BCPST1
A. Panetta

Devoir maison n°1
A rendre pour le vendredi 15 septembre 2023

Exercice 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on appelle n-ème nombre de Fermat le nombre

$$F_n = 2^{2^n} + 1.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$F_0 \times F_1 \times \cdots \times F_{n-1} = F_n - 2.$$

2. Soient k, n deux entiers naturels tels que $0 \leqslant k < n$. Dans cette question, on suppose qu'il existe un nombre premier p qui divise F_k et F_n.
   (a) En utilisant le résultat de la question précédente, montrer que p divise 2.
   (b) En déduire que $p = 2$.
   (c) Aboutir à une contradiction. Qu'a-t-on ainsi démontré ?

Exercice 2. On considère la suite de Fibonacci $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 & = & 0 \\ u_1 & = & 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} & = & u_{n+1} + u_n. \end{cases}$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant \left(\frac{5}{3}\right)^n$.

Exercice 3. Déterminer toutes les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (f(x))^2.$$