Corrigé de la liste d'exercices n°1 — Logique

Exercice 1.

1. $\exists M \geqslant 0, \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leqslant M$.
   Négation : la fonction f n'est pas bornée ou $\forall M \geqslant 0, \exists x \in \mathbb{R}, |f(x)| > M$.
2. $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$.
   Négation : la fonction f est la fonction nulle ou $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$.
   Négation : la fonction f s'annule au moins une fois ou $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$.
4. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leqslant y \Rightarrow f(x) \geqslant f(y)$.
   Négation : la fonction f n'est pas décroissante ou $\exists (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leqslant y, f(x) < f(y)$.
5. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geqslant f(2)$.
   Négation : la fonction f n'admet pas de minimum global en 2 ou $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) < f(2)$.

Exercice 2.

1. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x < y, \exists r \in \mathbb{Q} \cap]x, y[$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, n \geqslant x$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}, \lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x$.

Exercice 3.

1. Vrai (il suffit de prendre $x = -1$).
2. Vrai (il suffit de prendre $x = -1$).
3. Vrai (il suffit de prendre $y = x + 1$).
4. Faux (il suffit de prendre $y = 0$ et $x = 1$).

Exercice 4.

1. Faux car la négation est vraie : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y \leqslant 0$ (prendre $y \leqslant -x$).
2. Faux pour $x = 0$ car si $y > 0$, on a $-y < 0$. La négation est donc vraie, à savoir
$$\exists x \in \mathbb{R}_+, \forall y \in \mathbb{R}_+, x + y \leqslant 0 \,\text{ou}\, x - y < 0.$$
3. Faux si $x < 0$ et $y < 0$. La négation est donc vraie, à savoir
$$\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y < 0 \,\text{et}\, xy > 0.$$

Exercice 5.

1. $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) < 0$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$.
3. $\forall a \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, |f(x)| > a$.
4. $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0, |u_n - L| > \varepsilon$.

Exercice 6. L'implication $Q \Rightarrow P$ est toujours vraie. En revanche, la réciproque est fausse. Par exemple, si $F = \{f_1 : x \mapsto x, f_2 : x \mapsto x + 1\}$, on a pour tout $f \in F, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$ (donc P est vérifiée) mais Q est fausse : en effet, f_1 et f_2 ne s'annulent jamais simultanément.

Exercice 7. Soit x un nombre irrationnel positif.
Supposons par l'absurde que $\sqrt{x}$ est rationnel i.e. $\exists (p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, \sqrt{x} = \dfrac{p}{q}$.
Alors $x = \dfrac{p^2}{q^2}$, donc x est rationnel, ce qui est absurde.
Nécessairement, $\sqrt{x}$ est irrationnel.

Exercice 8. • Si $A = B$, il est clair que $A = A \cup B = A \cap B$.
• Supposons que $A \cup B = A \cap B$.
Montrons que $A \subset B$.
Soit $x \in A$. Puisque $A \subset A \cup B, x \in A \cup B$. Or, par hypothèse, $A \cup B = A \cap B$, donc $x \in A \cap B$.
A fortiori $x \in B$, ce qui prouve que $A \subset B$.
Par symétrie, on montre de même que $B \subset A$, d'où $A = B$.
On a bien montré par double implication que $A = B \Leftrightarrow A \cup B = A \cap B$.

Exercice 9.

1. (a) $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A \cap (B \cup \overline{B}) = A \cap E = A$.
   (b) $\overline{A \cup \overline{B}} = \overline{A} \cap \overline{\overline{B}} = \overline{A} \cap B = B \setminus A$.
2.

$$\begin{aligned}
\overline{B} \cup \left(\overline{\overline{\overline{A} \cap B} \cap \overline{A}} \right) &= \overline{B} \cup \big((\overline{A} \cap B) \cup A \big) \\
&= \overline{B} \cup ((\overline{A} \cup A) \cap (B \cup A)) \\
&= \overline{B} \cup (E \cap (B \cup A)) \\
&= \overline{B} \cup B \cup A \\
&= E.
\end{aligned}$$

Exercice 10. • Si $A = B$, il est clair que $A \cap C = B \cap C$ et $A \cup C = B \cup C$.
• Réciproquement, supposons que $A \cap C = B \cap C$ et $A \cup C = B \cup C$.
Montrons que $A \subset B$.
Soit $x \in A$. Puisque $A \subset A \cup C$, alors $x \in A \cup C$. Or par hypothèse, $A \cup C = B \cup C$ donc $x \in B \cup C$.
Supposons par l'absurde que $x \notin B$. Nécessairement, $x \in C$, donc $x \in A \cap C$. Or, par hypothèse, $A \cap C = B \cap C$, donc $x \in B \cap C$. A fortiori, $x \in B$, ce qui est absurde.
On a donc forcément $x \in B$, ce qui prouve que $A \subset B$.
Par symétrie des rôles joués par A et B, on montre de même que $B \subset A$, d'où $A = B$.
On a donc bien montré par double implication que $A = B$ si et seulement si $A \cap C = B \cap C$ et $A \cup C = B \cup C$.

Exercice 11. • Montrons que $A \subset B$.
Soit $(x, y) \in A$, i.e. $4x - y = 1$.
Posons $t = x - 1$. On a bien $x = t + 1$ et $y = 4x - 1 = 4(t + 1) - 1 = 4t + 3$ donc il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $x = t + 1$ et $y = 4t + 3$, ce qui prouve que $(x, y) \in B$ d'où l'inclusion $A \subset B$.
• Montrons que $B \subset A$.
Soit $(x, y) \in B$. Par définition de B, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $x = t + 1$ et $y = 4t + 3$.
On a alors $4x - y = 4(t+1) - (4t+3) = 1$, ce qui prouve que $(x, y) \in A$ d'où l'inclusion $B \subset A$.
Finalement, on a bien l'égalité $A = B$.

Exercice 12. Nous allons raisonner par analyse-synthèse.

1. • **Analyse :** Soit X une partie de E telle que $A \cup X = E$.

Pour tout $x \in E, x \in A$ ou $x \in X$ donc si $x \notin A$, alors $x \in X$. Ainsi, si $x \in \overline{A}$, alors $x \in X$, ce qui prouve que $\overline{A} \subset X$.

• **Synthèse :** Supposons que X est une partie de E telle que $\overline{A} \subset X$. Montrons que $A \cup X = E$.

L'inclusion $A \cup X \subset E$ est immédiate. Il suffit de montrer que $E \subset A \cup X$.

Soit $x \in E$. Il y a deux cas :

- Si $x \in A$, alors $x \in A \cup X$.
- Si $x \notin A$, alors $x \in \overline{A}$. Or, $\overline{A} \subset X$ donc $x \in X$. A fortiori, $x \in A \cup X$.

Dans les deux cas, $x \in A \cup X$, ce qui prouve que $E \subset A \cup X$.

Finalement, on a bien l'égalité $A \cup X = E$ si et seulement si $\overline{A} \subset X$.

2. Vu en cours.
3. Vu en cours.

Exercice 13.

1. On a $B\Delta A = (B \setminus A) \cup (A \setminus B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A\Delta B$.
2. $A\Delta B = (A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A}) = (A\cup B)\cap(A\cup\overline{A})\cap(\overline{B}\cup B)\cap(\overline{B}\cup\overline{A}) = (A\cup B)\cap(\overline{A\cap B}) = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B})$.
3. • $A\Delta\emptyset = (A \setminus \emptyset) \cup (\emptyset \setminus A) = A \cup \emptyset = A$.
   • $A\Delta A = (A \setminus A) \cup (A \setminus A) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$.
   • $A\Delta E = (A \setminus E) \cup (E \setminus A) = \emptyset \cup \overline{A} = \overline{A}$.
   • Supposons que $A \subset B$. Alors
   $$A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \emptyset \cup (B \setminus A) = B \setminus A.$$
4. $$\begin{aligned}(A\Delta B) \cup (A\Delta\overline{B}) &= [(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B})] \cup [(A \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup B)] \\ &= E \cap E \cap E \cap E \\ &= E.\end{aligned}$$
5. (a) On a
   $$\begin{aligned}A\Delta(B\Delta C) &= (A \cup (B\Delta C)) \cap (\overline{A} \cup \overline{B\Delta C}) \\ &= [A \cup (B \cap \overline{C}) \cup (\overline{B} \cap C)] \cap [\overline{A} \cup \overline{(B \cup C) \cap (\overline{B} \cup \overline{C})}] \\ &= [A \cup (B \cap \overline{C}) \cup (\overline{B} \cap C)] \cap [\overline{A} \cup (\overline{B} \cap \overline{C}) \cup (B \cap C)] \\ &= (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (A \cap B \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C).\end{aligned}$$

   De même, $(A\Delta B)\Delta C = C\Delta(B\Delta A)$ donc en échangeant A et C par rapport au calcul précédent, on obtient

   $$(A\Delta B)\Delta C = (C \cap \overline{B} \cap \overline{A}) \cup (C \cap B \cap A) \cup (\overline{C} \cap B \cap \overline{A}) \cup (\overline{C} \cap \overline{B} \cap A) = A\Delta(B\Delta C).$$

   (b)
   $$\begin{aligned}(A \cap B)\Delta(A \cap C) &= [(A \cap B) \cap \overline{A \cap C}] \cup [\overline{A \cap B} \cap (A \cap C)] \\ &= [(A \cap B) \cap (\overline{A} \cup \overline{C})] \cup [(\overline{A} \cup \overline{B}) \cap (A \cap C)] \\ &= (A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \\ &= A \cap [(B \cap \overline{C}) \cup (\overline{B} \cap C)] \\ &= A \cap (B\Delta C).\end{aligned}$$

Exercice 14. Supposons qu'il existe E et F deux parties de $\mathbb{R}$ telles que $\mathcal{D} = E \times F$.
Le point $(1, 0) \in \mathcal{D}$ donc $1 \in E$. De même, $(0, 1) \in \mathcal{D}$ donc $1 \in F$.
Ainsi, $(1, 1) \in E \times F = \mathcal{D}$. Or, $1^2 + 1^2 > 1$ donc $(1, 1) \notin \mathcal{D}$. On aboutit donc à une contradiction, ce qui prouve que $\mathcal{D}$ ne peut pas s'écrire comme le produit cartésien de deux parties de $\mathbb{R}$.

Exercice 15. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} > u_n$.
Initialisation :
On a $u_0 = -1$ et $u_1 = e^{u_0} = e^{-1}$ donc on a bien $u_1 > u_0$, ce qui prouve la propriété au rang $n = 0$.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que la propriété est vraie au rang n, i.e. $u_{n+1} > u_n$. Montrons que la propriété est vraie au rang $n + 1$, i.e. $u_{n+2} > u_{n+1}$.
Par hypothèse de récurrnce, on a $u_{n+1} > u_n$. Par stricte croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, il vient

$$e^{u_{n+1}} > e^{u_n} \Leftrightarrow u_{n+2} > u_{n+1},$$

ce qui prouve la propriété au rang $n + 1$.
D'après le principe de récurrence, on a bien pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} > u_n$, ce qui prouve que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

Exercice 16.

1. Pour $n = 0$, $u_1 = u_0 + 7 = 8 = 2^3$.
   Pour $n = 1, u_2 = u_1 + 3 \times 4 + 7 = 27 = 3^3$.
   Pour $n = 2, u_3 = u_2 + 6 \times 5 + 7 = 64 = 4^3$.
   On conjecture que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = (n + 1)^3$.
2. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = (n + 1)^3$.
   Initialisation : Pour $n = 0$, on a $u_0 = 1 = (0 + 1)^3$, ce qui vérifie la propriété au rang $n = 0$.
   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n = (n + 1)^3$. Montrons que $u_{n+1} = (n + 2)^3$.
   Par définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a

   $$u_{n+1} = u_n + 3n(n + 3) + 7.$$

   Or, par hypothèse de récurrence, $u_n = (n + 1)^3$ donc

   $$u_{n+1} = (n+1)^3+3n(n+3)+7 = (n^3+3n^2+3n+1)+3n^2+9n+7 = n^3+6n^2+12n+8 = (n+2)^3,$$

   ce qui prouve la propriété au rang $n + 1$.
   D'après le principe de récurrence, on a bien pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = (n + 1)^3$.

Exercice 17. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, 17 divise $u_n = 3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$.
Initialisation : Pour $n = 0$, on a $u_0 = 3 \times 5 + 2 = 17$ donc 17 divise bien u_0.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que 17 divise $u_n = 3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$, i.e. il existe $d \in \mathbb{N}$ tel que $17d = 3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$.
Montrons que 17 divise $u_{n+1} = 3 \times 5^{2(n+1)+1} + 2^{3(n+1)+1} = 3 \times 5^{2n+3} + 2^{3n+4}$.
Par hypothèse de récurrence, on a

$$3 \times 5^{2n+1} = u_n - 2^{3n+1} = 17d - 2^{3n+1}$$

donc

$$3 \times 5^{2n+3} = 3 \times 5^{2n+1} \times 5^2 = 25(17d - 2^{3n+1}).$$

Ainsi, $u_{n+1} = 3 \times 5^{2n+3} + 2^{3n+4} = 25 \times 17d - 25 \times 2^{3n+1} + 2^{3n+1} \times 2^3 = 25 \times 17d + 2^{3n+1}(8 - 25)$ d'où $u_{n+1} = 17(25d - 2^{3n+1})$, ce qui prouve que 17 divise u_{n+1}.
D'après le principe de récurrence, on a bien montré que pour tout $n \in \mathbb{N}, 17$ divise u_n.

Exercice 18. Par définition, on a $u_2 = 2u_1^2 - u_0 = 2\cos^2(\theta) - 1 = \cos(2\theta)$.
On peut donc conjecturer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = \cos(n\theta)$.
Montrons cette propriété par récurrence de pas double.
Initialisation : On a $u_0 = 1 = \cos(0 \times \theta)$ et $u_1 = \cos(1 \times \theta)$ donc la propriété est vraie aux rangs $n = 0$ et $n = 1$.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n = \cos(n\theta)$ et $u_{n+1} = \cos((n+1)\theta)$.
Montrons que $u_{n+2} = \cos((n+2)\theta)$.
Par définition, on a

$$u_{n+2} = 2u_1 u_{n+1} - u_n = 2\cos(\theta)\cos((n+1)\theta) - \cos(n\theta).$$

Or, $\cos((n+2)\theta) + \cos(n\theta) = \cos((n+1)\theta + \theta) + \cos((n+1)\theta - \theta) = 2\cos(\theta)\cos((n+1)\theta)$.
Ainsi, $u_{n+2} = 2\cos(\theta)\cos((n+1)\theta) - \cos(n\theta) = \cos((n+2)\theta)$, ce qui prouve la propriété au rang $n + 2$.
D'après le principe de récurrence de pas double, on a bien montré que

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n = \cos(n\theta).$$

Exercice 19. Raisonnons par analyse-synthèse.
Analyse :
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel $x, f(x) + xf(1-x) = 1 + x$.
En appliquant cette égalité fonctionnelle à $1 - x$, on a pour tout réel x,

$$f(1-x) + (1-x)f(1-(1-x)) = 1 + 1 - x,$$

i.e.

$$f(1-x) = (x-1)f(x) + 2 - x.$$

En injectant cette valeur de $f(1-x)$ dans la première équation fonctionnelle, on trouve que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) + x(x-1)f(x) + 2x - x^2 = 1 + x$$

d'où pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x)(x^2 - x + 1) = x^2 - x + 1$$

ou encore pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(x^2 - x + 1)(f(x) - 1) = 0.$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 \neq 0$ (c'est un trinôme du second degré de discriminant strictement négatif).
On en déduit que nécessairement pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = 1$, i.e. f est nécessairement la fonction constante égale à 1.
Synthèse : Soit f la fonction constante égale à 1.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a bien $f(x) + xf(1-x) = 1 + x$.
On en conclut que l'unique fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui vérifie pour tout réel $x, f(x) + xf(1-x) = 1 + x$ est la fonction constante égale à 1.