Devoir maison n°2
A rendre pour le vendredi 6 octobre 2023

Exercice 1.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. On veut savoir s'il existe $2n+1$ entiers naturels consécutifs $a_0, a_1, \dots, a_{2n}$ rangés dans l'ordre croissant tels que
$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=n+1}^{2n} a_k.$$
   (a) Exprimer $\sum_{k=0}^{n} a_k$ et $\sum_{k=n+1}^{2n} a_k$ en fonction de a_0 et n.
   (b) En déduire la relation (donnant la valeur de a_0 en fonction de n) qui est nécessaire et suffisante pour que $a_0, a_1, \dots, a_{2n}$ existent.
   (c) Expliciter les égalités obtenues pour $n = 1, 2$ et 3.
2. On veut savoir cette fois s'il existe $2n+1$ entiers naturels consécutifs $b_0, b_1, \dots, b_{2n}$ rangés dans l'ordre croissant tels que
$$\sum_{k=0}^{n} b_k^2 = \sum_{k=n+1}^{2n} b_k^2.$$
   (a) Exprimer $\sum_{k=0}^{n} b_k^2$ et $\sum_{k=n+1}^{2n} b_k^2$ en fonction de b_0 et n.
   (b) En déduire la relation (donnant la valeur de b_0 en fonction de n) qui est nécessaire et suffisante pour que $b_0, b_1, \dots, b_{2n}$ existent.
   (c) Expliciter les égalités obtenues pour $n = 1, 2$ et 3.

Exercice 2.

1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$P_n = \prod_{j=1}^{n} (1 - a_j).$$
   (a) Que vaut P_0 ?
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Quelle relation de récurrence très simple existe-t-il entre P_n et P_{n+1} ?
   (c) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$P_n + \sum_{k=1}^{n} a_k P_{k-1} = 1.$$
2. On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on pose $a_j = \dfrac{j}{n}$ de sorte que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,
$$P_k = \prod_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{j}{n}\right).$$

(a) Calculer P_n puis montrer que pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, on a

$$P_k = \frac{k!}{n^k}\binom{n-1}{k}.$$

(b) La formule de la question précédente est-elle encore valable pour $k = 0$?

(c) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1}\frac{k!}{n^k} = 1.$