BCPST1
A. WASSFI

Programme de colles 29 **Semaine du 08/06**

Questions de cours

Développements limités

Conformément au programme, tous les développements limités ont été définis en 0.

1. Propriétés des « petits o ».
2. Unicité d'un développement limité en 0.
3. Parité d'un développement limité en 0.
4. Condition nécessaire et suffisante d'un développement limité d'ordre 0 en 0.
5. Condition nécessaire et suffisante d'un développement limité d'ordre 1 en 0.

Applications linéaires

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies. Soit $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{C}$ une base de F. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Soit $x \in E$.

6. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives n et p.
   L'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \\ f & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \end{array}$ est un isomorphisme.
   En particulier, $\dim(\mathcal{L}(E,F)) = \dim(\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})) = p \times n = \dim(E) \times \dim(F)$.
7. Matrice d'un isomorphisme : f est un isomorphisme si et seulement si la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ est inversible et dans ce cas, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f^{-1}) = (\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f))^{-1}$.
8. Théorème du rang.
9. Il existe une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E,F)$ surjective si et seulement si $\dim(E) \geqslant \dim(F)$.
10. Invariance du rang d'une application linéaire par composition par un isomorphisme.
    On suppose qu'il existe un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie G et $g \in \mathcal{L}(F,G)$ tels que g soit un isomorphisme. Alors $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}(f)$.

Exercices

Applications linéaires

Définition d'une application linéaire. Opérations sur les applications linéaires. Endomorphisme, isomorphisme, automorphisme. Noyau et image d'une application linéaire. Caractérisation d'une application linéaire par l'image d'une base. Matrice d'une application linéaire. Application linéaire canoniquement associée à une matrice. Formule de changement de base pour un vecteur. Matrice d'une combinaison linéaire d'applications linéaires. Matrice d'une composée d'applications linéaires. Matrice d'un isomorphisme. Rang d'une application linéaire. Théorème du rang. Lien avec f injective, f surjective, f bijective. Lien entre rang d'une matrice, d'une application linéaire, d'une famille de vecteurs.