamma = 0$, il faut pousser le développement à l'ordre suivant pour conclure.

Exemple 20. Étudions la courbe de $f(x) = x\,e^{1/x}$ en $+\infty$. On pose $u = \dfrac{1}{x} \to 0^+$,

$$f(x) = x \cdot e^u = x\left(1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + o(u^3)\right) = x + 1 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{6x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

La droite $y = x + 1$ est asymptote oblique en $+\infty$, et la courbe est au-dessus (terme $\dfrac{1}{2x} > 0$).

25.7 Synthèse méthodologique

Méthode 5: Stratégie générale pour un calcul de DL en 0

1. **Identifier** les briques élémentaires apparaissant dans l'expression (exponentielle, cosinus, logarithme, racines, etc.) et leurs DL usuels.
2. **Choisir l'ordre** de calcul de chaque brique en fonction de l'ordre demandé pour le résultat : tenir compte du fait que la composition par une fonction tendant vers 0 d'ordre p augmente d'autant l'ordre minimal nécessaire.
3. **Combiner** les briques en utilisant somme, produit, composition, quotient, primitivation.
4. **Tronquer** systématiquement à l'ordre demandé : tout terme de degré strictement supérieur est absorbé dans le reste $o(x^n)$.

Exemple 21. Exemple traité en détail : calcul d'un $DL_3(0)$ de $(1 + x)^{1/x}$.

La fonction n'est pas définie en 0, mais le calcul de son développement permettra de déterminer son prolongement par continuité et la régularité de ce prolongement.

L'idée est de passer par l'exponentielle : $(1 + x)^{1/x} = \exp\left(\dfrac{\ln(1 + x)}{x}\right)$. Posons $\Phi(x) = \dfrac{\ln(1 + x)}{x}$ pour $x \neq 0$.

Étape 1 — DL de Φ. On a, à l'ordre 4 :

$$\ln(1 + x) \underset{0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4).$$

En divisant par x :

$$\Phi(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3).$$

On a obtenu un DL_3 de Φ. En particulier $\Phi(x) \to 1$ en 0.

Étape 2 — Préparation pour la composition par exp. L'exponentielle composée se manie en 0, pas en 1. On écrit

$$\Phi(x) = 1 + \Psi(x), \qquad \Psi(x) \underset{0}{=} -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3),$$

de sorte que

$$(1+x)^{1/x} = e \cdot e^{\Psi(x)}.$$

Étape 3 — Composition. On a $\Psi(x) \to 0$, donc on peut composer avec

$$e^y \underset{0}{=} 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + o(y^3).$$

Puisque $\Psi(x)$ se comporte comme un multiple de x au voisinage de 0, on a $\Psi(x)^k$ d'ordre x^k, et l'on calcule donc Ψ^2 et Ψ^3 à l'ordre 3 :

- $\Psi(x)^2 \underset{0}{=} \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3}\right)^2 + o(x^3) = \frac{x^2}{4} - 2 \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x^2}{3} + o(x^3) = \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$,
- $\Psi(x)^3 \underset{0}{=} \left(-\frac{x}{2}\right)^3 + o(x^3) = -\frac{x^3}{8} + o(x^3)$.

On reporte :

$$e^{\Psi(x)} \underset{0}{=} 1 + \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{3}\right) + \frac{1}{6}\left(-\frac{x^3}{8}\right) + o(x^3).$$

On regroupe par degré :

- Constante : 1.
- En x : $-\frac{1}{2}$.
- En x^2 : $\frac{1}{3} + \frac{1}{8} = \frac{11}{24}$.
- En x^3 : $-\frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{48} = -\frac{12+8+1}{48} = -\frac{21}{48} = -\frac{7}{16}$.

D'où

$$e^{\Psi(x)} \underset{0}{=} 1 - \frac{x}{2} + \frac{11x^2}{24} - \frac{7x^3}{16} + o(x^3),$$

puis

$$(1+x)^{1/x} \underset{0}{=} e\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{11x^2}{24} - \frac{7x^3}{16}\right) + o(x^3).$$

On en déduit immédiatement :

- La fonction $x \longmapsto (1+x)^{1/x}$ se prolonge par continuité en 0 par la valeur e.
- Ce prolongement est dérivable en 0, de dérivée $-\frac{e}{2}$.