4 – Circuits électriques en régime transitoire

Les régimes transitoires du premier ordre apparaissent dans de multiples domaines de la physique ou de la chimie. En électricité, ils sont dus à la présence de dispositifs pouvant stocker de l'énergie, soit sous forme de charges, soit sous forme d'un champ magnétique. Les premiers sont les condensateurs, qu'on étudiera en première année, et les seconds sont les bobines inductives, qui seront abordées en seconde année. Dans le cadre du programme de BCPST, tant le condensateur que la bobine ne seront vus que sous l'aspect de la relation entre intensité et tension ; la raison de cette relation, qui relève de l'électrostatique ou de l'induction électromagnétique, est hors programme.

L'objectif de ce chapitre est triple. D'une part, mettre en évidence l'intérêt du condensateur en tant que dipôle dans un circuit. Son comportement permet de l'utiliser pour modéliser la réponse électrique de certains systèmes biologiques comme les fibres nerveuses ou les neurones. D'autre part, utiliser le condensateur, qui se comporte comme un réservoir de charge, pour modéliser le phénomène très général de stockage (d'énergie, de particule, etc). Enfin, mettre en évidence les caractéristiques mathématiques d'un régime transitoire.

Un des premiers condensateurs a été réalisé en 1746 par Pieter van Musschenbroek. À l'origine, il s'agissait d'une bouteille en verre (ioslant) dont l'extérieur était recouvert par une feuille métallique (donc conductrice) et l'intérieur rempli d'eau salée (également conductrice) ou recouvert d'un autre métal. Ce dispositif, connu sous le nom de bouteille de Leyde, a été longtemps le seul moyen de stockage de l'électricité. Celle-ci était créée par frottement de deux matériaux bien choisis, stockée dans la bouteille de Leyde, et pouvait être récupérée par mise en contact électrique des conducteurs intérieur et extérieur.

peintre : H. van der Mij
Université de Leyde

Pieter van Musschenbroek (1692 - 1761)
physicien néerlandais

photo : Arnaud 25
musée EDF Électropolis de Mulhouse

4 bouteilles de Leyde en série

Plan du chapitre

Programme officiel – Deuxième semestre – **Thème S – ondes et signaux**

Notions	Capacités exigibles
S.3. Dynamique d'un circuit électrique du premier ordre	
Système à comportement capacitif : modèle du condensateur idéal. Relation entre charge et tension électrique, entre intensité du courant électrique et tension électrique ; capacité d'un condensateur.	Exploiter l'expression fournie de la capacité d'un condensateur.
Continuité de la tension électrique aux bornes d'un condensateur. Énergie stockée dans un condensateur.	Exploiter la condition de continuité de la tension électrique aux bornes d'un condensateur pour déterminer les conditions initiales dans un circuit.
Modèle du circuit RC série alimenté par une source idéale de tension.	Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes d'un condensateur.
Charge d'un condensateur par une source de tension constante, décharge d'un condensateur, temps caractéristique.	Établir l'expression, en fonction du temps, de la tension aux bornes d'un condensateur dans le cas de sa charge et de sa décharge. Déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire. **Réaliser l'acquisition d'un signal électrique caractéristique d'un système du premier ordre et en étudier les caractéristiques.**
Stockage et dissipation de l'énergie.	Réaliser un bilan énergétique pour le circuit RC série.

1 Les condensateurs

1.1 Présentation du dipôle

1.1.1 Description de l'objet

Un condensateur est constitué de deux plaques, les **armatures**, généralement planes (mais il en existe des cylindriques, coniques, sphériques, etc) et usuellement parallèles, faites en un matériau conducteur (un métal le plus souvent). L'espace entre les armatures est rempli par un isolant électrique, appelé le **diélectrique**. Chacune des armatures constitue une borne du condensateur, qui est donc un dipôle (figure 2a).

Dans la bouteille de Leyde (figure 1), les armatures sont de forme quelconque et le diélectrique est du verre [1] ; le premier condensateur plan est celui conçu par Franz Aepinus en 1756 (voir *infra* figure 5).

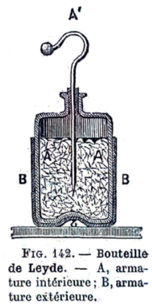
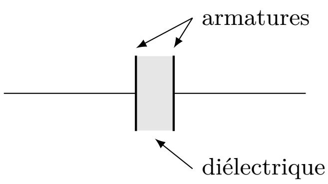
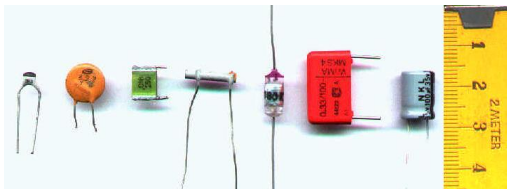


Figure 1 – La bouteille de Leyde.

Les condensateurs actuels utilisés dans les circuits électriques (appareils électroménagers ou hifi par exemple) sont nettement plus petits, et se présentent sous des formes diverses montrées figure 2b. Pour certaines applications, il existe des condensateurs très gros (supercondensateurs).



(a) schéma d'un condensateur plan



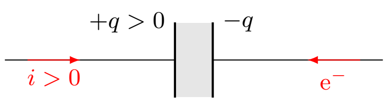
(b) condensateurs modernes

Figure 2 – Représentation et exemples de condensateurs plans.

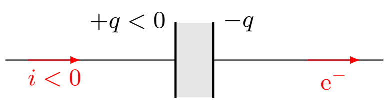
1.1.2 Charge des armatures

Supposons qu'on fasse circuler des électrons (donc un courant électrique) dans le conducteur relié à l'armature de droite. Il y a arrivée de charges négatives sur cette amature. Comme les charges ne peuvent pas traverser le diélectrique, qui est isolant, les électrons s'accumulent sur l'armature de droite, à l'interface avec le diélectrique. L'accumulation de charges négatives à droite entraine un départ d'électrons de l'armature opposée ; il y a donc un déficit d'électrons au niveau de l'interface entre le métal de l'armature de gauche et le diélectrique, autrement dit apparition d'une charge positive. Pour des raisons de conservation de la charge, il apparait en fait des charges exactement opposées sur les deux armatures.

En résumé, s'il arrive un courant $i > 0$ sur l'armature de gauche, des électrons arrivent sur l'armature de droite qui se charge avec une charge négative, soit $-q$ avec $q > 0$. Il apparait alors une charge positive $+q$ sur l'armature de gauche (figure 3a).



(a) cas1



(b) cas2

Figure 3 – Principe d'un condensateur.

1. L'expérience de la bouteille de Leyde réalisée par Musschenbroek est présentée sur le site *Ampère et l'histoire de l'électricité* du CNRS : `http://www.ampere.cnrs.fr/parcourspedagogique/zoom/18e/bouteilleleyde/`.

Inversement, s'il arrive un courant $i < 0$ sur l'armature de gauche, c'est qu'en réalité le courant est dans l'autre sens. Les électrons arrivent sur l'armature de gauche, qui se charge négativement, l'armature de droite se chargeant positivement (figure 3b). On retiendra la règle totalement générale suivante :

si on appelle $+q$ la charge sur l'armature où arrive le courant, alors i et q ont le même signe.

1.1.3 Charge maximale d'un condensateur

Au fur et à mesure que des électrons s'accumulent sur une armature, la charge de celle-ci devient de plus en plus négative. L'arrivée d'electrons supplémentaires est alors de plus en plus difficile, du fait de la répulsion électrostatique entre charges de même signe. En conséquence, l'intensité du courant électrique dans la branche du condensateur diminue au fur et à mesure que la charge à ses armatures augmente. Il existe une valeur maximale de la charge aux armatures du condensateur [2] ; lorsque elle-ci est atteinte, l'intensité dans la branche du condensateur devient nulle.

Un condensateur entièrement chargé se comporte comme un interrupteur ouvert : l'intensité est nulle dans sa branche.

1.2 Relation entre charge, intensité et tension dans un condensateur

1.2.1 Tension aux bornes d'un condensateur idéal ; capacité

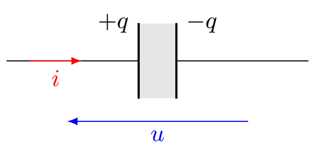


FIGURE 4 – Tension aux bornes.

On peut montrer en électromagnétisme que la tension aux bornes d'un condensateur idéal est proportionnelle à la charge présente sur ses armatures. Le facteur de proportionnalité est l'inverse de la **capacité** C du condensateur [3].

$$\boxed{\text{En convention récepteur,} \quad u = \frac{q}{C}} \tag{1}$$

Cette relation est algébrique, et est valable pour les deux cas de la figure 3. En effet, en convention récepteur, si $q < 0$, alors $u < 0$. En convention générateur, il apparait un signe négatif dans la formule :

$$\text{En convention générateur,} \quad u = -\frac{q}{C}$$

La capacité du condensateur s'exprime en **farad** F, et est caractéristique de celui-ci. Elle dépend de la surface S des armatures, de la distance e qui les sépare et de la permittivité relative ε_r du diélectrique, un nombre sans dimension caractéristique du matériau :

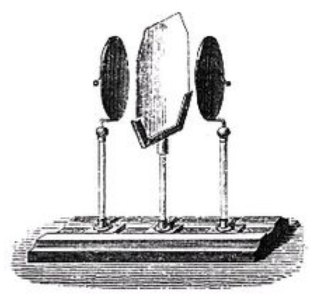


FIGURE 5 – Condensateur d'Aepinus.

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r \times S}{e}$$

2. Cette valeur dépend de la géométrie du condensateur (surface des armatures et distance entre elles) et de la résistivité du diélectrique, mais aussi des conditions dans lesquelles on charge le condensateur (tensionà laquelle on le soumet).

3. L'objet condensateur idéal est souvent confondu avec sa caractéristique électrique, de même qu'un résistor est confondu avec sa résistance. En conséquence, on parle parfois par abus de langage de capacité ou de capacitance, pour qualifier un composant se comportant comme un condensateur idéal dans un circuit.

avec ε_0 une constante universelle appelée la permittivité du vide. La permittivité relative est un nombre sans dimension tel que $\varepsilon_r > 1$. Dans le premier condensateur plan, celui d'Aepinus (figure 5), le diélectrique est de l'air, et la capacité prend une valeur variable, selon la distance à laquelle on place les deux armatures.

Soit un condensateur plan ayant des armatures de surface $1\,\text{cm}^2$ distantes de $e = 1\,\text{mm}$ et séparées par un diélectrique en porcelaine de permittivité relative $\varepsilon_r = 5$. Sachant que $\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi 10^9}$, on peut calculer la capacité :

$$C = \frac{5 \times 1 \cdot 10^{-4}}{36\pi 10^9 \times 1 \cdot 10^{-3}} = 4{,}4 \cdot 10^{-12}\,\text{F} = 4{,}4\,\text{pF}$$

Le farad est une unité très grande ! Un condensateur de capacité 1 F est un objet énorme. Dans les circuits électriques usuels, on rencontre des condensateurs dont la capacité est de l'ordre du pF au mF.

1.2.2 Relation entre tension et intensité

Soit un condensateur alimenté par un fil. Supposons que, pendant un intervalle de temps infinitésimal $\mathrm{d}t$, il circule dans le fil une quantité infinitésimale de charge δq. Comme il n'y a pas accumulation de charge dans un fil, toutes les charges qui circulent arrive sur l'armature du condensateur ; la charge de cette armature varie donc d'une quantité $\mathrm{d}q$ telle que $\mathrm{d}q = \delta q$. Or, l'intensité qui parcourt le fil est par définition $i = \delta q / \mathrm{d}t$; par conséquent, l'intensité dans le fil alimentant l'armature du condensateur peut s'exprimer en fonction de la variation de la charge de celle-ci :

$$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \tag{2}$$

En régime variable, c'est-à-dire lorsque les grandeurs électriques varient au cours du temps, la relation enre intensité qui alimente le condensateur et tension à ses bornes est obtenue en introduisant l'expression de la charge donnée par l'équation (1), dans l'expression (2) :

$$\boxed{\text{En convention récepteur,} \quad i = C\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}} \tag{3}$$

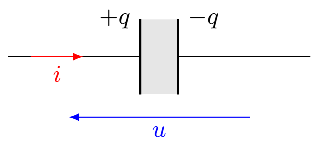


FIGURE 6 – Relation courant - tension.

En convention générateur, un signe apparait dans (1), qui se répercute dans l'équation précédente :

$$\text{En convention générateur,} \quad i = -C\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

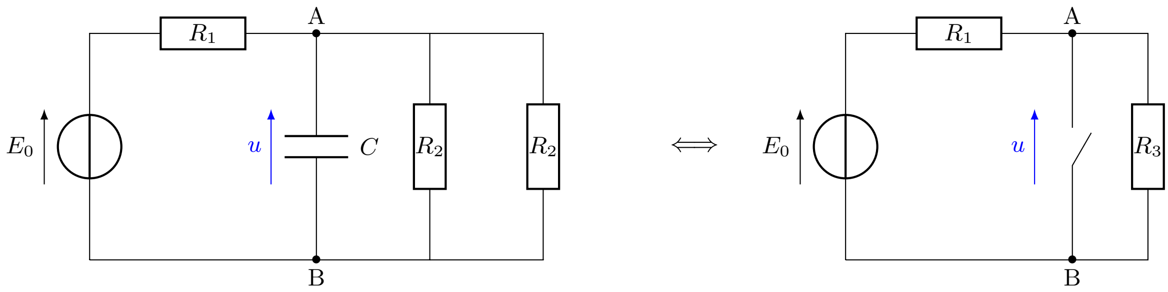
1.2.3 Cas du régime stationnaire

En régime stationnaire (régime continu), la charge du condensateur névolue pas au cours du temps et reste constante. En conséquence $\mathrm{d}q / \mathrm{d}t = 0$, et aucun courant ne circule ; c'est comme si la branche du circuit était ouverte[4]. Cela peut aussi se retrouver avec la relation entre l'intensité et la tension. En régime stationnaire, u est constante au cours du temps, donc $\mathrm{d}u / \mathrm{d}t = 0$ donc $i = 0$.

En régime stationnaire, un condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert.

4. D'après ce qu'on a vu précédemment, c'est le cas lorsque le condensateur est entièrement chargé. Comme on le verra, c'est aussi le cas lorsque le condensateur est totalement déchargé.

Cette propriété est fondamentale, car elle permet de trouver la tension aux bornes d'un condensateur en régime stationnaire en se ramenant à l'étude d'un circuit sans condensateur. Cherchons par exemple la tension u aux bornes du condensateur de la figure ci-dessous lorsque le régime stationnaire est atteint dans le circuit. On sait qu'en régime stationnaire, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert. Par ailleurs, les deux résistances R_2 sont en parallèle et équivalentes à une résistance $R_3 = R_2/2$. On peut écrire un circuit équivalent en régime stationnaire.



La tension aux bornes du condensateur est également la tension aux bornes du résistor R_3, puisque ces deux dipôles sont branchés en parallèle. Le circuit équivalent est un pont diviseur de tension, qui permet d'écrire sans autre calcul :

$$u = E_0 \times \frac{R_3}{R_1 + R_3} = E_0 \times \frac{R_2}{2R_1 + R_2}$$

On débranche la source de tension en déconnectant le circuit au niveau du point A. Quelle est la tension u aux bornes du condensateur lorsque le circuit parvient en régime stationnaire ?

1.2.4 Modélisation d'un condensateur réel

Le diélectrique entre les deux armatures d'un condensateur n'est pas un isolant parfait. Il existe toujours des fuites, qui correspondent au passage d'un courant très faible, appelé le courant de fuite, à travers le diélectrique d'une armature à l'autre. Un condensateur réel peut donc être modélisé par un condensateur idéal sans fuite en parallèle avec un résistor de très grande résistance, autrement dit une capacité en parallèle avec une résistance très grande.

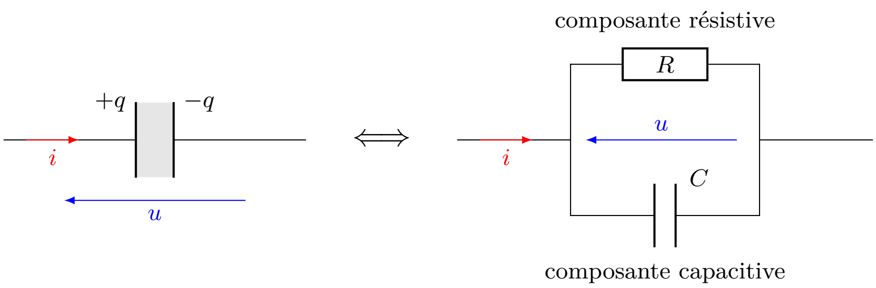


FIGURE 7 – Modélisation d'un condensateur réel.

Néanmoins, on est capable de réaliser des diélectriques de résistivité si grande qu'il est la plupart du temps totalement légitime de supposer idéal un condensateur [5].

5. En pratique, sauf précision explicite de l'énoncé, on négligera la composante résistive des condensateurs dans les exercices et les problèmes.

1.2.5 Analogie avec le transfert thermique

On sait que la charge électrique qui circule dans un circuit sous l'effet d'une différence de potentiel électrique est analogue à l'énergie thermique qui est transportée sous l'effet d'une différence de température. Le condensateur idéal, qui stocke des charges, est donc l'analogue d'un dispositif qui stocke de l'énergie, par exemple un milieu matériel qui s'échauffe sous l'effet du transport de chaleur, et qui peut éventuellement restituer de l'énergie en se refroidissant. Comme dans le cas du condensateur, il apparait une limite au stockage.

On peut également faire une analogie avec la diffusion de particules à travers un milieu matériel sous l'effet d'une différence de concentration[6]. Le condensateur modélise alors un système tenant lieu de réservoir où s'accumulent les particules. Il existe également une valeur limite au nombre de particules stockées. Le tableau suivant présente les grandeurs analogues dans les différents phénomènes de transport.

transport	cause	flux	résistance	stockage
charges	$u = \Delta V$	i	$R = \dfrac{\rho L}{S} = \dfrac{1}{\sigma} \times \dfrac{L}{S}$	condensateur C
chaleur	ΔT	$\mathcal{P}_{\text{th}}$	$R_{\text{th}} = \dfrac{1}{\lambda} \times \dfrac{L}{S}$	capacité thermique C
particules	$\Delta\mu \approx \Delta C$	Φ_n	$R_{\text{diff}} = \dfrac{1}{D} \times \dfrac{L}{S}$	

Table 1 – Analogies entre les grandeurs intervenant dans les différents phénomènes de transport.

1.3 Énergie emmagasinée dans un condensateur

Considérons un condensateur chargé, dont les deux armatures sont déconnectées. Lorsqu'on relie les deux bornes du condensateur, par exemple en fermant un interrupteur, les électrons circulent spontanément de l'armature ⊖ vers l'armature ⊕, sous l'effet de la différence de potentiel entre les deux armatures. Cela met en évidence qu'un condensateur chargé peut induire un mouvement ordonné d'électrons, autrement dit qu'il peut libérer un travail électrique. Cette énergie ne peut venir que du condensateur lui-même, ce qui montre qu'un condensateur stocke l'énergie électrique qu'il reçoit lorsqu'on le charge.

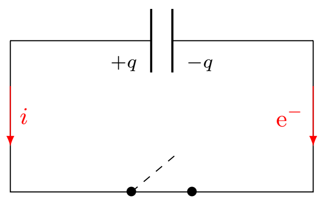


Figure 8 – Courant délivré par un condensateur.

La puissance emmagasinée est celle que le condensateur reçoit au cours de la phase de charge. Elle est donnée par la formule de la puissance reçue par un dipôle, avec u et i orientés en convention récepteur :

$$P = u\,i = \frac{q}{C} \times \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{C} \times \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}(q^2)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{q^2}{2C}\right)$$

Or, la puissance est l'énergie reçue par unité de temps : $P = \delta W/\,\mathrm{d}t$. Par identification, on obtient l'énergie emmagasinée par le condensateur pour une charge q présente à ses armature ou pour une tension u à ses bornes :

$$\boxed{W = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2}\,Cu^2} \tag{4}$$

Par exemple, un condensateur de capacité $C = 330\,\mathrm{pF}$ chargé jusqu'à présenter à ses bornes une tension $u = 2{,}0\,\mathrm{V}$ porte sur des armatures une charge $q = Cu = 660\,\mathrm{pC}$ et stocke une énergie $W = 330 \cdot 10^{-12} \times 2^2/2 = 660\,\mathrm{pJ}$.

6. La diffusion de particules sera vue ultérieurement dans le cours de physique.

1.4 Continuité de la charge et de la tension

D'un point de vue physique, la charge apparait aux armatures du condensateur de façon progressive, au fur et à mesure que les électrons arrivent. En conséquence, la charge ne varie pas brusquement au niveau des armatures, et cela même si on fait passer *instantanément* l'intensité i du courant d'une valeur nulle dans le circuit à une valeur non nulle, par exemple en fermant un interrupteur.

Cela est manifeste si on raisonne sur l'énergie stockée par le condensateur. Si q passait instantanément d'une valeur q_1 à une valeur q_2 très différente de q_1, ceci signifierait que l'énergie stockée ($W_C = q^2/2C$) passerait d'une valeur E_1 à une valeur E_2 très différente de E_1 en un temps nul $\Delta t = 0$, autrement dit que la puissance reçue à cet instant, qui vaut $(E_2 - E_1)/\Delta t$, serait infinie, ce qui est impossible.

En définitive, cela signifie que la charge portée par les armatures du condensateur est une fonction $q_{(t)}$ continue au sens mathématique. Il en est de même de la tension $u_{c\,(t)}$ aux bornes du condensateur, puisqu'elle est proportionnelle à la charge. L'intensité qui alimente le condensateur peut en revanche varier de façon discontinue, par exemple suite à la fermeture d'un interrupteur.

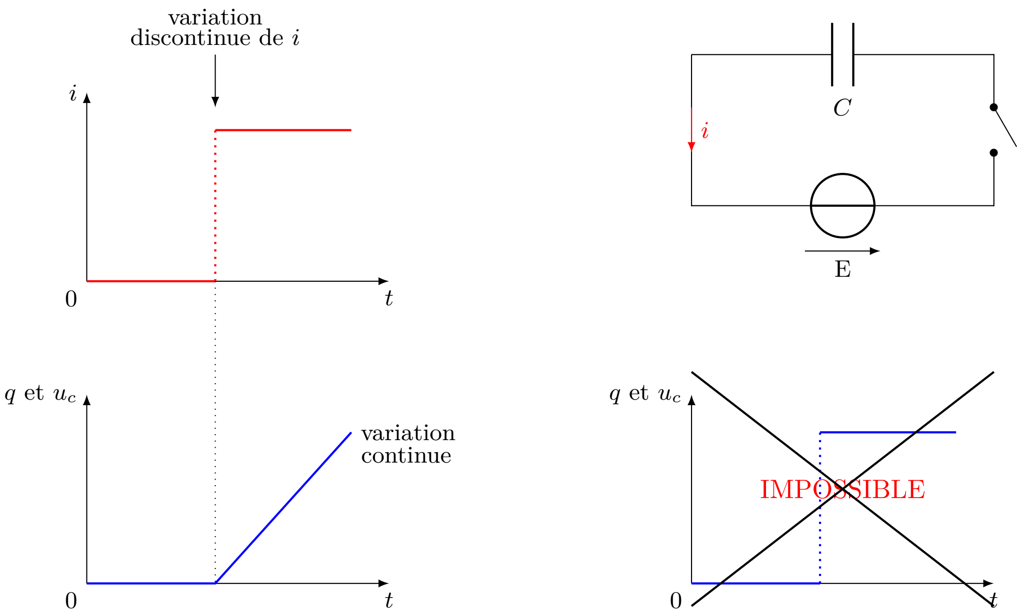


FIGURE 9 – Continuité de la charge et de la tension au niveau d'un condensateur.

Attention ! cela ne signifie pas que toutes les tensions varient continûment ou que toutes les intensités puissent être discontinues. Toutes les grandeurs électriques du circuit qui sont proportionnelles à la tension aux bornes du condensateur sont continues, et certaines d'entre elles peuvent être des intensités.

Toute discontinuité de la charge q d'un condensateur, donc de la tension u à ses bornes, est impossible. Les fonctions $q_{(t)}$ et $u_{c\,(t)}$ sont continues au sens mathématique.

2 Réponse d'un circuit capacitif à un échelon de tension

2.1 Charge d'un condensateur

2.1.1 Dispositif expérimental

Considérons un circuit constitué d'un condensateur de capacité C en série avec un résistor de résistance R, alimenté par une source idéale de tension E_0. Au départ, le circuit est ouvert du fait de la présence d'un interrupteur ouvert, et le consensateur est initialement déchargé, soit $q_{(t<0)} = 0$. On étudie l'évolution des grandeurs électriques dans le circuit au cours du temps après fermeture de l'interrupteur à la date $t = 0$.

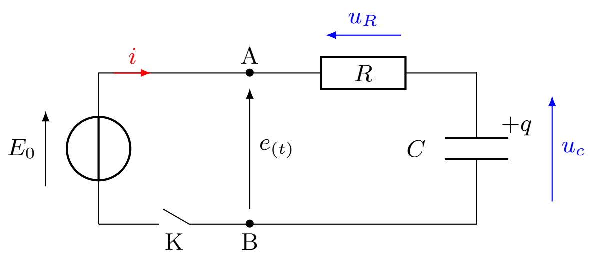


Figure 10 – Réalisation expérimentale de la charge d'un condensateur.

Dans ce dispositif, le condensateur et le résistor sont soumis à un **échelon de tension**, c'est-à-dire que la tension $e_{(t)}$ à laquelle ils sont soumis passe instantanément d'une valeur finie à une autre valeur finie à une date donnée, ici de 0 à E_0 à la date $t = 0$. La tension $e_{(t)}$ est mathématiquement définie par :

$$e_{(t)} = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ E_0 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

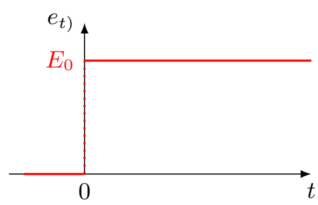


Figure 11 – Échelon de tension.

L'évolution de la tension u_c aux bornes du condensateur, enregistrée à l'aide d'un oscilloscope, est présentée sur la figure 12. À $t = 0$, la tension est nulle, ce qui est attendu car la charge du condensateur est nulle. Le générateur induit une circulation d'électrons, ce qui permet la charge progressive du condensateur, donc une augmentation de la tension à ses bornes. Après un temps suffisamment long, la tension tend vers une valeur limite, ce qui est compatible avec l'existence d'une charge maximale du condensateur.

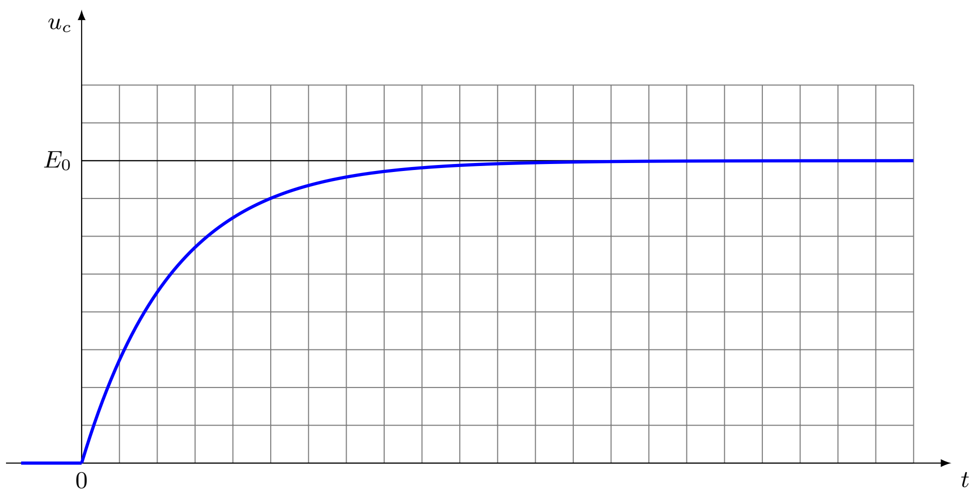


Figure 12 – Tension aux bornes du condensateur au cours du temps lors de la charge.

La courbe expérimentale met en évidence un régime transitoire, au cours duquel on observe une évolution de la tension u_c aux bornes du condensateur, qui est suivie d'un régime stationnaire au cours duquel cette tension n'évolue plus.

2.1.2 Établissement de l'équation différentielle

À $t < 0$, le générateur délivre une tension nulle dans le circuit $e_{(t)} = 0$. En outre, la tension aux bornes du condensateur est nulle, puisque sa charge est nulle :

$$u_c = 0 \quad \text{à } t < 0$$

On se place maintenant à $t \geq 0$. La tension délivrée par la source est $e_{(t)} = E_0$. La loi des mailles s'écrit (figure 10) :

$$e_{(t)} = E_0 = u_c + u_{\mathrm{R}}$$

En utilisant la loi d'Ohm, et avec une intensité i à travers la résistance en convention récepteur, on a $u_{\mathrm{R}} = Ri$. Or, l'intensité à travers la résistance est aussi l'intensité qui alimente le condensateur ; par conséquent, i est reliée à u_c par l'équation (3). On a donc :

$$E_0 = u_c + Ri = u_c + RC\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}$$

On reconnait une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants. Cette relation étant une égalité entre des tensions, le terme $RC\ \mathrm{d}u_c \,/\, \mathrm{d}t$ est homogène à une tension, ce qui impose à $\tau = RC$ d'être homogène à un temps ; c'est la **constante de temps** du phénomène : L'équation vérifiée par $u_{c\,(t)}$ vérifie une équation similaire) s'écrit finalement :

$$\boxed{\tau \times \frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} + u_c = E_0} \qquad \text{avec} \qquad \boxed{\tau = RC} \tag{5}$$

Notons qu'on peut aussi écrire une équation différentielle vérifiée par la charge q ; en effet, comme $q = Cu_c$, on a :

$$E_0 = \frac{q}{C} + R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \Rightarrow q + \tau\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = CE_0 \tag{6}$$

2.1.3 Résolution de l'équation différentielle

La solution complète de l'équation différentielle (5) est la somme de deux termes :

- une **solution particulière**,
- la solution de l'**équation homogène**, c'est-à-dire telle que le second membre soit nul.

Comme le second membre est constant, cherchons une solution particulière u_2 sous forme d'une fonction constante. Comme elle est constante, sa dérivée est nulle, et comme c'est une solution, elle satisfait à l'équation différentielle, soit :

$$\tau \times \frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} + u_2 = E_0 \Rightarrow u_2 = E_0$$

La solution u_1 de l'équation homogène est de la forme :

$$u_1 = \lambda \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

où λ est une constante. En définitive, la solution complète de l'équation différentielle a pour expression :

$$u_{c\,(t)} = u_1 + u_2 = \lambda \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + E_0$$

Pour déterminer la valeur de la constante d'intégration λ, on utilise une condition à la limite. On sait qu'à $t < 0$, la tension aux bornes du condensateur est nulle ; en conséquence, juste avant la fermeture de l'interrupteur, on peut écrire : $u_{c\,(t=0^-)} = 0$, où $t = 0^-$ représente une date juste avant $t = 0$ et aussi proche de 0 que l'on veut. Or, la tension aux bornes du condensateur est continue, donc la tension juste après la fermeture de l'interrupteur est égale à la tension juste avant la fermeture, ce qui s'écrit $u_{c\,(t=0^+)} = u_{c\,(t=0^-)}$ de façon classique[7]. Autrement dit, la tension à $t = 0$ juste après la fermeture de l'interrupteur est égale à la tension qui existait juste avant la fermeture : $u_{c\,(t=0^+)} = 0$. En introduisant cette condition dans l'expression de u_c à $t = 0$, on obtient :

$$u_{c\,(t=0)} = 0 = E_0 + \lambda\,\mathrm{e}^0 = E_0 + \lambda \Rightarrow \lambda = -E_0$$

Finalement, la tension aux bornes du condensateur varie au cours du temps selon la loi :

$$\boxed{u_{c\,(t)} = E_0\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right) \qquad \text{avec} \qquad \tau = RC} \tag{7}$$

Comme $q = Cu_c$, il est aisé de montrer que la charge évolue en fonction du temps selon une loi analogue à la tension :

$$q_{(t)} = C\,u_{c\,(t)} = CE_0\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right) \tag{8}$$

La charge, initialement nulle, augmente donc jusqu'à une valeur non nulle $q_{t\to\infty} = CE_0$; on réalise bien la **charge du condensateur**.

2.1.4 Régime transitoire et régime stationnaire

L'expression de la fonction $u_{c\,(t)}$ donnée par (7) est tout à fait conforme à la mesure expérimentale, puisqu'on retrouve bien la courbe obtenue. Le **régime transitoire**, pendant lequel la tension u_c varie, évolue vers un **régime stationnaire**, indépendant du temps, pour lequel la tension u_c devient constante, avec une valeur imposée par la source de tension.

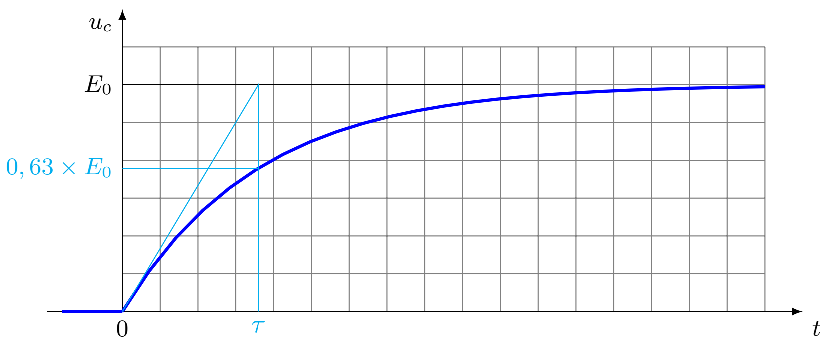


FIGURE 13 – Évolution de $u_{c\,(t)}$ pendant la charge.

7. Ceci est une façon condensée d'écrire la définition de la continuité de la fonction $u_{c\,(t)}$ en $t = 0$, à savoir que la limite de la fonction en 0 par valeurs inférieures (la limite à gauche) est égale à la limite en 0 par valeurs supérieures (la limite à droite) :

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t<0}} u_{c\,(t)} = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} u_{c\,(t)}$$

Mathématiquement, il est aisé de démontrer que la tangente à la courbe à $t = 0$ (à droite) coupe l'asymptote de la courbe (d'équation $y = E_0$) à une date égale à la constante de temps du circuit. D'autre part, on peut montrer que la valeur prise par la tension à la date τ est : $u_{c\,(\tau)} = E_0\left(1 - \mathrm{e}^{-1}\right) = 0,63 \times E_0$.

La valeur de u_c en régime stationnaire se retrouve en déterminant la limite pour les temps long ($t \to \infty$) de l'expression de u_c. Une limite est également observée pour la charge :

$$u_{c\,(t)} \xrightarrow[t\to\infty]{} E_0$$
$$q_{(t)} \xrightarrow[t\to\infty]{} CE_0$$

La valeur prise par la tension lorsque le régime permanent est atteint vaut E_0 qui est la valeur de la solution particulière u_2 de l'équation différentielle. Ceci est attendu, puisque la solution particulière a été cherchée constante, ce qui correspond précisément à une solution en régime stationnaire (régime continu).

$$\boxed{\text{La solution particulière de l'équation différentielle correspond à la valeur atteinte en régime stationnaire.}}$$

On peut retrouver la valeur de u_c en régime permanent d'une autre manière. Lorsqu'on arrive en régime permanent, l'intensité à travers le condensateur est nulle, c'est-à-dire que celui-ci se comporte comme un interrupteur ouvert ; le circuit se réduit alors celui de la figure 14. Le circuit étant ouvert, $i = 0$ soit $u_\mathrm{R} = 0$, qui conduit à $u_c = E_0$ par application de la loi des mailles.

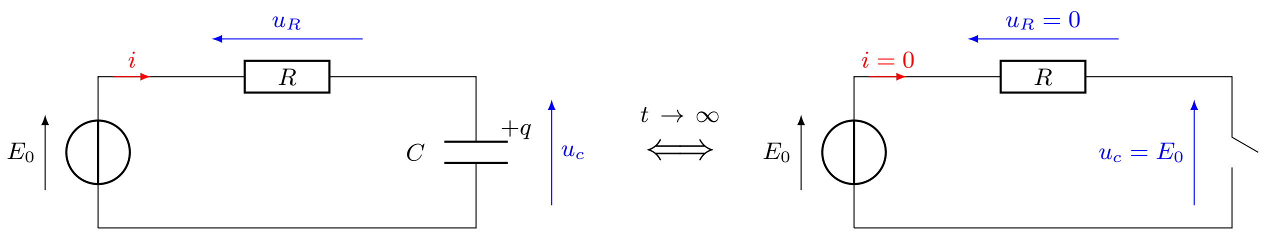


FIGURE 14 – Recherche de la tension en régime permanent.

2.1.5 Intensité dans le circuit

Avant la fermeture de l'interrupteur, le condensateur est déchargé et soumis à une tension nulle. Le courant qui circule est évidemment nul, soit $i_{(t)} = 0$ à $t < 0$.

FIGURE 15 – Évolution de i pendant la charge.

Après fermeture de l'interrupteur, l'intensité qui circule est reliée à la charge par (3). Son expression se déduit directement de l'expression de la tension donnée par (7). Après la fermeture de l'interrupteur, on a donc :

$$i_{(t)} = C\,\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} = \frac{CE_0}{\tau}\,\mathrm{e}^{-t/\tau} = \frac{CE_0}{RC}\,\mathrm{e}^{-t/\tau} \quad \Rightarrow \quad \boxed{i_{(t)} = \frac{E_0}{R}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}} \tag{9}$$

expression qu'on peut aussi obtenir à l'aide de l'expression de la charge du condensateur donnée 8, puisque $i = \mathrm{d}q\,/\,\mathrm{d}t$. L'intensité juste après la fermeture de l'interrupteur, à l'instant $t = 0^+$ prend la valeur :

$$i_0 = \frac{E_0}{R}$$

Cette valeur est différente de celle à $t < 0$; il y a donc une **discontinuité** de l'intensité dans le circuit. Au moment de la fermeture de l'interrupteur, la tension aux bornes du condensateur étant encore nulle par continuité de la tension, le courant est imposé par la résistance, ce qui justifie l'expression E_0/R.

Enfin, lorsqu'on parvient au régime continu, le courant tend vers une valeur nulle :

$$i_{(t)} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$$

ce qui est bien compatible avec le comportement d'interrupteur ouvert du condensateur lorsque le circuit parvient en régime stationnaire.

2.2 Décharge du condensateur : régime libre

Une fois le régime permanent atteint (avec l'interrupteur en position 1 depuis très longtemps), donc lorsque $u_{c\,(t)} \approx E_0$, on bascule l'interrupteur de la position 1 à la position 2 sur la figure 16. Le circuit se réduit alors au condensateur et à la résistance. Dans ce circuit, il n'y a plus de dipôle actif, c'est-à-dire que l'opérateur n'impose plus de tension aux autres dipôle ; le circuit évolue alors sans contrainte, ce qui correspond à un régime qualifié de *libre*.

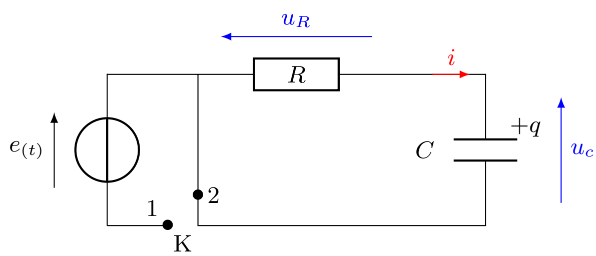


FIGURE 16 – Circuit de décharge du condensateur.

Par commodité, on choisit une **nouvelle origine des temps** : $t = 0$ à l'instant où on bascule l'interrupteur. À cette date, la charge du condensateur est la charge maximale, soit $u_{c\,(t=0)} = E_0$ et $q_{(t=0)} = CE_0$, puisqu'on a préalablement chargé le condensateur jusqu'à atteindre le régime permanent. Pour pouvoir comparer les phases de charge et de décharge, gardons le même sens pour l'intensité du courant dans le circuit. La loi des mailles s'écrit :

$$u_c + u_R = 0 \Rightarrow u_c + Ri = 0 \Rightarrow u_c + RC\,\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{10}$$

Il s'agit encore d'une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants, mais avec un second membre nul. La solution est la solution de l'équation homogène, soit :

$$u_{c\,(t)} = \lambda\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

avec λ une constante d'intégration qu'on obtient avec la condition initiale. Comme u_c est une fonction continue, et qu'elle vaut E_0 juste avant le basculement de l'interrupteur, alors :

$$u_{c\,(t=0^-)} = u_{c\,(t=0^+)} \Rightarrow E_0 = \lambda\,\mathrm{e}^{-0/\tau} \Rightarrow \lambda = E_0$$

Finalement, l'évolution de la tension lors de la décharge en régime libre est de la forme :

$$\boxed{u_{c\,(t)} = E_0\,\mathrm{e}^{-t/\tau} \qquad \text{avec} \qquad \tau = RC} \tag{11}$$

On peut aussi résoudre l'équation différentielle par intégration entre deux bornes. À la nouvelle origine des temps $t = 0$, $u_c = E_0$ (par continuité de la tension) ; à une date quelconque t, la tension aux bornes du condensateur a une valeur quelconque $u_{c\,(t)}$. Après séparation des variables, on a donc :

$$\frac{\mathrm{d}u_c}{u_c} = -\frac{\mathrm{d}t}{RC} = -\frac{\mathrm{d}t}{\tau} \Rightarrow \int_{E_0}^{u_{c\,(t)}} \frac{\mathrm{d}u_c}{u_c} = -\int_0^t \frac{\mathrm{d}t}{\tau} \Rightarrow \ln\frac{u_{c\,(t)}}{E_0} = -\frac{t}{\tau}$$

ce qui conduit à la même expression après passage à l'exponentielle. La tension décroit donc exponentiellement avec une constante de temps identique à celle de la charge, ce qui est logique puisque les dipôles impliqués sont identiques lors de la charge et de la décharge[8]. La charge est proportionnelle à la tension et varie selon une loi analogue :

$$q_{(t)} = C u_{c\,(t)} = C E_0\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

La tension aux bornes du condensateur, de même que la charge, varient durant le régime transitoire, et tendent toutes les deux, après un temps très long, vers un régime permanent pour lequel leur valeur est constante, en l'occurrence nulle. On est bien dans une phase de **décharge du condensateur** :

$$u_{c\,(t)} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$$
$$q_{(t)} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$$

L'intensité s'obtient à partir de la tension, grâce à la relation entre tension et intensité au niveau du condensateur :

$$i_{(t)} = C\,\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} = -\frac{CE_0}{\tau}\,\mathrm{e}^{-t/\tau} \quad \Rightarrow \quad \boxed{i_{(t)} = -\frac{E_0}{R}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}} \tag{12}$$

Il est maintenant négatif, ce qui signifie qu'il circule en sens inverse de celui choisi. Pendant la décharge, le courant circule en sens inverse à celui qu'il avait lors de la charge. Cela est compréhensible : les électrons accumulés sur une des armatures du condensateur lors de la charge, repartent en sens inverse lors de la décharge pour compenser le déficit d'électrons sur l'autre armature.

L'intensité présente à nouveau une discontinuité lors du passage du régime de charge au régime de décharge. Il tend à s'annuler après un temps très long : $i_{(t)} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$, ce qui correspond à la décharge complète du condensateur.

8. Il n'en serait évidemment pas de même si on déchargeait le condensateur dans un circuit dont la résistance aurait pour valeur $R' \neq R$.

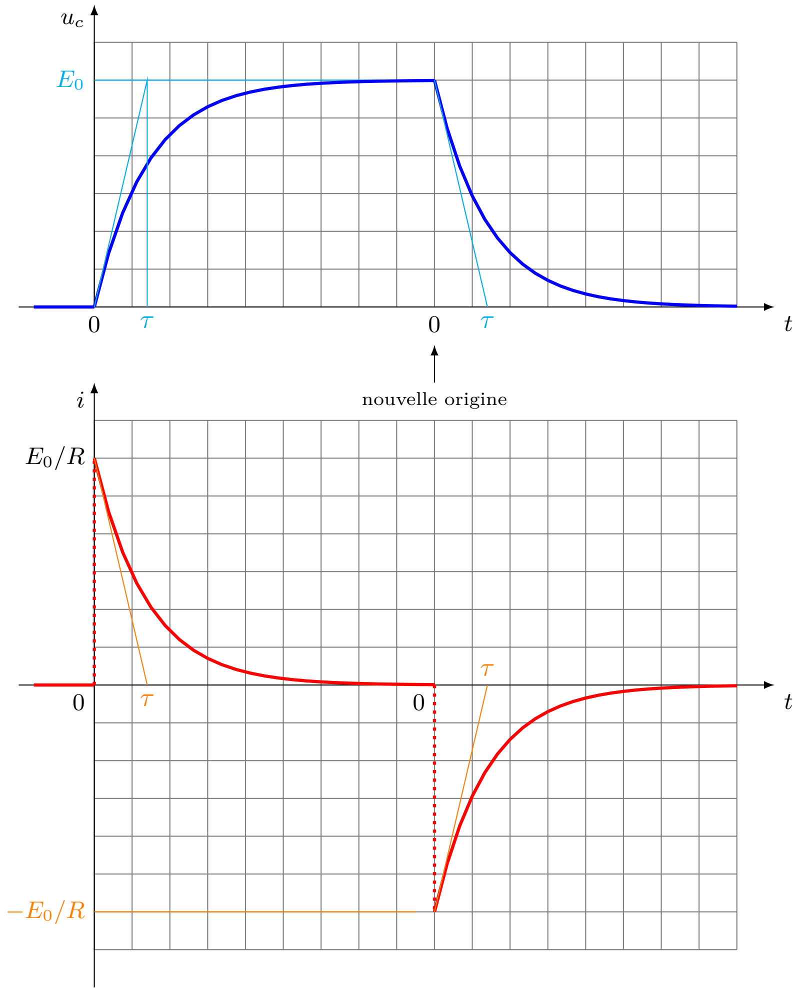


FIGURE 17 – Évolution de u_c et i pendant la charge suivie de la décharge.

3 Bilan d'énergie dans un circuit capacitif

3.1 Établissement de l'équation différentielle par un bilan de puissance

On rappelle que la puissance et l'énergie sont deux grandeurs qui n'ont pas la même signification. Dans un circuit électrique, qu'il s'agisse de celui d'un appareil ou du réseau électrique français, ce qui compte est la puissance : tout l'énergie émise par une source à un instant donné est égale à l'énergie reçue par les récepteurs à cet instant [9]. En d'autres termes, la puissance émise par la source est égale à la puissance reçue par les récepteurs à n'importe quel instant.

3.1.1 Bilan de puissance lors de la charge

Considérons un circuit constitué d'un condensateur de capacité C en série avec un résistor de résistance R, alimenté par une source idéale de tension E_0 (figure 18). Au départ, le circuit est ouvert (interrupteur ouvert) et le consensateur est initialement déchargé. On étudie l'évolution des grandeurs électriques dans le circuit au cours du temps après fermeture de l'interrupteur à la date $t = 0$.

9. C'est la raison pour laquelle on parle toujours de la puissance installée du parc nucléaire français, car ce qui compte n'est pas l'énergie totale que les centrales peuvent fournir pendant un an ou pendant un jour, mais l'énergie totale que les centrales peuvent fournir à la seconde de l'année où la consommation est maximale, générament vers 17 heures le jour d'hiver le plus froid de l'année.

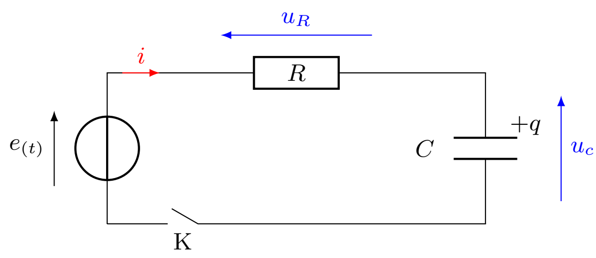


FIGURE 18 – Réalisation expérimentale de la charge d'un condensateur.

Faisons un bilan de puissance. Par conservation de l'énergie, la puissance fournie par le dipôle actif (source de tension) est égale à la puissance reçue par les dipôles passifs (résistor et condensateur). L'intensité étant orientée en convention générateur au niveau de la source de tension, la puissance reçue par celle-ci est $-E_0 i$, donc la puissance fournie par la source est $E_0 i$. D'autre part, la puissance reçue par la résistance est la puissance Joule, soit Ri^2. Enfin, la puissance reçue par le condensateur, sachant que C est une constante, s'écrit : $u_c i = i \times q/C$. Le bilan de puissance est donc :

$$E_0 \times i = R \times i^2 + u_c \times i \Rightarrow E_0 = R \times i + i u_c$$

ce qui conduit à l'équation différentielle (5) vérifiée par la tension aux bornes du condensateur en utilisant la relation entre tension et intensité au niveau du condensateur $i = C\, \mathrm{d}u_c \,/\, \mathrm{d}t$. On peut aussi raisonner avec la charge du condensateur :

$$E_0 \times i = R \times i^2 + \frac{q}{C} \times i \Rightarrow E_0 = R \times i + \frac{q}{C}$$

Comme i est le flux de charge, soit $i = \mathrm{d}q \,/\, \mathrm{d}t$, on parvient à l'équation différentielle (6) vérifiée par q :

$$R \times \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{q}{C} = E_0 \Rightarrow RC \times \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + q = CE_0$$

En remplaçant à l'aide de la relation entre tension et charge au niveau d'un condensateur : $q = Cu_c$, on parvient à l'équation différentielle (5) vérifiée par u_c déjà établie.

3.1.2 Bilan de puissance lors de la décharge

Lors de la décharge, le bilan énergétique est encore plus simple. Comme il n'y a que des dipôles passifs, la puissance totale reçue par ces dipôles est nulle, ce qui permet de retrouver l'équation différentielle (10) déjà établie :

$$R \times i^2 + u_c \times i = 0 \Rightarrow R \times i + u_c = 0 \Rightarrow RC \times \frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} + u_c = 0$$

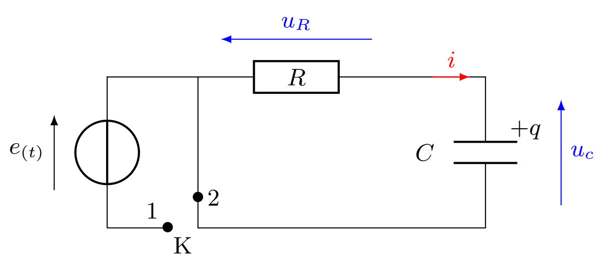


FIGURE 19 – Réalisation expérimentale de la décharge d'un condensateur.

3.2 Bilan énergétique

Considérons à nouveau le cas de la charge du condensateur, initialement déchargé, sous la tension E_0 (figure 18). À l'issue de la charge, la tension aux bornes du condensateur est $u_c = E_0$, comme on l'a montré lors de l'étude de la charge. D'après la relation (4), l'énergie stockée dans le condensateur est alors : $W_c = CE_0^2/2$. On cherche à déterminer quelle est l'énergie que la source a dû fournir pour stocker cette énergie dans le condensateur.

Qualitativement, on peut déjà dire que la source doit fournir au moins l'énergie qui est emmagasinée dans le condensateur à l'issue de la charge. Il est également évident qu'elle doit en fournir davantage, car la charge nécessite de faire circuler un courant à travers la résistance, et que celle-ci dissipe de l'énergie par effet Joule.

On peut raisonner soit sur l'énergie fournie par la source, soit sur l'énergie reçue par la résistance durant la charge. Dans les deux cas, il est indispensable de connaitre l'intensité qui circule ; celle-ci a été déterminée, et varie au cours de la charge selon la loi donnée par (15) : $i_{(t)} = E_0/R\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$. Raisonnons sur la résistance ; elle reçoit une puissance Ri^2, c'est-à-dire que pendant un intervalle de temps infinitésimal dt, elle reçoit une énergie :

$$\delta W_{\text{reçu}\,R} = \mathcal{P}_{\text{reçue}\,R}\,\mathrm{d}t = R \times i_{(t)}^2\,\mathrm{d}t$$

En remplaçant i par son expression, on obtient l'expression de l'énergie infinitésimale reçue pendant dt :

$$\delta W_{\text{reçu}\,R} = \frac{E_0^2}{R}\mathrm{e}^{-2t/\tau}$$

L'énergie totale reçue lors de la charge s'obtient en sommant toutes ces quantités infinitésimales entre le début de la charge et la fin de la charge, soit entre l'instant initial et un temps très long. En pratique, ce temps très long peut être pris égal à l'infini. En effet, comme l'intensité i tend vers 0, la quantité $i^2\,\mathrm{d}t$ devient négligeable au bout de quelques τ, et l'énergie reçue au-delà de cette date devient totalement négligeable. En conséquence, l'énergie totale reçcue par la résistance au cours de la charge complète est :

$$W_{\text{reçue}\,R} = \int_0^\infty \frac{E_0^2}{R}\mathrm{e}^{-2t/\tau}\ \mathrm{d}t = \frac{E_0^2}{R} \times \int_0^\infty \mathrm{e}^{-2t/\tau}\ \mathrm{d}t = \frac{E_0^2}{R} \times \left[\frac{\mathrm{e}^{-2t/\tau}}{-2/\tau}\right]_0^\infty = \frac{E_0^2}{R} \times \frac{0-1}{-2/\tau} = \frac{E_0^2\tau}{2R}$$

En remplaçant $\tau = RC$ dans l'expression précédente, l'énergie reçue par la résistance et dissipée par effet Joule au cours de la charge est donc :

$$W_{\text{reçue}R} = \frac{CE_0^2}{2}$$

On constate que, quelles que soient les valeurs de R et C, l'énergie dissipée par effet Joule à travers la résistance durant la charge est égale à l'énergie stockée dans le condensateur à la fin de la charge. Comme ces deux énergies sont fournies par la source de tension, on en déduit d'une part que celle-ci fournit une énergie égale à CE_0^2 durant la charge, et d'autre part que la moitié de cette énergie est stockée tandis que l'autre moitié est perdue sous forme de chaleur. Si on cherche à stocker de l'énergie électrique dans le condensateur, le rendement est donc de 50%.

On peut aussi raisonner sur l'énergie fournie par la source. On sait que la puissance fournie par la source est $E_0 \times i$. En conséquence, l'énergie fournie par la source durant un intervalle de temps infinitésimal est :

$$\delta W_{\text{fournie source}} = E_0 \times i\ \mathrm{d}t = \frac{E_0^2}{R} \times \mathrm{e}^{-t/\tau}\ \mathrm{d}t$$

En intégrant durant toute la charge, soit entre 0 et un temps infini, on obtient l'énergie totale fournie :

$$W_{\text{fournie source}} = \int_0^\infty \frac{E_0^2}{R}\mathrm{e}^{-t/\tau}\ \mathrm{d}t = \frac{E_0^2}{R} \times \left[\frac{\mathrm{e}^{-t/\tau}}{-2/\tau}\right]_0^\infty = \frac{E_0^2}{R} \times \frac{0-1}{-1/\tau} = \frac{E_0^2\tau}{R}$$

ce qui, en remplaçant τ par sa valeur, conduit bien à l'expression déjà trouvée $W_{\text{fournie source}} = CE_0^2$.