

Corrigé – Feuille d’entraînement – Été 2026

Exercice 1. (Calcul numérique et puissances)

1. (a) $\frac{2}{3} - \frac{5}{8} = \frac{16-15}{24} = \frac{1}{24}$.
 (b) $\frac{\frac{5}{6}}{\frac{1}{6}} = 5$.
 (c) $\frac{2^5 \times 3^{-2}}{2^3 \times 3^{-4}} = 2^2 \times 3^2 = 36$.
2. (a) $\frac{a^3 b^{-2}}{a^{-1} b^4} = a^4 b^{-6} = \frac{a^4}{b^6}$.
 (b) $5\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$.
 (c) $\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}+1}{2} = \frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{3}+3}{6} = \frac{5\sqrt{3}+3}{6}$.

Exercice 2. (Calcul littéral)

1. (a) $(2x-3)^2 - (x^2-1) = 4x^2 - 12x + 9 - x^2 + 1 = 3x^2 - 12x + 10$.
 (b) $(x+2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$.
 (c) $(x-1)(x^2+x+1) = x^3 - 1$.
2. (a) $x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$.
 (b) $4x^2 - 12x + 9 = (2x-3)^2$.
 (c) $x^3 - x = x(x-1)(x+1)$.
 (d) $(x+1)^2 - (2x-3)^2 = ((x+1)-(2x-3))((x+1)+(2x-3)) = (-x+4)(3x-2)$.
3. $\frac{x^2-4}{x^2-x-2} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+1)} = \frac{x+2}{x+1}$ pour $x \neq 2$ et $x \neq -1$.

Exercice 3. (Second degré)

1. (a) $x^2 - 6x + 5 = (x-3)^2 - 4$; racines 1 et 5.
 (b) $2x^2 + 4x + 5 = 2((x+1)^2 + \frac{3}{2})$; pas de racine réelle ($\Delta = -24 < 0$).
 (c) $-x^2 + 3x + 4 = -((x-\frac{3}{2})^2 - \frac{25}{4})$; racines -1 et 4 .
2. (a) $x \in \{2, 3\}$.
 (b) $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.
 (c) $\Delta = 4 - 12 < 0$ et coefficient dominant > 0 : vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. $\Delta = 1 + 8 = 9$, racines $x = -\frac{1}{2}$ et $x = 1$. Comme le coefficient dominant est $-2 < 0$: $f(x) < 0$ sur $] -\infty, -\frac{1}{2}[\cup]1, +\infty[$, $f(x) > 0$ sur $] -\frac{1}{2}, 1[$.

Exercice 4. (Log et exp)

1. (a) $\ln 45 = \ln(3^2 \times 5) = 2 \ln 3 + \ln 5$.
 (b) $\ln \frac{8}{15} = 3 \ln 2 - \ln 3 - \ln 5$.
 (c) $\ln \sqrt{6} = \frac{1}{2}(\ln 2 + \ln 3)$.
2. (a) $e^{2 \ln 3} = 9$.

- (b) $\ln(e^3) - \ln(\sqrt{e}) = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$.
 (c) $e^{\ln 2 + \ln 5} = 10$.
3. (a) Avec $X = e^x : X^2 - 3X + 2 = 0$, $X \in \{1, 2\}$, donc $x = 0$ ou $x = \ln 2$.
 (b) Domaine $x > 1$. $\ln(x(x-1)) = \ln 6 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x \in \{3, -2\}$. Seule $x = 3$ convient.
 (c) $-x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$.

Exercice 5. (Dérivation)

1. (a) $D = \mathbb{R} ; f'(x) = (3x^2 + 5x)e^x = x(3x + 5)e^x$.
 (b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\} ; g'(x) = \frac{3}{(x+2)^2}$.
 (c) $D = \mathbb{R} ; h'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$.
 (d) $D = [0, +\infty[$, dérivable sur $]0, +\infty[; k'(x) = \frac{3x-2}{2\sqrt{x}}$.
2. $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$. f croissante sur $] -\infty, -1]$, décroissante sur $[-1, 1]$, croissante sur $[1, +\infty[$. Maximum local $f(-1) = 3$, minimum local $f(1) = -1$.
3. Étude de $g(x) = \frac{2x-1}{x-1}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
 (a) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = 2$ (rapport des termes dominants). En 1 : le numérateur tend vers 1 > 0, donc $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = +\infty$.
 (b) Asymptote horizontale $y = 2$ en $\pm\infty$ et asymptote verticale $x = 1$.
 (c) $g'(x) = \frac{2(x-1) - (2x-1)}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2} < 0$ pour tout $x \neq 1$.
 (d) g est strictement décroissante sur $] -\infty, 1[$ et sur $]1, +\infty[$ (de 2 vers $-\infty$, puis de $+\infty$ vers 2).

Exercice 6. (Suites)

1. (a) $u_n = 3 + 2n$. (b) $\sum_{k=0}^n u_k = (n+1) \frac{u_0 + u_n}{2} = (n+1)(n+3)$.
2. (a) $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$. (b) $\sum_{k=0}^n v_k = \frac{1 - (1/2)^{n+1}}{1 - 1/2} = 2(1 - (1/2)^{n+1}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2$.
3. $t_{n+1} = w_{n+1} + 1 = 2w_n + 2 = 2(w_n + 1) = 2t_n$, donc (t_n) est géométrique de raison 2 avec $t_0 = 2$. Ainsi $t_n = 2^{n+1}$ et $w_n = 2^{n+1} - 1$.

Exercice 7. (Intégration)

1. $[x^3 - x^2 + x]_0^2 = 8 - 4 + 2 = 6$.
 2. $[\ln x]_1^e = 1$.
 3. $[\frac{1}{2}e^{2x}]_0^1 = \frac{e^2 - 1}{2}$.
 4. $[2\sqrt{x}]_1^4 = 4 - 2 = 2$.
 5. $[\frac{1}{2}\ln(x^2 + 1)]_0^1 = \frac{\ln 2}{2}$.

Exercice 8. (*Équations différentielles*)

1. $\forall x \in \mathbb{R}, y(x) = \lambda e^{3x}, \lambda \in \mathbb{R}.$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, y(x) = \lambda e^{-2x} + 2, \lambda \in \mathbb{R}.$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, y(x) = \lambda e^x$ avec $y(0) = 5$, donc $y(x) = 5e^x.$

Exercice 9. (*Algorithmique*)

1. `s` prend successivement les valeurs 0, 1, 3, 6, 10 ; donc `mystere(4)` renvoie 10.
2. La fonction calcule la somme des entiers de 1 à n , c'est-à-dire $\frac{n(n+1)}{2}.$

Exercice 10. (*Trigonométrie*)

1. $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}, \sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}.$
2. (a) $\cos(\pi - x) + \cos x = -\cos x + \cos x = 0.$ (b) $\sin(\frac{\pi}{2} - x) + \cos(\pi + x) = \cos x - \cos x = 0.$
3. (a) $x \in \{\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\}.$
 (b) $x \in \{\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\}.$
 (c) $\cos x \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in [0, \frac{\pi}{3}] \cup [\frac{5\pi}{3}, 2\pi].$

Exercice 11. (*Géométrie vectorielle*)

1. $\overrightarrow{AB} = (3, 1), \overrightarrow{AC} = (1, -3).$
2. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3 \times 1 + 1 \times (-3) = 0$: le triangle ABC est rectangle en A .
3. $AB = \sqrt{10}, AC = \sqrt{10}$: il est isocèle en A (donc rectangle isocèle).
4. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ donne $\overrightarrow{CD} = (3, 1)$, soit $D = (2 + 3, -1 + 1) = (5, 0).$
5. $\overrightarrow{AE} = (6, 2) = 2\overrightarrow{AB}$: les vecteurs sont colinéaires, donc A, B, E sont alignés.
6. Aire = $\frac{1}{2} AB \times AC = \frac{1}{2} \sqrt{10} \sqrt{10} = 5$ (le triangle étant rectangle en A).

Exercice 12. (*Probabilités conditionnelles*)

1. $P(A) = 0,6, P(B) = 0,4, P_A(D) = 0,03, P_B(D) = 0,05.$
2. $P(A \cap D) = P(A) P_A(D) = 0,6 \times 0,03 = 0,018.$
3. $P(D) = P(A) P_A(D) + P(B) P_B(D) = 0,018 + 0,4 \times 0,05 = 0,018 + 0,020 = 0,038.$
4. $P_D(B) = \frac{P(B \cap D)}{P(D)} = \frac{0,020}{0,038} \approx 0,53.$
5. $P(A) P(D) = 0,6 \times 0,038 = 0,0228 \neq 0,018 = P(A \cap D)$: les événements ne sont *pas* indépendants.