

**Corrigé de la liste d'exercices n°25**

**Développements limités**

**Exercice 1.**

1.  $e^x + \cos(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) = 2 + x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ .
2.  $\ln(1+x) + \sin(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) = 2x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ .
3.  $\cos(x)\sin(x) = (1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3))(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)) = x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^3}{2} + o(x^3) = x - \frac{2x^3}{3} + o(x^3)$ .
4. Le développement limité à l'ordre 2 en 0 de  $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$  est  $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + o(x^2)$ .

Par primitivation, on obtient le développement limité à l'ordre 3 en 0 de arctan :

$$\arctan(x) = \arctan(0) + x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

5.  $\ln(\cos(x)) = \ln(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$ .

6.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-x}} &= (1-x)^{-\frac{1}{2}} \\ &= 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)(-x) + \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)}{2}(-x)^2 + \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)}{6}(-x)^3 + o(x^3) \\ &= 1 + \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} + \frac{5x^3}{16} + o(x^3). \end{aligned}$$

7.  $\frac{\cos^2(x)}{3+x^2} = \frac{1}{3} \frac{(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3))^2}{1 + \frac{x^2}{3}} = \frac{1}{3} (1 - x^2 + o(x^3))(1 - \frac{x^2}{3} + o(x^3)) = \frac{1}{3} - \frac{x^2}{9} - \frac{x^2}{3} + o(x^3) = \frac{1}{3} - \frac{4x^2}{9} + o(x^3)$ .

8.

$$\begin{aligned} \frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} &= \frac{1}{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)} - \frac{1}{x} \\ &= \frac{1}{x} \left( \frac{1}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{x} \left( 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{6} - \frac{x^3}{24} - \frac{x^4}{120} + \left( \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120} \right)^2 - \frac{x^3}{8} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^4}{16} - 1 + o(x^4) \right) \\ &= \frac{1}{x} \left( -\frac{x}{2} - \frac{x^2}{6} - \frac{x^3}{6} - \frac{17x^4}{240} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{36} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \right) \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{x}{12} - \frac{x^3}{720} + o(x^3). \end{aligned}$$

9.

$$\begin{aligned}
 \frac{\sin(x)}{\ln(1+x)} &= \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)}{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)} \\
 &= \frac{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)}{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3)} \\
 &= \left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)\right) \left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} + \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4}\right)^2 - \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4}\right)^3 + o(x^3)\right) \\
 &= \left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)\right) \left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^3}{8} + o(x^3)\right) \\
 &= \left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)\right) \left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{12} + \frac{x^3}{24} + o(x^3)\right) \\
 &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{12} + \frac{x^3}{24} - \frac{x^2}{6} - \frac{x^3}{12} + o(x^3) \\
 &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{24} + o(x^3).
 \end{aligned}$$

10.

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\sin(x)}{\ln(1+x)}\right)^2 &= \left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{24} + o(x^3)\right)^2 \\
 &= 1 + \frac{x^2}{4} + x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{12} - \frac{x^3}{4} + o(x^3) \\
 &= 1 + x - \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{3} + o(x^3).
 \end{aligned}$$

11.

$$\begin{aligned}
 \frac{\cos(x)}{1-x} &= \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) (1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)) \\
 &= 1 + x + x^2 + x^3 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + o(x^3) \\
 &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + o(x^3).
 \end{aligned}$$

12.

$$\begin{aligned}
 \frac{\ln(1+x)\sin(x)}{x} &= \frac{(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3))(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4))}{x} \\
 &= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) \left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)\right) \\
 &= x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \\
 &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3).
 \end{aligned}$$

13.

$$\begin{aligned}
 \exp(\sin(x)) &= \exp\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \\
 &= 1 + \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3 + o(x^3) \\
 &= 1 + x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \\
 &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3).
 \end{aligned}$$

**Exercice 2.**

1. Puisque  $\exp$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  au voisinage de 5, on a d'après la formule de Taylor-Young :

$$\exp(x) \underset{x \rightarrow 5}{=} \exp(5) + \exp'(5)(x-5) + \frac{\exp''(5)}{2!}(x-5)^2 + o((x-5)^2) \underset{x \rightarrow 5}{=} e^5 + e^5(x-5) + \frac{e^5}{2}(x-5)^2 + o((x-5)^2).$$

2. Posons  $x = 1 + h \Leftrightarrow h = x - 1$ . Quand  $x$  tend vers 1, alors  $h$  tend vers 0 et on a

$$\begin{aligned}
 \cos(\ln(x)) &\underset{x \rightarrow 1}{=} \cos(\ln(1+h)) \\
 &\underset{h \rightarrow 0}{=} \cos\left(h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + o(h^3)\right) \\
 &\underset{h \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{1}{2}\left(h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + o(h^3)\right)^2 + o(h^3) \\
 &\underset{h \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{2} + o(h^3) \\
 &\underset{x \rightarrow 1}{=} 1 - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{2} + o((x-1)^3).
 \end{aligned}$$

3. Puisque  $\sin$  est de classe  $\mathcal{C}^3$  au voisinage de  $\frac{\pi}{4}$ , on a d'après la formule de Taylor-Young :

$$\sin(x) \underset{x \rightarrow \frac{\pi}{4}}{=} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin'\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sin''\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{\sin^{(3)}\left(\frac{\pi}{4}\right)}{6}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3\right)$$

d'où

$$\sin(x) \underset{x \rightarrow \frac{\pi}{4}}{=} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{4}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{\sqrt{2}}{12}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3\right).$$

**Exercice 3.**

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^{\frac{1}{x}} &\underset{x \rightarrow 0}{=} \exp\left(\frac{1}{x} \ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)\right) \\
 &\underset{x \rightarrow 0}{=} \exp\left(\frac{1}{x} \ln\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)\right) \\
 &\underset{x \rightarrow 0}{=} \exp\left(\frac{1}{x}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)\right)\right) \\
 &\underset{x \rightarrow 0}{=} \exp\left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + o(x^3)\right) \\
 &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + o(x^3)\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + o(x^3)\right)^3 + o(x^3) \\
 &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{48} + o(x^3) \\
 &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} + o(x^3).
 \end{aligned}$$

#### Exercice 4.

1. Puisque  $f$  et  $g$  sont de classe  $\mathcal{C}^4$  au voisinage de 0, on a d'après la formule de Taylor-Young :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{6}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{24}x^4 + o(x^4)$$

et

$$g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} g(0) + g'(0)x + \frac{g''(0)}{2}x^2 + \frac{g^{(3)}(0)}{6}x^3 + \frac{g^{(4)}(0)}{24}x^4 + o(x^4).$$

Par unicité du développement limité, on en déduit que  $g''(0) = 4$  et  $f^{(4)}(0) = 120$ .

2. (a) On a

$$\begin{aligned} fg(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} (1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + o(x^4))(x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + o(x^4)) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 2x^2 + 4x^3 + 6x^4 + 3x^3 + 6x^4 + 4x^4 + o(x^4) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} x + 4x^2 + 10x^3 + 20x^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

- (b)

$$\begin{aligned} \frac{1}{f(x)} &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + o(x^4)} \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - 2x - 3x^2 - 4x^3 - 5x^4 + (2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4)^2 - 8x^3 - 36x^4 + 16x^4 + o(x^4) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - 2x - 3x^2 - 12x^3 - 25x^4 + 4x^2 + 9x^4 + 12x^3 + 16x^4 + o(x^4) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - 2x + x^2 + o(x^4). \end{aligned}$$

- (c)

$$\begin{aligned} \frac{g(x)}{f(x)} &\underset{x \rightarrow 0}{=} (x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + o(x^4))(1 - 2x + x^2 + o(x^4)) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} x - 2x^2 + x^3 + 2x^2 - 4x^3 + 2x^4 + 3x^3 - 6x^4 + 4x^4 + o(x^4) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x^4). \end{aligned}$$

- (d)

$$\begin{aligned} f(g(x)) &\underset{x \rightarrow 0}{=} f(x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + o(x^4)) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + 2(x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4) + 3(x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4)^2 + 4(x^3 + 6x^4) + 5x^4 + o(x^4) \\ &= 1 + 2x + 4x^2 + 6x^3 + 8x^4 + 3(x^2 + 4x^4 + 4x^3 + 6x^4) + 4x^3 + 24x^4 + 5x^4 + o(x^4) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + 2x + 7x^2 + 22x^3 + 67x^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

- (e)

$$\begin{aligned} \ln(f(x)) &\underset{x \rightarrow 0}{=} \ln(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + o(x^4)) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 - \frac{1}{2}(2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4)^2 + \frac{1}{3}(8x^3 + 36x^4) - 4x^4 + o(x^4) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 2x + 3x^2 + \frac{20}{3}x^3 + 13x^4 - \frac{1}{2}(4x^2 + 9x^4 + 12x^3 + 16x^4) + o(x^4) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 2x + x^2 + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{2} + o(x^4). \end{aligned}$$

- (f) Notons  $F$  la primitive de  $f$  qui s'annule en 0. Par primitivation, on obtient un développement limité d'ordre 5 en 0 de  $F$  :

$$F(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} F(0) + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + o(x^5) = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + o(x^5).$$

3. On a  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ . Or, on ne connaît pas le développement limité (s'il existe!) de  $g$  en 1. On ne peut donc pas déterminer de développement limité de  $g \circ f$  en 0.
- 4.

$$\begin{aligned} \frac{1}{g(x)} &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + o(x^4)} \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{x} \frac{1}{1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + o(x^3)} \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{x} (1 - 2x - 3x^2 - 4x^3 + (2x + 3x^2 + 4x^3)^2 - (2x + 3x^2 + 4x^3)^3 + o(x^3)) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{x} (1 - 2x - 3x^2 - 4x^3 + 4x^2 + 12x^3 - 8x^3 + o(x^3)) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{x} - 2 + x + o(x^2). \end{aligned}$$

5. (a)  $\frac{x}{g(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - 2x + x^2 + o(x^3)$ .

- (b) Pour pouvoir obtenir un développement limité à l'ordre 4 en 0 de  $x \mapsto \frac{x}{g(x)}$ , il aurait fallu connaître un développement limité à l'ordre 5 en 0 de  $g$ .

6. (a) Puisque  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^4$  au voisinage de 0,  $f'$  est de classe  $\mathcal{C}^3$  au voisinage de 0. La formule de Taylor-Young nous permet donc de donner le développement limité de  $f'$  en 0 à l'ordre 3, et non à l'ordre 4.

- (b) D'après la première question,

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{6}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{24}x^4 + o(x^4).$$

Par unicité du développement limité, on en déduit que  $f'(0) = 2$ ,  $f''(0) = 6$ ,  $f^{(3)}(0) = 24$  et  $f^{(4)}(0) = 120$ .

D'après la formule de Taylor-Young, le développement limité de  $f'$  à l'ordre 3 en 0 est

$$f'(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} f'(0) + f''(0)x + \frac{f^{(3)}(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(4)}(0)}{6}x^3 + o(x^3) = 2 + 6x + 12x^2 + 20x^3 + o(x^3).$$

7. Soit  $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la bijection réciproque de  $f$ .

D'après le développement limité de  $f$ , on sait que  $f(0) = 1$ , ou encore  $f^{-1}(1) = 0$ . Il s'agit donc de donner un développement de  $f^{-1}$  en 1 à l'ordre 1.

Par ailleurs, on sait que  $f^{-1}$  admet un développement limité d'ordre 1 en 1 si et seulement si  $f^{-1}$  y est dérivable.

Or,  $f^{-1}$  est dérivable en 1 car  $f'(f^{-1}(1)) = f'(0) = 2 \neq 0$  et on a donc

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(f^{-1}(1))} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi, le développement limité de  $f^{-1}$  en  $f(0)$  à l'ordre 1 est

$$f^{-1}(x) \underset{x \rightarrow 1}{=} f^{-1}(1) + (f^{-1})'(1)(x - 1) + o(x - 1) = \frac{1}{2}(x - 1) + o(x - 1).$$

**Exercice 5.**

1.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)} - \frac{1}{x} \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{x} \left( \frac{1}{1 - \frac{x}{2} + o(x)} - 1 \right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{x} \left( 1 + \frac{x}{2} + o(x) - 1 \right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{2} + o(1) \end{aligned}$$

donc  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$ .

2.

$$\begin{aligned} \left( \frac{\sin(x)}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} &\underset{x \rightarrow 0}{=} \exp \left( \frac{1}{x^2} \ln \left( \frac{\sin(x)}{x} \right) \right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \exp \left( \frac{1}{x^2} \ln \left( 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2) \right) \right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \exp \left( \frac{-\frac{x^2}{6} + o(x^2)}{x^2} \right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \exp \left( -\frac{1}{6} + o(1) \right) \end{aligned}$$

donc  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin(x)}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{6}}$ .

3.

$$\begin{aligned} \frac{\sin(x - \sin(x))}{\sqrt{1+x^3} - 1} &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{\sin\left(\frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)}{\frac{x^3}{2} + o(x^3)} \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{\frac{x^3}{2} + o(x^3)} \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1 + o(1)}{3 + o(1)} \end{aligned}$$

donc  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x - \sin(x))}{\sqrt{1+x^3} - 1} = \frac{1}{3}$ .

4. Tout d'abord, on a  $\sin^4(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x^4 + o(x^4)$ .

Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} \sin \left( \frac{x}{1+x} \right) &\underset{x \rightarrow 0}{=} \sin(x(1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3))) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \sin(x - x^2 + x^3 - x^4 + o(x^4)) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} x - x^2 + x^3 - x^4 - \frac{1}{6}(x - x^2 + x^3 - x^4 + o(x^4))^3 + o(x^4) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} x - x^2 + x^3 - x^4 - \frac{1}{6}(x^3 - 3x^4) + o(x^4) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} x - x^2 + \frac{5x^3}{6} - \frac{x^4}{2} + o(x^4). \end{aligned}$$

Enfin,

$$\begin{aligned}\frac{\sin(x)}{1 + \sin(x)} &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)}{1 + x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)} \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) \left(1 - x + \frac{x^3}{6} + \left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 - \left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3 + \left(x - \frac{x^3}{6}\right)^4 + o(x^4)\right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) \left(1 - x + \frac{x^3}{6} + x^2 - \frac{x^4}{3} - x^3 + x^4 + o(x^4)\right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) \left(1 - x + x^2 - \frac{5x^3}{6} + \frac{2x^4}{3} + o(x^4)\right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} x - x^2 + x^3 - \frac{5x^4}{6} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{6} + o(x^4) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} x - x^2 + \frac{5x^3}{6} - \frac{2}{3}x^4 + o(x^4).\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\frac{1}{\sin^4(x)} \left[ \sin\left(\frac{x}{1+x}\right) - \frac{\sin(x)}{1+\sin(x)} \right] \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{\frac{x^4}{6} + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{\frac{1}{6} + o(1)}{1 + o(1)}$$

$$\text{d'où } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin^4(x)} \left[ \sin\left(\frac{x}{1+x}\right) - \frac{\sin(x)}{1+\sin(x)} \right] = \frac{1}{6}.$$

### Exercice 6.

— **DL de  $\sin x$  à l'ordre 2 :**

$$\sin x = x + o(x^2).$$

— **Composition avec  $e^u$ ,  $u = \sin x$  :**

$$\begin{aligned}e^{\sin x} &= 1 + \sin x + \frac{\sin^2 x}{2} + o(x^2) \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2).\end{aligned}$$

— **Tangente en 0 :**

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 1 \implies \text{équation de la tangente : } y = 1 + x.$$

— **Position :**

$$f(x) - (1 + x) = \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Ce terme est **positif** au voisinage de 0 (pour  $x \neq 0$ ).

— **Conclusion :** La courbe est **au-dessus** de sa tangente au voisinage de 0.

**Exercice 7.** Posons  $x = 1 + h \Leftrightarrow h = x - 1$ . Quand  $x$  tend vers 1,  $h$  tend vers 0 et on a

$$\begin{aligned}
 \frac{\ln(1+x) - \ln(2)}{x^2 \ln(x)} &\underset{x \rightarrow 1}{=} \frac{\ln(2+h) - \ln(2)}{(1+h)^2 \ln(1+h)} \\
 &\underset{h \rightarrow 0}{=} \frac{\ln\left(\frac{2+h}{2}\right)}{(1+2h+h^2)\left(h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + o(h^3)\right)} \\
 &\underset{h \rightarrow 0}{=} \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{2}\right)}{h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + 2h^2 - h^3 + h^3 + o(h^3)} \\
 &\underset{h \rightarrow 0}{=} \frac{\frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} + \frac{h^3}{24} + o(h^3)}{h + \frac{3h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + o(h^3)} \\
 &\underset{h \rightarrow 0}{=} \frac{\frac{1}{2} - \frac{h}{8} + \frac{h^2}{24} + o(h^2)}{1 + \frac{3h}{2} + \frac{h^2}{3} + o(h^2)} \\
 &\underset{h \rightarrow 0}{=} \left(\frac{1}{2} - \frac{h}{8} + \frac{h^2}{24} + o(h^2)\right) \left(1 - \frac{3h}{2} - \frac{h^2}{3} + \left(\frac{3h}{2} + \frac{h^2}{3}\right)^2 + o(h^2)\right) \\
 &\underset{h \rightarrow 0}{=} \left(\frac{1}{2} - \frac{h}{8} + \frac{h^2}{24} + o(h^2)\right) \left(1 - \frac{3h}{2} - \frac{h^2}{3} + \frac{9h^2}{4} + o(h^2)\right) \\
 &\underset{h \rightarrow 0}{=} \left(\frac{1}{2} - \frac{h}{8} + \frac{h^2}{24} + o(h^2)\right) \left(1 - \frac{3h}{2} + \frac{23h^2}{12} + o(h^2)\right) \\
 &\underset{h \rightarrow 0}{=} \frac{1}{2} - \frac{3h}{4} + \frac{23h^2}{24} - \frac{h}{8} + \frac{3h^2}{16} + \frac{h^2}{24} + o(h^2) \\
 &\underset{h \rightarrow 0}{=} \frac{1}{2} - \frac{7h}{8} + \frac{19h^2}{16} + o(h^2) \\
 &\underset{x \rightarrow 1}{=} \frac{1}{2} - \frac{7}{8}(x-1) + \frac{19}{16}(x-1)^2 + o((x-1)^2)
 \end{aligned}$$

La courbe admet donc en 1 une tangente d'équation  $y = -\frac{7}{8}x + \frac{11}{8}$  et est située au-dessus de cette tangente au voisinage de 1.

**Exercice 8.**

1.

$$\begin{aligned}
 f(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{3}{2}\left(1+x+\frac{x^2}{2}+1-x+\frac{(-x)^2}{2}+o(x^2)\right) - (1+x^2+o(x^2)) \\
 &\underset{x \rightarrow 0}{=} 2 + \frac{x^2}{2} + o(x^2).
 \end{aligned}$$

2. Au voisinage de 0, on a  $f(x) \geq 2 = f(0)$  donc  $f$  admet un minimum local en 0.

3. Ce n'est pas un minimum global puisque  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -\infty$ .

**Exercice 9.**

1. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Considérons la fonction  $f_n$  définie sur  $[n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}[$  par  $f_n(x) = \tan(x) - x$ .

La fonction  $f_n$  est dérivable sur  $[n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}[$  de dérivée pour tout  $x \in [n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}[$ ,

$$f'_n(x) = 1 + \tan^2(x) - 1 = \tan^2(x).$$

Pour tout  $x \in [n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}[$ ,  $f'_n(x) > 0$  donc la fonction  $f_n$  est strictement croissante sur  $[n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}[$ .

Par ailleurs,  $f_n(n\pi) = \tan(n\pi) - n\pi = -n\pi \leq 0$  et  $\lim_{x \rightarrow n\pi + \frac{\pi}{2}} f_n(x) = +\infty$ .

Puisque  $f_n$  est continue et strictement croissante sur  $[n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}[$ , on déduit du théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe un unique réel  $x_n \in [n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}[$  tel que

$$f_n(x_n) = \tan(x_n) - x_n = 0$$

i.e. il existe un unique réel  $x_n \in [n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}[$  tel que  $\tan(x_n) = x_n$ .

2. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $n\pi \leq x_n < n\pi + \frac{\pi}{2} < (n+1)\pi \leq x_{n+1}$  donc

la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement croissante.

De plus, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $n\pi \leq x_n < n\pi + \frac{\pi}{2}$  donc  $1 \leq \frac{x_n}{n\pi} < 1 + \frac{1}{2n}$ .

Or,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{2n} = 1$  donc d'après le théorème des gendarmes,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{n\pi} = 1$ .

Ceci implique que  $x_n \underset{+\infty}{\sim} n\pi$ .

Puisque  $x_n \underset{+\infty}{\sim} n\pi$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n\pi = +\infty$ , on en déduit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$ .

3. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $x_n - n\pi \in [0, \frac{\pi}{2}[$  et par  $\pi$ -périodicité de  $\tan$

$$\tan(x_n - n\pi) = \tan(x_n) = x_n$$

donc  $x_n - n\pi$  est l'unique réel de  $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  dont la tangente est égale à  $x_n$ , autrement dit :

pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x_n - n\pi = \arctan(x_n)$ .

D'après la question précédente,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$ . Or, on sait que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$ .

Par composition de limites, on en déduit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n - n\pi = \lim_{n \rightarrow +\infty} \arctan(x_n) = \frac{\pi}{2}$ .

A fortiori,  $x_n - n\pi \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}$ .

4. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On a alors  $x_n \geq n\pi > 0$ .

Par imparité de la fonction  $\tan$ , on sait que pour tout  $x \neq 0 \in ]\frac{\pi}{2}, \pi[$ ,

$$\tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\frac{1}{\tan(x)}$$

donc

$$\tan\left(x_n - n\pi - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan(x_n - n\pi)} = -\frac{1}{x_n}.$$

Or,  $x_n - n\pi - \frac{\pi}{2} \in ]-\frac{\pi}{2}, 0]$  donc  $x_n - n\pi - \frac{\pi}{2}$  est l'unique réel de  $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  dont la tangente est égale à  $-\frac{1}{x_n}$ , d'où, par imparité de  $\arctan$  :

pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x_n - n\pi - \frac{\pi}{2} = \arctan\left(-\frac{1}{x_n}\right) = -\arctan\left(\frac{1}{x_n}\right)$ .

5. On sait que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{x_n} = 0$ .

Or,  $\arctan(x) \underset{0}{\sim} x$  donc par composition de limites,  $\arctan\left(\frac{1}{x_n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x_n}$ .

Or, d'après la question 2,  $x_n \underset{+\infty}{\sim} n\pi$  donc  $\frac{1}{x_n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n\pi}$ .

On déduit alors de la question précédente que  $\boxed{x_n - n\pi - \frac{\pi}{2} \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{n\pi}}$ , d'où le développement limité voulu.