

Feuille d'entraînement – Été 2026

Révisions de calcul avant l'entrée en BCPST1

Ces exercices visent à réviser et à consolider les techniques de calcul vues au lycée (seconde, première, spécialité mathématiques, mathématiques complémentaires). L'objectif est que vous arriviez en septembre avec des automatismes solides, afin de ne pas être freinés par les aspects techniques lorsque nous aborderons des notions plus complexes et abstraites. Le niveau exigé en prépa sera évidemment bien supérieur à celui de cette feuille. Travaillez ces exercices à la main, sans calculatrice. Bon courage !

Exercice 1. (*Calcul numérique et puissances*)

1. Calculer et simplifier :

(a) $\frac{2}{3} - \frac{3}{4} \times \frac{5}{6}$

(b) $\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}$

(c) $\frac{2^5 \times 3^{-2}}{2^3 \times 3^{-4}}$.

2. Écrire le plus simplement possible (avec $a > 0$, $b > 0$) :

(a) $\frac{a^3 b^{-2}}{a^{-1} b^4}$

(b) $\sqrt{50} - \sqrt{18} + \sqrt{8}$

(c) $\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} - 1}$ (rendre le résultat sans racine au dénominateur).

Exercice 2. (*Calcul littéral et identités remarquables*)

1. Développer, réduire et ordonner :

(a) $(2x - 3)^2 - (x + 1)(x - 1)$

(b) $(x + 2)^3$

(c) $(x - 1)(x^2 + x + 1)$.

2. Factoriser :

(a) $x^2 - 9$

(b) $4x^2 - 12x + 9$

(c) $x^3 - x$

(d) $(x + 1)^2 - (2x - 3)^2$.

3. Simplifier la fraction $\frac{x^2 - 4}{x^2 - x - 2}$ en précisant les valeurs interdites.

Exercice 3. (*Second degré*)

1. Mettre sous forme canonique, puis déterminer les racines (si elles existent) :

- (a) $x^2 - 6x + 5$
- (b) $2x^2 + 4x + 5$
- (c) $-x^2 + 3x + 4$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$:

- (a) $x^2 - 5x + 6 = 0$
- (b) $x^2 + x - 1 = 0$
- (c) $x^2 - 2x + 3 > 0$.

3. Étudier le signe de $f(x) = -2x^2 + x + 1$ selon les valeurs de x .

Exercice 4. (*Logarithme et exponentielle*)

1. Exprimer en fonction de $\ln 2$, $\ln 3$ et $\ln 5$:

- (a) $\ln(45)$
- (b) $\ln\left(\frac{8}{15}\right)$
- (c) $\ln(\sqrt{6})$.

2. Simplifier :

- (a) $e^{2\ln 3}$
- (b) $\ln(e^3) - \ln(\sqrt{e})$
- (c) $e^{\ln 2 + \ln 5}$.

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ (ou dans le domaine adéquat) :

- (a) $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$ (*on posera $X = e^x$*)
- (b) $\ln(x) + \ln(x - 1) = \ln(6)$
- (c) $e^{-x+1} \geq 1$.

Exercice 5. (*Fonctions et dérivation*)

1. Donner le domaine de dérivation, puis calculer la dérivée des fonctions définies par :

- (a) $f(x) = (3x^2 - x + 1)e^x$
- (b) $g(x) = \frac{x-1}{x+2}$
- (c) $h(x) = \ln(x^2 + 1)$
- (d) $k(x) = \sqrt{x}(x - 2)$.

2. Soit $f : x \mapsto x^3 - 3x + 1$ définie sur $\mathbb{R}$. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

3. (*Étude de fonction complète*) Soit g définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $g(x) = \frac{2x-1}{x-1}$.

- (a) Déterminer les limites de g aux bornes de son domaine (en $\pm\infty$ et en 1).
- (b) En déduire les asymptotes éventuelles de la courbe représentative de g .
- (c) Calculer $g'(x)$ et étudier son signe.
- (d) Dresser le tableau de variations complet de g .

Exercice 6. (*Suites*)

1. Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $r = 2$.

(a) Exprimer u_n en fonction de n .

(b) Calculer $\sum_{k=0}^n u_k$.

2. Soit (v_n) la suite géométrique de premier terme $v_0 = 1$ et de raison $q = \frac{1}{2}$.

(a) Exprimer v_n en fonction de n .

(b) Calculer $\sum_{k=0}^n v_k$, puis déterminer sa limite quand $n \rightarrow +\infty$.

3. Soit (w_n) définie par $w_0 = 1$ et $w_{n+1} = 2w_n + 1$. On pose $t_n = w_n + 1$. Montrer que (t_n) est géométrique, puis exprimer w_n en fonction de n .

Exercice 7. (*Intégration*) Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_0^2 (3x^2 - 2x + 1) dx$

2. $\int_1^e \frac{1}{x} dx$

3. $\int_0^1 e^{2x} dx$

4. $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

5. $\int_0^1 \frac{x}{x^2 + 1} dx$.

Exercice 8. (*Équations différentielles*) Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' = 3y$

2. $y' = -2y + 4$

3. $y' = y$ avec la condition initiale $y(0) = 5$.

Exercice 9. (*Algorithmique et programmation Python*)

On considère la fonction suivante :

```
def mystere(n):  
    s = 0  
    for k in range(1, n + 1):  
        s = s + k  
    return s
```

1. Que renvoie `mystere(4)` ? Détailler les valeurs successives de `s`.

2. Plus généralement, que calcule `mystere(n)` ? Donner une formule en fonction de n .

Exercice 10. (*Trigonométrie*)

1. Donner les valeurs exactes de $\cos(\frac{\pi}{6})$, $\sin(\frac{\pi}{4})$, $\cos(\frac{2\pi}{3})$ et $\sin(\frac{5\pi}{6})$.

2. Simplifier :

(a) $\cos(\pi - x) + \cos(x)$

(b) $\sin(\frac{\pi}{2} - x) + \cos(\pi + x)$.

3. Résoudre dans $[0, 2\pi]$:

(a) $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(b) $\sin(x) = -\frac{1}{2}$

(c) $2\cos(x) - 1 \geq 0$.

Exercice 11. (*Géométrie vectorielle et produit scalaire*) On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé. On considère les points $A(1, 2)$, $B(4, 3)$ et $C(2, -1)$.

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

2. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$. Que peut-on en déduire sur le triangle ABC ?

3. Calculer les longueurs AB et AC . Le triangle est-il isocèle ?

4. Déterminer les coordonnées du point D tel que $ABDC$ soit un parallélogramme (c'est-à-dire $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$).

5. Les points A , B et $E(7, 4)$ sont-ils alignés ? (On étudiera la colinéarité de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$.)

6. Calculer l'aire du triangle ABC .

Exercice 12. (*Probabilités conditionnelles*) Une usine fabrique des composants électroniques sur deux chaînes. La chaîne A produit 60% des composants, la chaîne B les 40% restants. On constate que 3% des composants issus de A sont défectueux, contre 5% de ceux issus de B . On prélève un composant au hasard. On note A (resp. B) l'événement « le composant vient de la chaîne A (resp. B) » et D l'événement « le composant est défectueux ».

1. Traduire les données de l'énoncé en termes de probabilités, puis construire un arbre pondéré.

2. Calculer la probabilité que le composant vienne de A et soit défectueux.

3. Montrer, à l'aide de la formule des probabilités totales, que $P(D) = 0,038$.

4. Le composant prélevé est défectueux. Quelle est la probabilité qu'il provienne de la chaîne B ? (On donnera une valeur arrondie au centième.)

5. Les événements A et D sont-ils indépendants ? Justifier.