# Corrigé du devoir maison n°1

## Exercice 1.

1. Montrons le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.
   • **Initialisation :** Pour $n = 1$, on a $F_0 \times F_1 \times \cdots \times F_{n-1} = F_0$.
   Or, $F_0 = 2^{2^0} + 1 = 2^1 + 1 = 3$ et $F_1 = 2^{2^1} + 1 = 2^2 + 1 = 5$ donc $F_0 = F_1 - 2$, ce qui prouve la propriété au rang $n = 1$.
   • **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que la propriété est vraie au rang $n$, i.e.
   $$F_0 \times F_1 \times \cdots \times F_{n-1} = F_n - 2.$$
   Montrons la propriété au rang $n + 1$, i.e. vérifions que $F_0 \times F_1 \times \cdots \times F_n = F_{n+1} - 2$.
   Par hypothèse de récurrence, $F_0 \times F_1 \times \cdots \times F_{n-1} = 2^{2^n} + 1 - 2 = 2^{2^n} - 1$ donc
   $$\begin{aligned} F_0 \times F_1 \times \cdots \times F_{n-1} \times F_n &= (2^{2^n} - 1)(2^{2^n} + 1) \\ &= (2^{2^n})^2 - 1 \\ &= 2^{2^n \times 2} - 1 \\ &= 2^{2^{n+1}} + 1 - 2 \\ &= F_{n+1} - 2, \end{aligned}$$
   ce qui prouve la formule au rang $n + 1$.
   D'après le principe de récurrence, on a bien montré que
   $$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n \in \mathbb{N}^*, F_0 \times F_1 \times \cdots \times F_{n-1} = F_n - 2.}$$

2. Soient $k, n$ deux entiers naturels tels que $0 \leqslant k < n$. On suppose qu'il existe un nombre premier $p$ qui divise $F_k$ et $F_n$.
   (a) Puisque $p$ divise $F_k$, il existe un entier $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $F_k = pq$.
   De même, puisque $p$ divise $F_n$,il existe un entier $r \in \mathbb{N}^*$ tel que $F_n = pr$.
   Or, d'après la première question, $F_0 \times \cdots \times F_k \times \cdots \times F_{n-1} = F_n - 2$ donc
   $$\begin{aligned} 2 &= F_n - F_0 \times \cdots \times F_k \times \cdots \times F_{n-1} \\ &= pr - F_0 \times \cdots \times F_{k-1} \times pq \times F_{k+1} \times \cdots \times F_{n-1} \\ &= p(r - F_0 \times \cdots \times F_{k-1} \times q \times F_{k+1} \times \cdots \times F_{n-1}), \end{aligned}$$
   ce qui prouve que $\boxed{p \text{ divise } 2.}$
   (b) Le nombre $p$ est un nombre premier qui divise 2. Or, les entiers naturels qui divisent 2 sont 1 (qui n'est pas un nombre premier) et 2.
   Nécessairement, $\boxed{p = 2.}$
   (c) Par hypothèse, $p$ divise $F_n$. Puisque $p = 2$, on en déduit que $F_n$ est pair.
   Or, par définition, $F_n = 2^{2^n} + 1 = 2 \times 2^{2^n - 1} + 1$ est un nombre impair !
   On aboutit à une contradiction, ce qui prouve que l'existence d'un nombre premier $p$ qui divise $F_k$ et $F_n$ est impossible. Ainsi, le seul diviseur commun de $F_k$ et $F_n$ est 1, ce qui montre que $F_k$ et $F_n$ sont premiers entre eux.
   $\boxed{\text{Ainsi, deux nombres de Fermat différents sont nécessairement premiers entre eux.}}$

**Exercice 2.** Montrons cette inégalité par récurrence de pas double.

**Initialisation :** Pour $n = 0$, on a $u_0 = 0 \leqslant \left(\frac{5}{3}\right)^0 = 1$ et $u_1 = 1 \leqslant \left(\frac{5}{3}\right)^1 = \frac{5}{3}$.

**Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n \leqslant \left(\frac{5}{3}\right)^n$ et $u_{n+1} \leqslant \left(\frac{5}{3}\right)^{n+1}$.

Montrons que $u_{n+2} \leqslant \left(\frac{5}{3}\right)^{n+2}$.

Par définition, on a

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \leqslant \left(\frac{5}{3}\right)^{n+1} + \left(\frac{5}{3}\right)^n = \left(\frac{5}{3}\right)^n \left(\frac{5}{3} + 1\right) = \left(\frac{5}{3}\right)^n \times \frac{8}{3}.$$

Or, $\left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9} \geqslant \frac{8}{3} = \frac{24}{9}$.

Ainsi, on a bien

$$u_{n+2} \leqslant \left(\frac{5}{3}\right)^n \times \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \left(\frac{5}{3}\right)^{n+2},$$

ce qui prouve la propriété au rang $n + 2$.

On a donc bien montré par une récurrence de pas double que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant \left(\frac{5}{3}\right)^n.}$

**Exercice 3.** Nous allons procéder par analyse-synthèse.

**Analyse :** Soit $f$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel $x, f(x) = (f(x))^2$.
Alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, (f(x))^2 - f(x) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f(x)(f(x) - 1) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0 \,\text{ou}\, f(x) = 1,$$

autrement dit, la fonction $f$ prend au plus deux valeurs (0 et 1).

Supposons qu'il existe deux réels $x_0$ et $x_1$ tels que $f(x_0) = 0$ et $f(x_1) = 1$ (sans perte de généralité, on peut supposer que $x_0 < x_1$; dans l'autre cas, la preuve est exactement la même).

Puisque $f$ est continue sur le segment $[x_0, x_1]$, que $f(x_0) = 0$, $f(x_1) = 1$ et $\frac{1}{2} \in [0, 1]$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel $\alpha \in [x_0, x_1]$ tel que $f(\alpha) = \frac{1}{2}$, ce qui est absurde puisque $f$ ne peut prendre que 0 et 1 comme valeurs.

On aboutit donc à une contradiction, ce qui prouve que $f$ ne peut prendre qu'une valeur, c'est à dire que $f$ est constante égale à 0 ou à 1.

**Synthèse :** Supposons que $f$ est la fonction constante égale à 0. La fonction $f$ est continue sur $\mathbb{R}$ et on a bien pour tout réel $x, f(x) = (f(x))^2$.

De même, si $f$ est la fonction constante égale à $1, f$ est continue sur $\mathbb{R}$ et on a bien pour tout réel $x, f(x) = (f(x))^2$.

Finalement, les deux seules fonctions qui répondent au problème sont

$$\boxed{\text{les fonctions constantes égales à } 0 \text{ ou } 1.}$$